

MATERIÁLOVOTECHNOLOGICKÁ FAKULTA
SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA

**MATEMATICKÉ METÓDY PLÁNOVANIA
A VYHODNOCOVANIA EXPERIMENTU
SEMESTRÁLNA PRÁCA**

OBJEM EXTRAHOVANEJ KÁVY

Ak. rok: 2025/2026

Odbor: VTVM-OAT-11

Ročník: 1.

Bc. Andrej Bartek

Bc. Milan Fil'o

OBJEM EXTRAHOVANEJ KÁVY

Bolo skúmané, aký vplyv na objem vyextrahovanej kávy pri príprave espressa majú tieto parametre: hmotnosť mletej kávy, sila utlačania a stupeň mletia.

Použité prístroje a pomôcky:

kávovar Catler ES 910, páka, single dose sitko, váha, baristická váha, tamper, šálka, kávové zrná, odmerka

Premenné

- stupeň mletia: 9 (jemné), 18 (hrubé)
- hmotnosť namletej kávy: 7g, 11g
- utlačenie kávy v páke: 0kg, 20kg

Postup experimentu

Najprv sme si nastavili stupeň mletia na kávovare (Obr. 1). Následne sme si namleli na mlynčeku požadovanú hmotnosť kávy do sitka v páke (Obr. 2). Nasledovalo utlačenie kávy pomocou zvolenej sily (Obr. 3). Po utlačení sa páka nasadila do kávovaru. Pod páku sa položila baristická váha a na ňu sa položila šálka. Váha sa vynulovala a spustila sa príprava espressa (Obr. 4). V ten istý čas sa aj spustili stopky na váhe, nakoľko extrakcia bola meraná pri konštantnom čase, a to 25 sekúnd. Po 25 sekundách sa vypla príprava espressa a zmeral sa objem vyextrahovanej kávy.



Obr. 1 Nastavenie stupňa mletia zrníek kávy



Obr. 2 Namletá káva v páke



Obr. 3 Utláčanie kávy pomocou tampera



Obr. 4 Priprava espressa a meranie výsledného objemu

Namerané hodnoty

Tab. 1 Namerané hodnoty objemu extrahovanej kávy

Objem [g]	Utlačenie [kg]	Mletie	Nameraný objem [ml]
7	0	9	31,0
7	0	18	39,2
7	20	9	24,3
7	20	18	32,1
11	0	9	28,6
11	0	18	36,1
11	20	9	19,0
11	20	18	26,9
7	0	9	30,6
7	0	18	39,8
7	20	9	24,0
7	20	18	31,7
11	0	9	29,0
11	0	18	35,6
11	20	9	19,3
11	20	18	26,5

Úplný experiment typu 2³

Bolo skúmané, aký vplyv majú parametre: stupeň mletia, hmotnosť namletej kávy a utlačenie kávy v páke na výsledný objem vyextrahovanej kávy pri príprave espressa. Zvolené premenné boli $x_1 \in \langle 7; 11 \rangle$ ako hmotnosť namletej kávy [g], $x_2 \in \langle 0; 20 \rangle$ ako utlačenie kávy [kg] a $x_3 \in \langle 1; 3 \rangle$ ako stupeň mletia. Bolo merané ako od týchto faktorov záviseli hodnoty objemu vyextrahovanej kávy. Experiment bol vykonaný s dvomi replikáciami.

Vygenerovali sme hodnoty pomocou funkcie Create Factorial Design v Minitabe, kde sme zvolili počet faktorov: 3. Vybrali sme ako dizajn Full Factorial s 2-mi replikáciami. Doplnili sme faktory a spustili generovanie.

Design Summary

Factors:	3	Base Design:	3; 8
Runs:	16	Replicates:	2
Blocks:	1	Center pts (total):	0

Obr. 5 Výstup Factorial Design-u

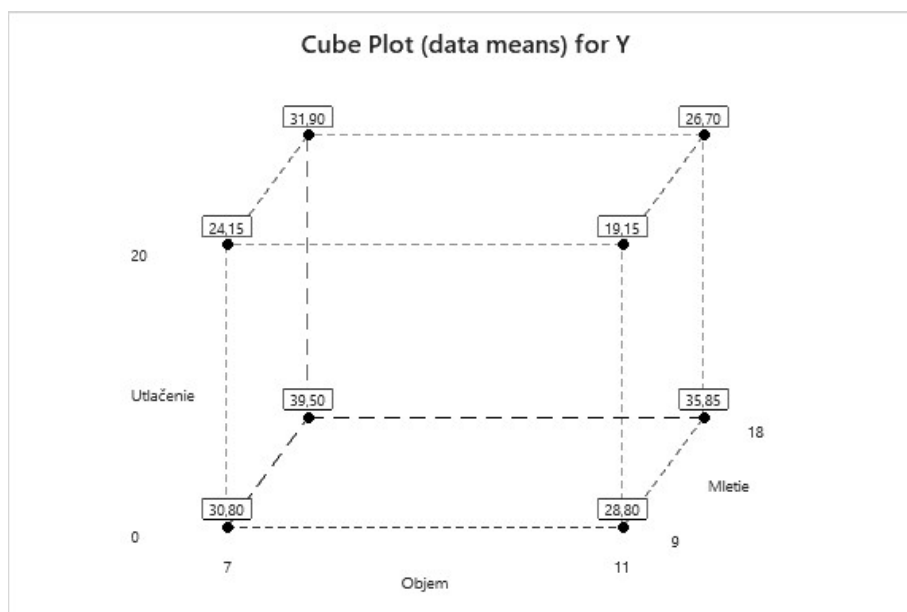
Dostali sme dané hodnoty (Obr. 6), ktoré sme doplnili o nami namerané hodnoty z experimentu.

