

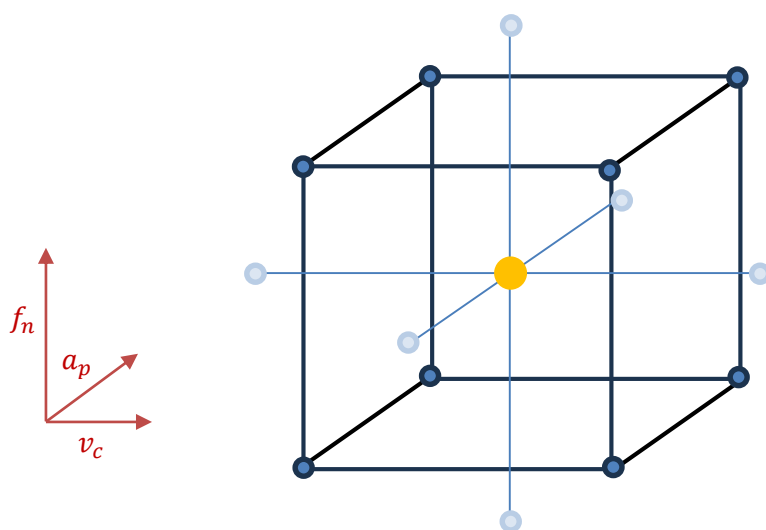
CENTRÁLNY KOMPOZITNÝ PLÁN (CCD – CENTRAL COMPOSITE DESIGN) – RIEŠENÝ VZOROVÝ PRÍKLAD

Bolo skúmané, aký vplyv majú parametre rezná rýchlosť, hĺbka rezu a posuv na kvalitu obrábania obrobku na CNC sústruhu, pričom boli zvolené premenné $x_1 \in \langle 80,68; 299,32 \rangle$ ako rezná rýchlosť v_c v m.min^{-1} , $x_2 \in \langle 1,1; 2,31 \rangle$ ako hĺbka rezu a_p v mm, $x_3 \in \langle 0,1; 0,39 \rangle$ posuv f_n v mm.ot^{-1} . Bolo merané ako od týchto zvolených faktorov závisia hodnoty drsnosti povrchu R_a a R_z , kde R_a predstavuje priemernú aritmetickú odchýlku posudzovaného profilu obrobku a R_z najväčšiu výšku nerovnosti profilu obrobku. Experiment zrealizoval a namerané hodnoty poskytol Bc. Michal Vincúr. Pri uvažovanom experimente bol použitý centrálny kompozitný plán (Central composite design CCD), t. j. k ôsmim faktorovým bodom v úplnom faktorovom pláne 2^3 bolo pridaných 6 axiálnych bodov a jeden centrálny bod. Pri plánovaní experimentu boli zvolené 2 replikácie, t. j. pri experimente bolo nameraných 40 hodnôt každej odozvy, kde 16 hodnôt je z faktorových bodov, 12 hodnôt z axiálnych bodov a 12 hodnôt je z vypočítanej replikácie v centrálnom bode. V naplánovaných 15 (8+6+1) bodoch experimentálneho priestoru boli namerané hodnoty drsnosti R_a a R_z v μm uvedené v tabuľke 6. Drsnosti boli v týchto bodoch merané trikrát a následne boli vyhodnocované ich priemerné hodnoty.