↓	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
	StdOrder	RunOrder	CenterPt	Blocks	Objem	Utlačenie	Mletie	Y
1	8	1	1	1	11	20	18	26,9
2	6	2	1	1	11	0	18	36,1
3	11	3	1	1	7	20	9	24,3
4	1	4	1	1	7	0	9	31,0
5	9	5	1	1	7	0	9	30,6
6	7	6	1	1	7	20	18	32,1
7	13	7	1	1	7	0	18	39,2
8	10	8	1	1	11	0	9	28,6
9	16	9	1	1	11	20	18	26,5
10	5	10	1	1	7	0	18	39,8
11	15	11	1	1	7	20	18	31,7
12	4	12	1	1	11	20	9	19,0
13	14	13	1	1	11	0	18	35,6
14	2	14	1	1	11	0	9	29,0
15	12	15	1	1	11	20	9	19,3
16	3	16	1	1	7	20	9	24,0

Obr. 6 Vygenerované hodnoty s doplnenými výsledkami meraní

1. Priemerné odozvy namerané vo faktorových bodoch

Pomocou funkcie Cube Plot sme zobrazili priemerné odozvy, ktoré boli namerané vo faktorových bodoch. V našom prípade sme nechali všetky 3 faktory.



Obr. 7 Výsledný CPLOT s priemerom nameraných hodnôt vo faktorových bodoch

2. Odhadnutie koeficientov transformovanej regresnej funkcie lineárneho typu

Pomocou funkcie Analyse Factorial Design sme definovali odozvu. Pri analýze sme uvažovali so všetkými interakciami. Pri analýze bola $\alpha = 0,05$

Coded Coefficients

Term	Effect	Coef	SE Coef	T-Value	P-Value	VIF
Constant		29,6062	0,0747	396,13	0,000	
Objem	-3,9625	-1,9813	0,0747	-26,51	0,000	1,00
Utlačenie	-8,2625	-4,1313	0,0747	-55,28	0,000	1,00
Mletie	7,7625	3,8813	0,0747	51,93	0,000	1,00
Objem*Utlačenie	-1,1375	-0,5688	0,0747	-7,61	0,000	1,00
Objem*Mletie	-0,4625	-0,2312	0,0747	-3,09	0,015	1,00
Utlačenie*Mletie	-0,1125	-0,0563	0,0747	-0,75	0,473	1,00
Objem*Utlačenie*Mletie	0,3625	0,1812	0,0747	2,43	0,042	1,00

Obr. 8 Koeficienty transformovanej regresnej funkcie lineárneho typu

3. Štatistická významnosť faktorov

Na hladine významnosti 0,05; na základe P-hodnoty v stĺpci P-Value môžeme konštatovať, že všetky hlavné efekty faktorov, to sú objem kávy (A), utláčanie (B) a mletie (C), sú štatisticky významné, nakoľko ich P-hodnoty boli menšie ako 0,05. Z interakčných členov boli štatisticky významné AB, AC a ABC.

Interakcia BC nebola na zvolenej hladine významnosti štatisticky významná, nakoľko jej hodnota bola 0,473; čo je viac ako 0,05. Avšak vzhľadom k skutočnosti, že interakcia ABC je štatisticky významná, nemôžeme vylúčiť interakciu BC z regresného modelu bez toho, že by sme neporušili hierarchickú štruktúru modelu.

Z regresného modelu teda nebol vylúčený žiaden faktor, ani interakčný člen.

Coded Coefficients

Term	Effect	Coef	SE Coef	T-Value	P-Value	VIF
Constant		29,6062	0,0747	396,13	0,000	
Objem	-3,9625	-1,9813	0,0747	-26,51	0,000	1,00
Utláčenie	-8,2625	-4,1313	0,0747	-55,28	0,000	1,00
Mletie	7,7625	3,8813	0,0747	51,93	0,000	1,00
Objem*Utláčenie	-1,1375	-0,5688	0,0747	-7,61	0,000	1,00
Objem*Mletie	-0,4625	-0,2312	0,0747	-3,09	0,015	1,00
Utláčenie*Mletie	-0,1125	-0,0563	0,0747	-0,75	0,473	1,00
Objem*Utláčenie*Mletie	0,3625	0,1812	0,0747	2,43	0,042	1,00

Obr. 9 P-hodnoty regresnej funkcie

4. Bodový odhad transformovanej regresnej funkcie lineárneho typu

$$y = 29,6062 - 1,9813A - 4,1313B + 3,8813C - 0,5688AB - 0,2312AC - 0,0563BC + 0,1812ABC$$

5. Rovnica pôvodnej regresnej funkcie lineárneho typu

$$y = 22,71 - 0,088A + 0,104B + 1,288C - 0,0556AB - 0,0458AC - 0,01937BC + 0,002014ABC$$

ANOVA

Analysis of Variance

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	7	583,514	83,359	932,69	0,000
Linear	3	576,907	192,302	2151,63	0,000
Objem	1	62,806	62,806	702,72	0,000
Utlačenie	1	273,076	273,076	3055,39	0,000
Mletie	1	241,026	241,026	2696,79	0,000
2-Way Interactions	3	6,082	2,027	22,68	0,000
Objem*Utlačenie	1	5,176	5,176	57,91	0,000
Objem*Mletie	1	0,856	0,856	9,57	0,015
Utlačenie*Mletie	1	0,051	0,051	0,57	0,473
3-Way Interactions	1	0,526	0,526	5,88	0,042
Objem*Utlačenie*Mletie	1	0,526	0,526	5,88	0,042
Error	8	0,715	0,089		
Total	15	584,229			

Obr. 10 ANOVA získaná z modelu v programe Minitab

6. Kvalita získaného modelu pomocou indexu determinácie

Z výsledkov testu možno konštatovať, že test bol dostatočne kvalitný, nakoľko index determinácie bol $R^2 = 99,88\%$, upravený index determinácie bol $R^2_{\text{adj}} = 99,77\%$. Taktiež aj prediktívny index determinácie vyšiel $R^2_{\text{pred}} = 99,51\%$.

Nakoľko sme nevylučovali faktory ani interakcie, všetky indexy determinácie ostali rovnaké.

Index determinácie R^2 vyjadruje kvalitu priblíženia, teda ako dobre model opisuje namerané údaje. Upravený index determinácie R^2_{adj} zohľadňuje počet premenných a veľkosť výberu, teda hovorí, aký je pomer medzi presnosťou a zložitou modelu. Nakoniec predikčný index determinácie R^2_{pred} vyjadruje schopnosť modelu predikovať nové dáta.

99,88% variability nameraných hodnôt pri objeme extrahovanej kávy vieme vysvetliť regresným modelom (regresnou funkciou lineárneho typu), len 0,12% variability nameraných hodnôt zostalo modelom nevysvetlenej.

7. Porovnanie indexov determinácie

Medzi indexom determinácie R_{adj}^2 a R^2 (Obr. 11) vidíme len zanedbateľný rozdiel, preto neočakávame prítomnosť nevýznamných členov v našom modeli.

Pre R_{pred}^2 môžeme predpokladať, že náš model vie v rámci experimentálneho priestoru predikovať dáta veľmi spoľahlivo. Veľký rozdiel medzi R^2 a R_{pred}^2 by naznačoval, že v regresnom modeli je zbytočne veľa členov v pomere k množstvu dát, čo sa ale pri našom modeli nedá povedať.

Model Summary

S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)
0,298957	99,88%	99,77%	99,51%

Obr. 11 Kvalita modelu vyjadrená pomocou rôznych R-sq

8. Charakterizácia modelu z hľadiska predikcie

Vyskúšali sme aj predikovať výsledky testu na základe modelu pre zadané hodnoty vstupov.

Regression Equation in Uncoded Units

$$Y = 22,71 - 0,088 \text{ Objem} + 0,104 \text{ Utlačenie} + 1,288 \text{ Mletie} - 0,0556 \text{ Objem} * \text{Utlačenie} - 0,0458 \text{ Objem} * \text{Mletie} - 0,01937 \text{ Utlačenie} * \text{Mletie} + 0,002014 \text{ Objem} * \text{Utlačenie} * \text{Mletie}$$

Settings

Variable	Setting
Objem	9
Utlačenie	20
Mletie	14

Prediction

Fit	SE Fit	95% CI	95% PI
25,9	0,106348	(25,6548; 26,1452)	(25,1683; 26,6317)

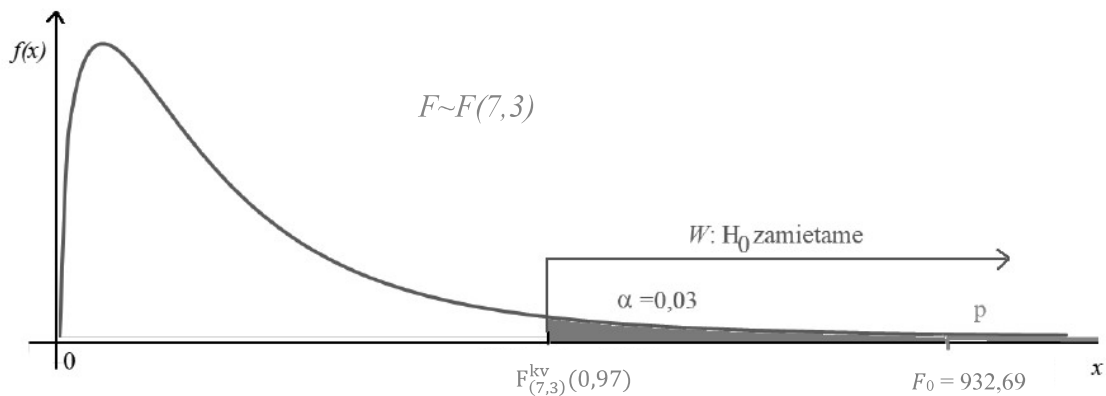
Obr. 12 Výstup s výsledkami pre predikciu

9. F-test

Pre $\alpha = 0,03$, bude kritická oblasť ohraničená kritickou hodnotou $F_{(7,3)}^{kv}(0,97)$. Jej hodnotu interpretujeme ako 97% kvantil Fisherovho - Snedecorovho rozdelenia $F.INV(0,97;7;3) = 12,850297$, čiže kritická oblasť $W = (12,850297; \infty)$.

Pretože $F_0 = 932,69 \in W$, zamietame $H_0: b_1 = b_3 = b_{13} = 0$ a prijímame alternatívnu hypotézu H_1 : existuje aspoň jedno $b_i \neq 0$.

Na hladine významnosti $\alpha = 0,03$ možno konštatovať, že regresný model lineárneho typu je štatisticky významný (obr. 13).



Obrázok 13: Grafické riešenie pre celkový F test

10. Lack of fit,

11. Test krivosti

Test Lack of Fit a test krivosti nebolo možné vykonať, nakoľko bol regresný model lineárneho typu s interakciami až do 3. rádu, teda bol nasýtený. To je z dôvodu, že žiadny efekt, ani interakcie neboli štatisticky nevýznamné a teda neboli žiadne vylúčené. Z toho dôvodu nebolo možné oddeliť chybu (Pure Error) od chyby modelu.