Tabuľka 6											
Tabuľka nameraných hodnôt drsností po randomizácii											
VSTUPNÉ PARAMETRE				MERANÉ PARAMETRE							
	REZNÁ RÝCHLOSŤ v_c [m.min ⁻¹]	HĽBKA REZU a_p [mm]	POSUV f_n [mm.ot ⁻¹]	DRSNOSŤ POVRCHU R_a (Priemerná aritmetická odchýlka posudzovaného profilu)				DRSNOSŤ POVRCHU R_z (Najväčšia výška nerovnosti profilu)			
				1. meranie	2. meranie	3. meranie	Priemer	1. meranie	2. meranie	3. meranie	Priemer
1	255,00	1,10	0,16	2,133	2,121	2,122	2,125	8,569	8,555	8,452	8,525
2	255,00	1,10	0,33	6,155	6,169	6,176	6,167	23,459	23,867	23,453	23,593
3	190,00	2,31	0,25	4,554	4,567	4,568	4,563	17,267	17,226	17,270	17,254
4	80,68	1,55	0,25	4,430	4,410	4,406	4,415	16,797	16,834	16,811	16,814
5	125,00	1,10	0,16	2,231	2,211	2,208	2,220	9,040	8,684	8,662	8,795
6	255,00	2,00	0,33	6,054	6,069	6,064	6,062	21,665	21,733	21,686	21,695
7	125,00	1,10	0,33	6,047	6,050	6,051	6,049	22,494	22,431	22,400	22,442
8	125,00	1,10	0,33	6,062	6,039	6,056	6,052	23,741	23,823	23,809	23,791
9	190,00	1,55	0,25	4,272	4,284	4,280	4,279	16,293	16,144	16,099	16,179
10	190,00	0,79	0,25	4,463	4,489	4,283	4,412	16,680	16,698	16,429	16,602
11	190,00	1,55	0,25	4,465	4,461	4,470	4,465	15,897	16,002	15,887	15,929
12	255,00	1,10	0,16	1,849	1,847	1,963	1,886	7,646	7,608	7,611	7,622
13	190,00	1,55	0,10	0,562	0,669	0,654	0,628	4,097	3,780	3,688	3,855
14	190,00	1,55	0,25	4,398	4,390	4,385	4,391	16,543	16,520	16,552	16,538
15	255,00	2,00	0,16	1,887	1,888	1,893	1,889	7,783	7,767	7,784	7,778

16	299,32	1,55	0,25	4,217	4,205	4,200	4,207	15,919	15,617	15,602	15,713
17	125,00	2,00	0,16	2,157	2,161	2,162	2,160	8,907	8,869	8,844	8,873
18	190,00	1,55	0,25	4,417	4,402	4,401	4,407	16,469	16,407	16,372	16,416
19	80,68	1,55	0,25	4,350	4,199	4,304	4,284	16,010	15,814	16,939	16,254
20	190,00	1,55	0,25	4,427	4,456	4,277	4,387	17,095	16,489	15,930	16,505
21	190,00	1,55	0,25	2,659	2,565	2,620	2,615	16,668	13,830	14,274	14,924
22	125,00	2,00	0,33	3,987	3,850	3,859	3,899	17,109	18,113	19,078	18,100
23	125,00	1,10	0,16	2,499	2,490	2,476	2,488	10,836	11,436	11,506	11,259
24	190,00	1,55	0,25	3,065	3,079	3,059	3,068	13,184	14,534	14,520	14,079
25	190,00	1,55	0,39	5,023	4,663	4,369	4,685	23,162	22,851	22,752	22,922
26	190,00	0,79	0,25	4,786	4,808	4,817	4,804	18,592	18,987	19,375	18,985
27	190,00	2,31	0,25	3,360	3,268	3,347	3,325	16,629	17,267	16,956	16,951
28	190,00	1,55	0,10	1,211	1,287	1,268	1,255	5,890	6,309	6,374	6,191
29	299,32	1,55	0,25	3,054	2,949	2,970	2,991	14,504	13,660	13,859	14,008
30	190,00	1,55	0,25	3,284	3,329	3,333	3,315	16,112	16,301	14,857	15,757
31	190,00	1,55	0,25	2,939	2,673	2,722	2,778	12,792	12,566	13,106	12,821
32	255,00	1,10	0,33	5,718	5,764	5,741	5,741	26,141	26,162	26,217	26,173
33	255,00	2,00	0,33	4,235	4,240	4,225	4,233	18,341	18,246	18,099	18,229
34	255,00	2,00	0,16	2,292	2,273	2,269	2,278	11,075	10,968	10,952	10,998
35	190,00	1,55	0,39	6,773	6,800	6,717	6,763	30,726	27,323	26,730	28,260
36	125,00	2,00	0,33	4,690	4,550	4,464	4,568	23,223	20,360	19,938	21,174
37	125,00	2,00	0,16	1,571	1,576	1,580	1,576	8,197	8,553	8,516	8,422
38	190,00	1,55	0,25	3,048	3,261	3,312	3,207	14,174	14,576	15,685	14,812
39	190,00	1,55	0,25	3,437	3,530	3,535	3,501	15,594	15,453	15,496	15,514
40	190,00	1,55	0,25	2,911	2,905	2,907	2,908	15,193	15,103	15,113	15,136