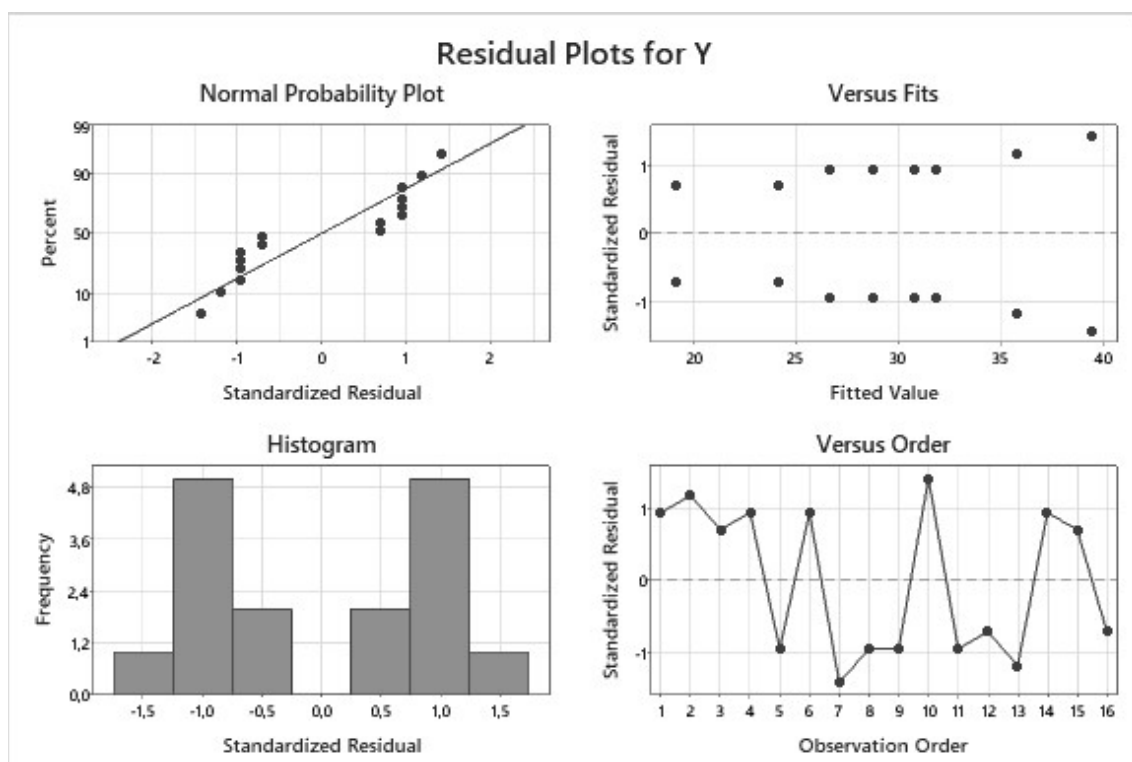
12. Graf reziduí

Na normálnom pravdepodobnostnom grafe reziduí môžeme vidieť, že jednotlivé body ležia približne na referenčnej priamke a neobjavujú sa žiadne zakrivenia ani odľahlé body. Teda možno predpokladať, že normálne rozdelenie reziduí je správne.

Pri grafe reziduí proti odhadovaným hodnotám, možno pozorovať, že body sú rozptýlené okolo nuly a nepozorujeme žiaden trend, ani anomálne zakrivenie. Teda predpoklad konštantného rozptylu reziduí je splnený.

Histogram reziduí vykazuje symetriu dvojitého Gausovho zakrivenia. Možno konštatovať, že histogram je symetrický, čo podporuje predpoklad normálneho rozdelenia reziduí.

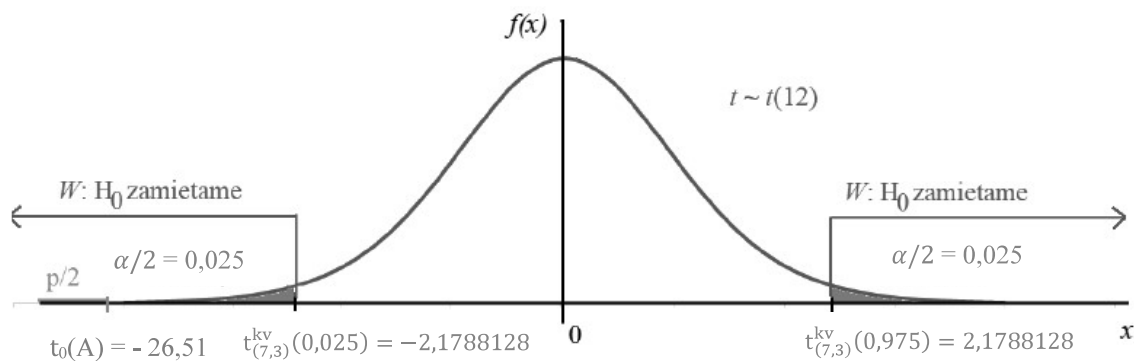
Reziduá proti poradiu merania. Pri tomto grafe sa neobjavuje žiaden trend, cyklickosť, ani drift, teda možno predpokladať, že reziduá sú nezávislé a teda experiment nebol nepriaznivo ovplyvnený.



Obrázok 14: Grafy reziduí získané v programe Minitab

13. Individuálny t-test štatistickej významnosti regres. koef. A (objem)

Budeme testovať na hladine významnosti $\alpha = 0,05$, t.j. 5%.



Obrázok 15: Grafické riešenie pre testovanie hypotézy o koeficiente A

- a) $W = (-\infty; -2,1788128) \cup (2, 1788128, \infty)$. Z toho kritickú hodnotu určíme ako 97,5% kvantil $t_{(7,3)}^{kv}(0,975) = T.INV(0,975;12) = 2,1788128$.
Realizácia testovacej štatistiky $t_0(A) = -26,51 \in W$,
preto zamietame $H_0: A = 0$ (obr. 14).
- b) $p\text{-value (obr. 9)} = 0,000 < 0,05 = \alpha$, preto zamietame $H_0: A = 0$.

14. F-test štatistickej významnosti prínosu pre nami zvolené premenné

Minitab nám poskytne F testy pre nami ponechané premenné priamo v tabuľke ANNOVA, ako to môžeme vidieť na (Obr. 16).

Analysis of Variance

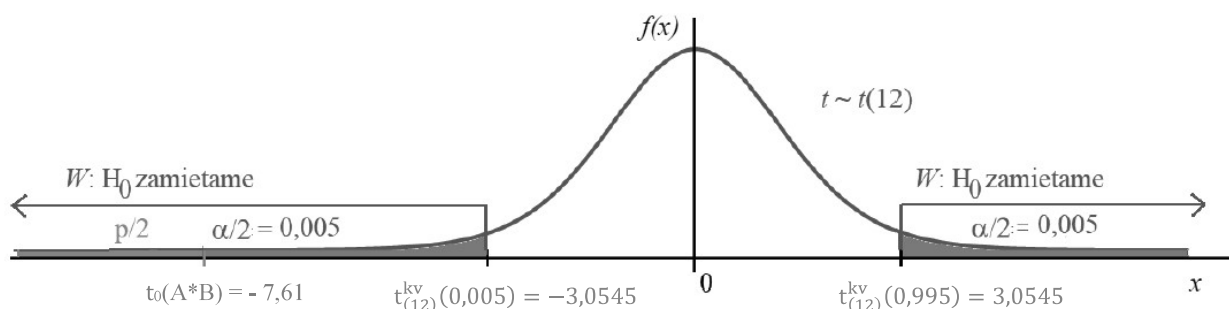
Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	7	583,514	83,359	932,69	0,000
Linear	3	576,907	192,302	2151,63	0,000
Objem	1	62,806	62,806	702,72	0,000
Utláčenie	1	273,076	273,076	3055,39	0,000
Mletie	1	241,026	241,026	2696,79	0,000
2-Way Interactions	3	6,082	2,027	22,68	0,000
Objem*Utláčenie	1	5,176	5,176	57,91	0,000
Objem*Mletie	1	0,856	0,856	9,57	0,015
Utláčenie*Mletie	1	0,051	0,051	0,57	0,473
3-Way Interactions	1	0,526	0,526	5,88	0,042
Objem*Utláčenie*Mletie	1	0,526	0,526	5,88	0,042
Error	8	0,715	0,089		
Total	15	584,229			

Obrázok 16: Výstup Minitabu pre F-testy pre všetky ponechané premenné

15. T-test nulovosti regresného koeficientu na vybranú interakciu faktorov

Budeme testovať významnosť na hladine významnosti $\alpha = 0,01$, t.j. 1% spoločné pôsobenie faktorov A - objem a B – utlačanie na skúmanú odozvu.

Testujeme hypotézu: $H_0: A*B = 0 \leq H_1: A*B \neq 0$



Obrázok 17: Grafické riešenie pre testovanie hypotézy o interakcii faktorov objem*utlačanie

- a) $W = (-\infty; -3,0545) \cup (3,0545, \infty)$. Z toho kritickú hodnotu určíme ako 99,5% kvantil $t_{(12)}^{kv}(0,005) = T.INV(0,005;12) = 3,0545$.

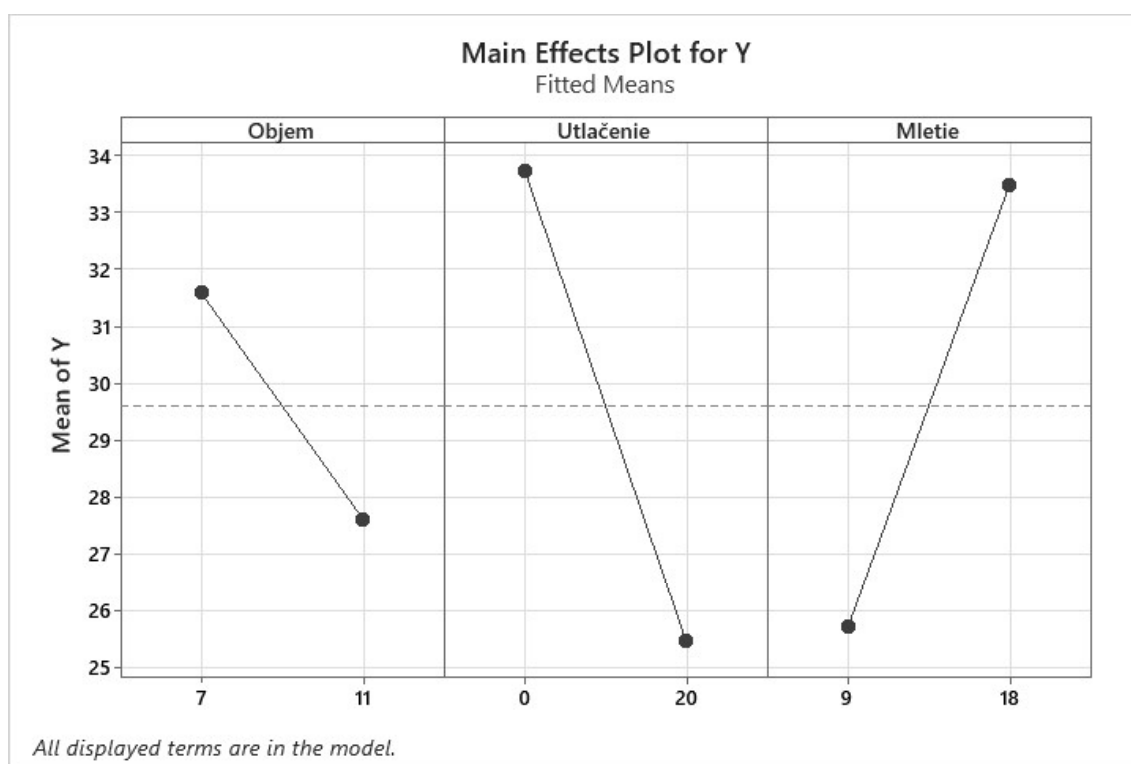
Realizácia testovacej štatistiky $t_0(A*B) = -7,61 \in W$, preto zamietame $H_0: A = 0$ (obr. 14).

- b) p -hodnota (obr. 9) $= 0,000 < 0,01 = \alpha$, preto zamietame $H_0: A = 0$.

16. Main effect plots

Grafy hlavných skúmaných faktorov môžeme vidieť na (Obr. 18). Z nich vyplýva nasledujúce:

- a) Hlavný efekt faktora objemu namletej kávy je záporný - zmenou z dolnej na hornú úroveň faktora nameraný extrahovaný objem kávy klesol.
- b) Hlavný efekt faktora utláčania je záporný - zmenou z dolnej na hornú úroveň faktora nameraný extrahovaný objem kávy klesol.
- c) Hlavný efekt faktora objemu namletej kávy je kladný - zmenou z dolnej na hornú úroveň faktora nameraný extrahovaný objem kávy stúpol.