Body experimentálneho priestoru, v ktorých bolo realizované meranie drsností Ra a Rz sú zobrazené na obr. 171.



Obr. 1 Zobrazenie experimentálneho priestoru s bodmi, v ktorých realizujeme meranie pri centrálnom kompozitnom pláne pre tri faktory

Každý faktor bol meraný na 5 úrovniach, viď tabuľka 7, kde $\alpha = 1,68179$.

Tabuľka 7 Vstupné nezávislé faktory a ich úrovne					
Faktory	v kódovaných jednotkách				
	$-\alpha$	-1	0	1	α
	v pôvodných jednotkách				
A _{vc} [m.min ⁻¹]	80,68	125	190	255	299,32
B _{ap} [mm]	0,79	1,1	1,55	2	2,31
C _{fn} [mm.ot ⁻¹]	0,1	0,16	0,25	0,33	0,39

Poznámka: Hodnota α pre CCD pre viac ako jeden faktor závisí od počtu faktorov a typu dizajnu (či má byť **rotabilný** alebo nie). Pre požadovanú rotabilitu pri troch faktoroch sa α vypočíta podľa vzorca $\alpha = (\text{počet faktorových bodov})^{1/4}$. Pre 3 faktory je počet faktorových bodov rovný 2^3 , preto $\alpha = \sqrt[4]{8} = 1,68179$.

Pri plánovaní experimentu je častokrát potrebné z dôvodu realizovateľnosti merania zohľadniť, že pôvodne uvažované hranice intervalov faktorov budú po kódovaní zodpovedať intervalu $(-\alpha; \alpha)$, preto je potrebné dopočítať reálne súradnice faktorových bodov, ktoré sú vyjadrené v kódovaných hodnotách pomocou ± 1 . Napríklad pre reznú rýchlosť, t. j. pre faktor A_{vc}, vypočítame súradnice faktorových bodov nasledovným spôsobom:

$$\begin{array}{ccccccc}
 -\alpha & -1 & & 0 & & 1 & \alpha \\
 | & | & & | & & | & | \\
 \hline
 80 & x_1 & & 190 & & x_2 & 300
 \end{array}$$

Pre reznú rýchlosť v_c platí $\frac{\alpha}{1} = \frac{300-190}{x_2-190} \Rightarrow x_2 \doteq 255 \Rightarrow x_1 = 190 - 65 = 125$