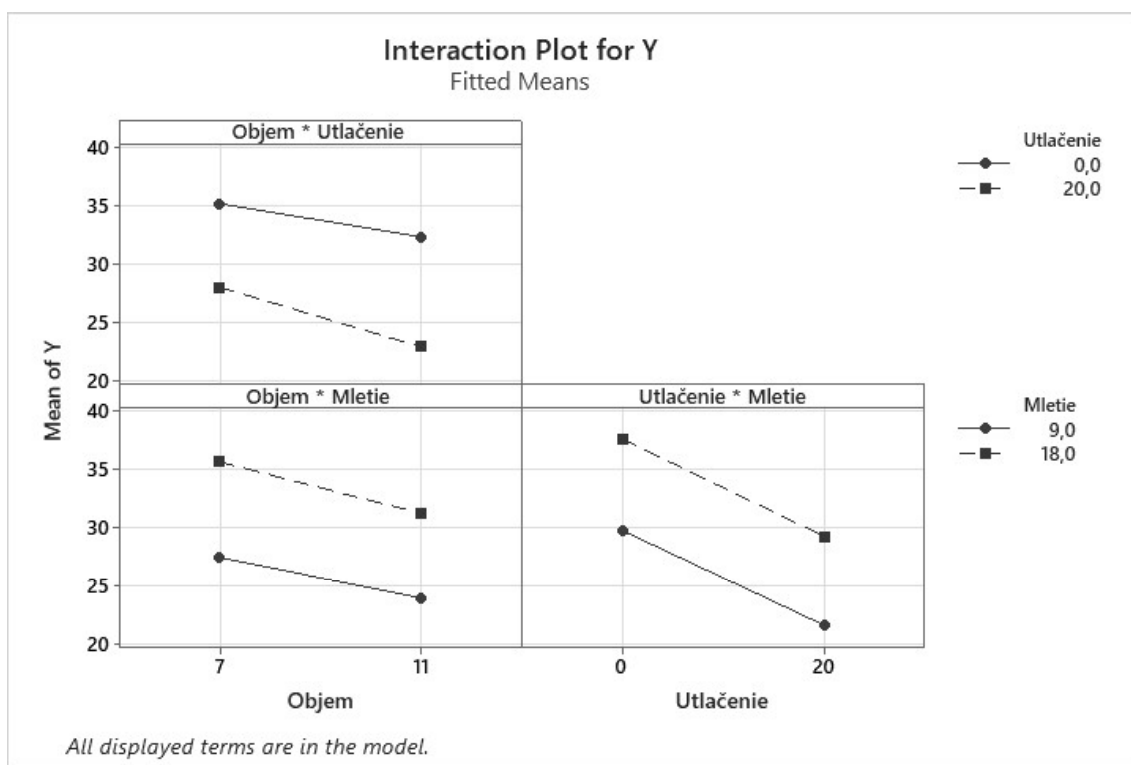


Obrázok 18: Grafy hlavných efektov skúmaných faktorov v Minitabe

17. Interaction plots

Grafy s interakciami všetkých kombinácií dvojíc faktorov z Minitabu môžeme vidieť na (Obr. 19). Z nich vyplýva nasledujúce:

- Najväčšiu interakciu možno pozorovať na interakcii objem*utlačanie, pretože uhol medzi úsečkami je najväčší.
- Na interakcii utlačanie*mletie nepozorujeme žiadnu interakciu - úsečky sú rovnobežné.
- Najväčšiu odozvu možno očakávať pri nastavení faktora objemu na dolnú úroveň, faktora utlačania na dolnú úroveň a faktora mletia na hornú úroveň, pričom vplyv faktora mletia možno považovať za zanedbateľný.
- Najmenšiu odozvu možno očakávať pri nastavení faktora objemu na hornú úroveň, faktora utlačania na hornú úroveň, pričom vplyv faktora mletia možno zanedbať.



Obrázok 19: Grafy interakcií faktorov v softvéri Minitab

18. Hľadanie optimálneho riešenia

20. Dosiahnutie požadovanej odozvy

Pomocou funkcie Response Optimizer v programe Minitab sme hľadali optimálne riešenie, pričom sme ich hľadali bez obmedzení. Minitab našiel celkom 9 optimálnych riešení, pričom podľa Composite Desirability by malo byť najoptimálnejšie riešenie číslo 1. Práve toto riešenie by malo dosiahnuť požadovaný výstup, teda 25ml espresso, ktoré by bolo dosiahnuté objemom kávy 9g, utlačením 11,77kg a mletím 9, teda jemným. Rozsah predikovaného objemu je vzhľadom na požiadavku viac než uspokojivý.

Parameters

Response	Goal	Lower	Target	Upper	Weight	Importance
Y	Target	19	25	39,8	1	1

Solutions

Solution	Objem	Utlačenie	Mletie	Y Fit	Composite Desirability
1	9,0000	11,7791	9,0000	25,0000	1,00000
2	7,0000	18,2512	9,3095	25,0009	0,99994
3	8,4424	15,0164	10,2646	25,3674	0,97518
4	10,3319	13,5529	11,2699	24,8259	0,97099
5	11,0000	20,0000	17,3114	26,1224	0,92416
6	11,0000	4,3864	9,0000	26,6836	0,88624
7	11,0000	11,5823	13,9842	27,2762	0,84620
8	8,8500	18,7478	16,5006	28,7371	0,74749
9	7,6582	20,0000	15,7927	29,1517	0,71948

Multiple Response Prediction

Variable	Setting
Objem	9
Utlačenie	11,7791
Mletie	9

Response	Fit	SE Fit	95% CI	95% PI
Y	25,000	0,107	(24,752; 25,248)	(24,268; 25,732)

Obr. 20 Výsledky pre optimálne riešenie



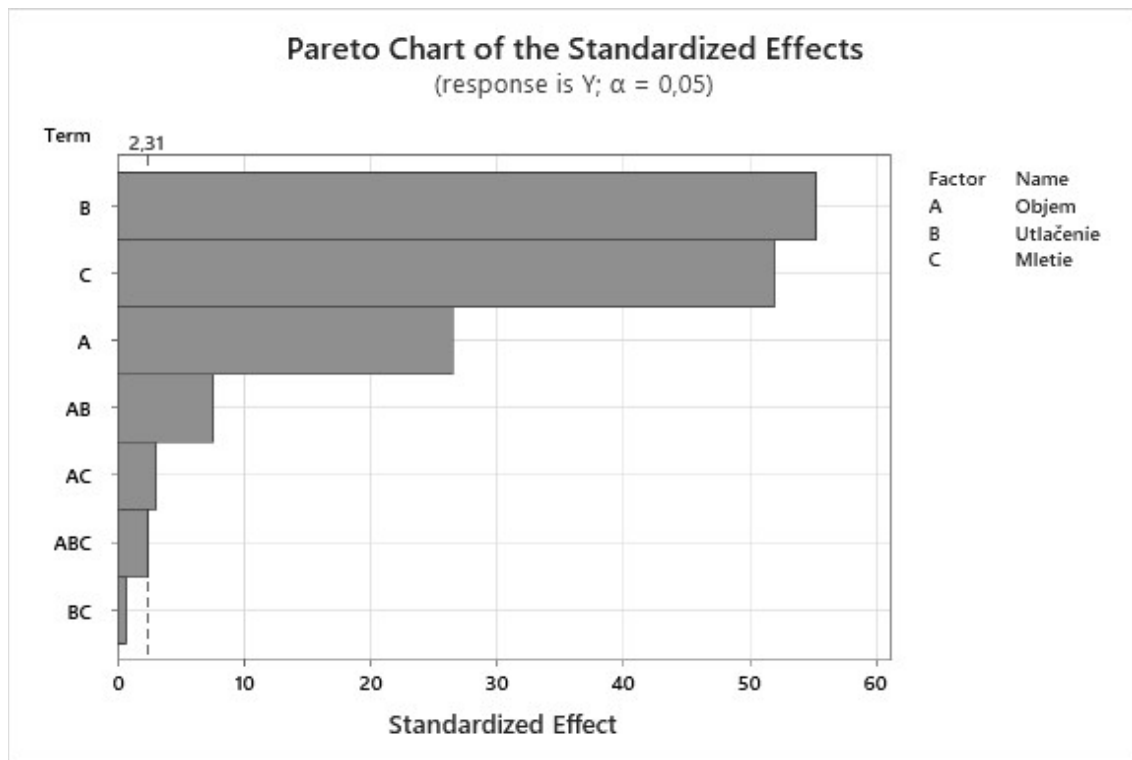
Obr. 21 Grafy jednotlivých faktorov pri optimálnom riešení

19. Kontrolné meranie

Boli vykonané dve kontrolné merania, ktoré mali za úlohu overiť správnosť nájdeného regresného modelu. Tieto dve merania potvrdili správnosť výsledku, nakoľko objem pri prvom meraní dosiahol 24,9 ml a pri druhom 25,1 ml. Týmto sa potvrdila správnosť predikovaného modelu, t.j. objem kávy 9g, utlačenie 11,77kg a mletím 9, teda jemné.

Pareto graf

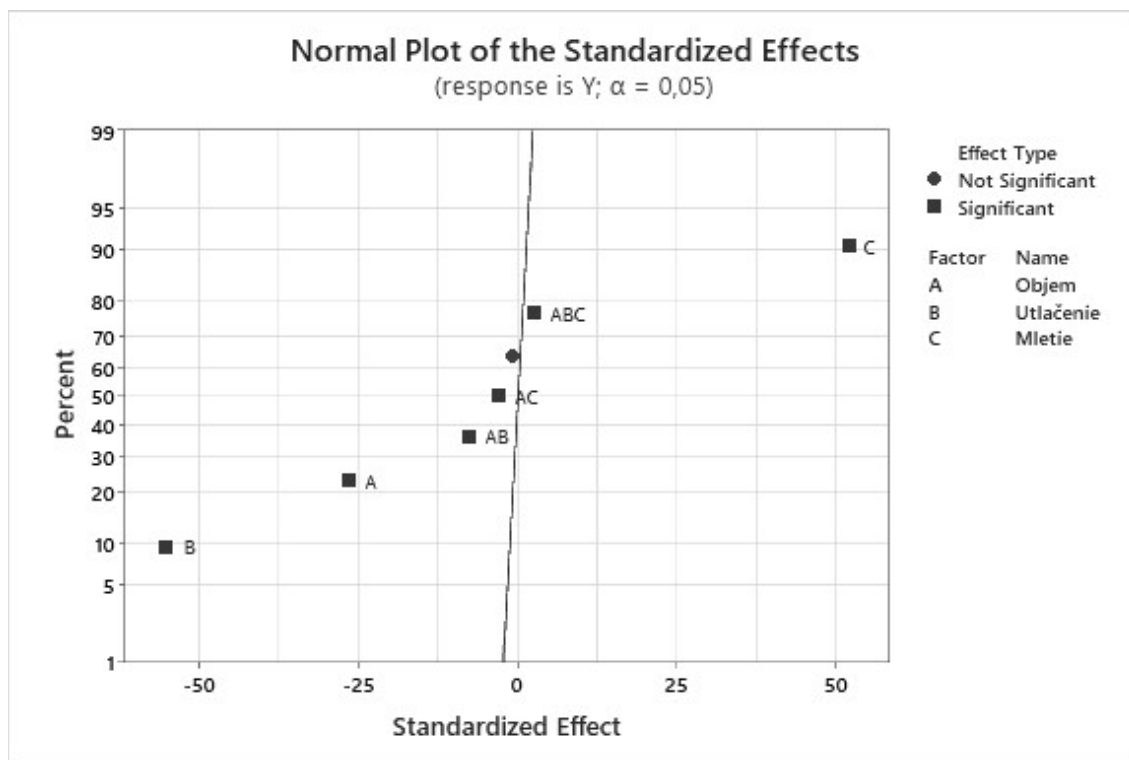
Pareto graf znázorňuje ako boli jednotlivé faktory a interakcie dôležité. Ako dôležité vyšli všetky až na interakciu BC, pričom tá jediná nedosiahla na kritickú hodnotu, ktorá bola 2,31.



Obrázok 22: Pareto graf

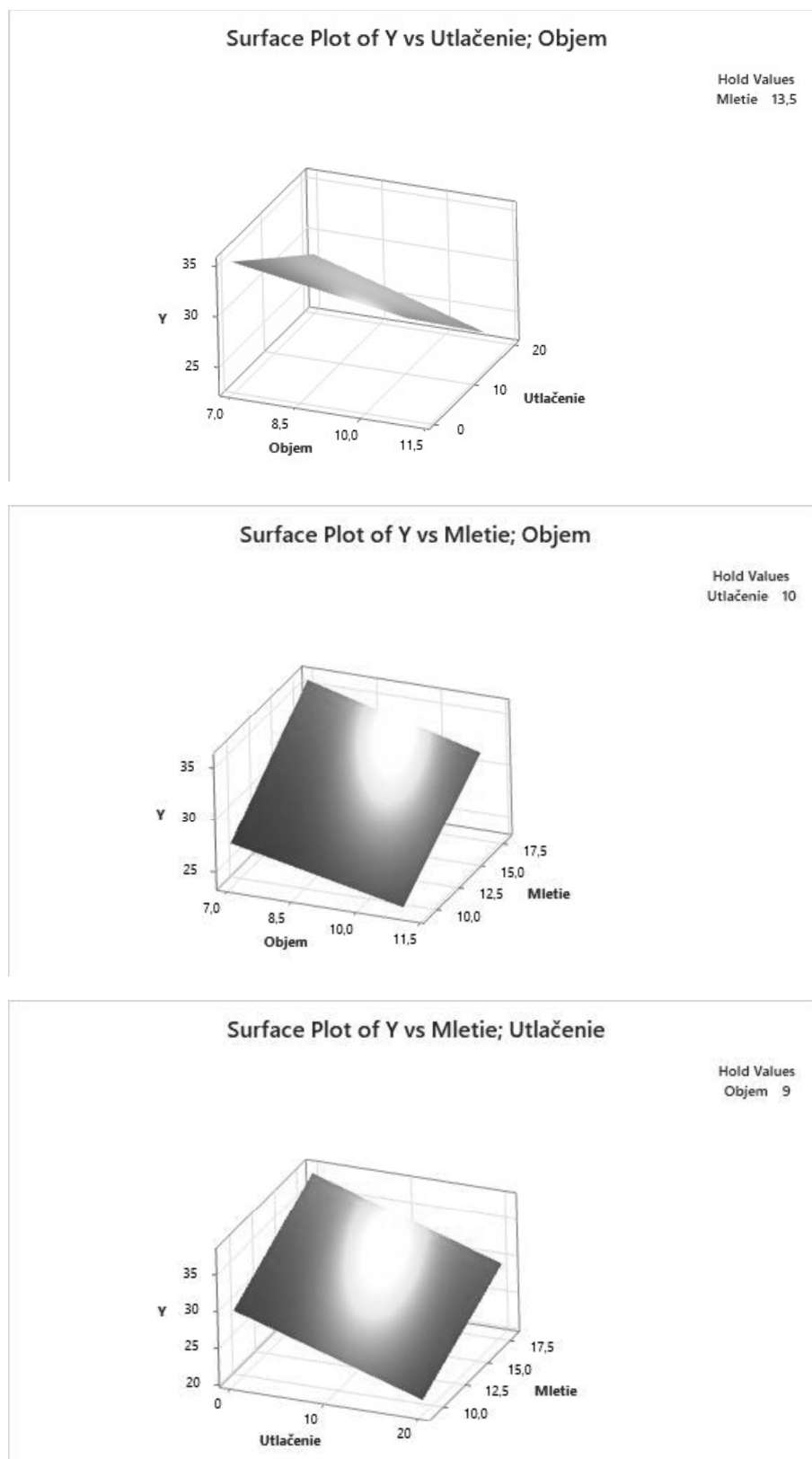
Normálny pravdepodobnostný graf

Normálny pravdepodobnostný graf nám ukazuje ako významné sú jednotlivé faktory a ich interakcie na hladine významnosti $\alpha=0,05$ na hodnotu odozvy.

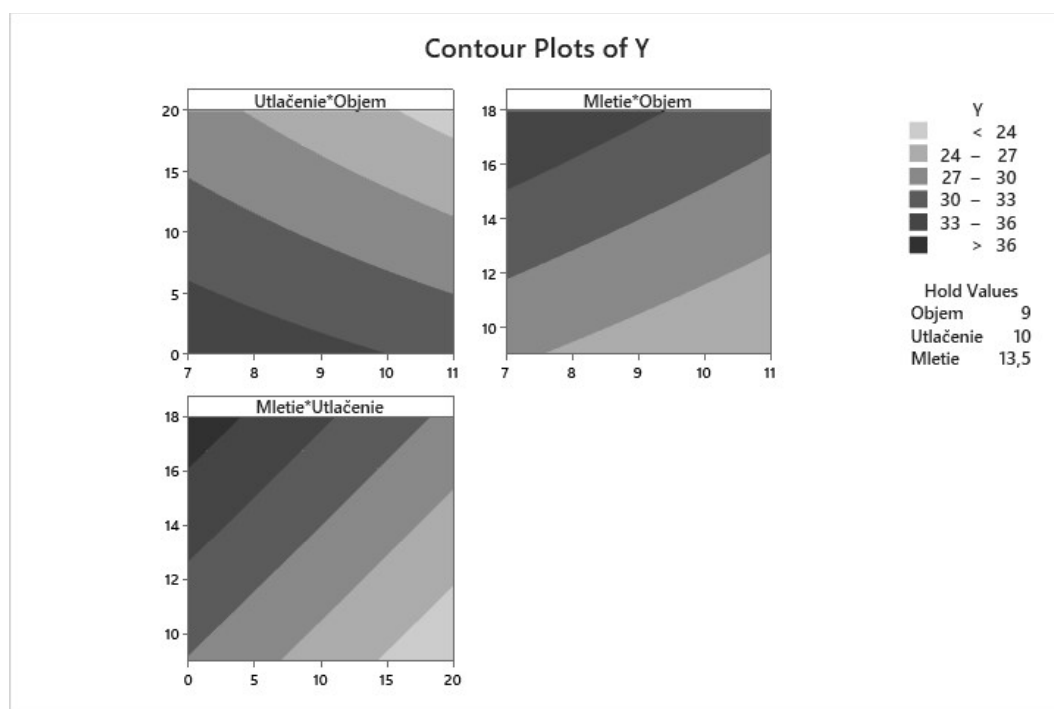


Obr. 23: Normálny pravdepodobnostný graf získaný v programe Minitab

3D grafy



Obr. 24 3D grafy jednotlivých faktorov



Obrázok 25: Vrstevnicové grafy

21. Porovnanie výsledkov s Excelom

V programe Excel nám vyšli výsledky o niečo inakšie. A to pri b_1 , kde nám vyšla hodnota nie -1,9813 ale -0,04375; b_{12} nám vyšla hodnota -0,05625 ale -0,5688; b_{13} vyšlo -0,04375 a nie -0,2312 a napokon b_{123} kde vyšla hodnota -0,05625 a nie 0,1812.

$b_0=$	29,60625
$b_1=$	-0,04375
$b_2=$	-4,13125
$b_3=$	3,88125
$b_{12}=$	-0,05625
$b_{13}=$	-0,04375
$b_{23}=$	-0,05625
$b_{123}=$	-0,05625

Obr. 26 Výsledky koeficientov v programe Excel

Rozdiely medzi regresnými koeficientmi získanými v programe Excel a Minitab sú spôsobené rozdielnym prístupom k spracovaniu údajov. Minitab pri analýze DOE pracuje s kódovanými faktormi a pri replikáciách využíva priemerné odozvy v jednotlivých bodoch experimentu, pričom replikácie slúžia na odhad experimentálnej chyby. Excel naopak vykonáva klasickú lineárnu regresiu v nekódovaných jednotkách a každú repliku považuje za samostatné pozorovanie. Z uvedeného dôvodu nie sú získané koeficienty číselne totožné, avšak z hľadiska trendov a významnosti faktorov sú výsledky konzistentné. Porovnanie sme okrem tohto prvého nerobili.