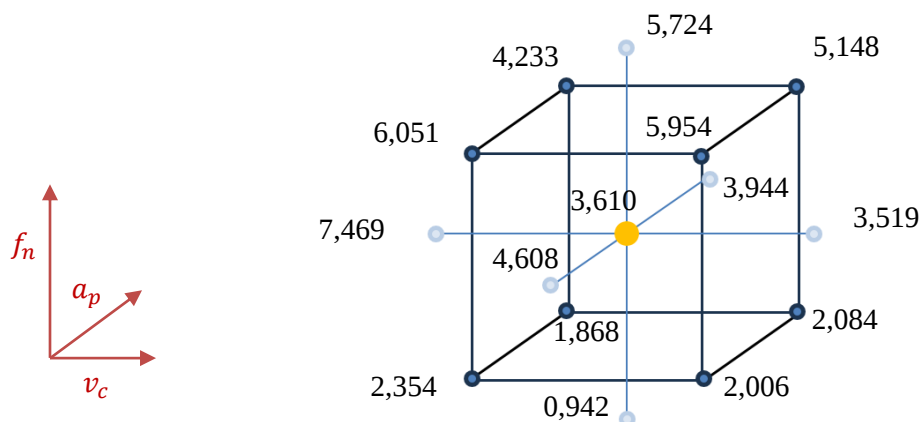
Pôvodné nami určené hranice intervalu pre reznú rýchlosť (80;300) v m/min následne korigujeme pre $\alpha = 1,68179$ na interval (80,68;299,32) v m/min.

Rovnakým spôsobom postupujeme aj pri výpočtoch súradníc pre zvyšné dva faktory B a C:

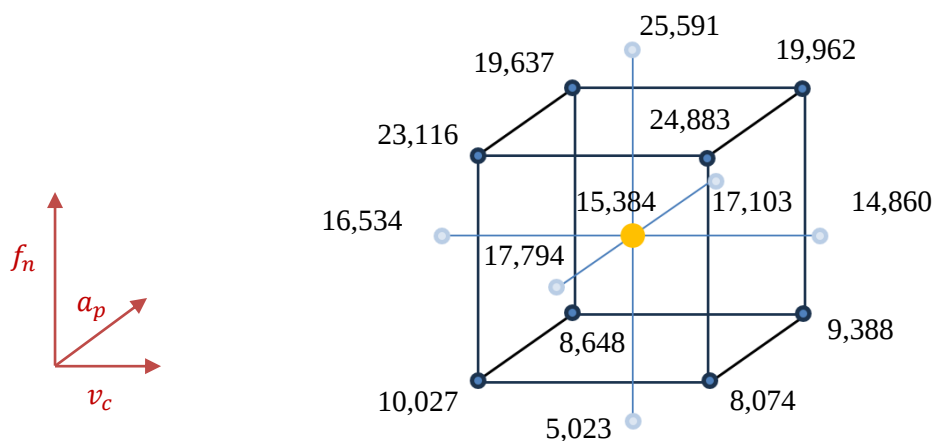
Pre hĺbku rezu a_p platí $\frac{\alpha}{1} = \frac{2,31-1,55}{x_2-1,55} \Rightarrow x_2 \doteq 2 \Rightarrow x_1 = 1,55 - 0,45 = 1,1$

Pre posuv f_n platí $\frac{\alpha}{1} = \frac{0,39-0,25}{x_2-0,25} \Rightarrow x_2 \doteq 0,33 \Rightarrow x_1 = 0,25 - 0,08 = 0,16$

Cplot na obr. 172 a 173 s vypočítanou priemernou nameranou hodnotou odozvy v jednotlivých experimentálnych bodoch poskytuje vizuálnu predstavu o výsledkoch experimentu vzhľadom na zvolené kombinácie úrovní faktorov.



Obr. 2 Grafické znázornenie priemerných nameraných hodnôt odozvy drsnosti R_a v jednotlivých experimentálnych bodoch pri experimente CCD s tromi faktormi



Obr. 3 Grafické znázornenie priemerných nameraných hodnôt odozvy drsnosti R_z v jednotlivých experimentálnych bodoch pri experimente CCD s tromi faktormi

Vzhľadom na súčasne sledované dve odozvy – drsnosť povrchu R_a a R_z je potrebné vyhodnocovať namerané výsledky samostatne pre každú z nich.

Analýza výsledkov pre odozvu R_a

Hierarchický model a identifikácia štatistickej významnosti lineárneho a kvadratického vplyvu skúmaných faktorov a ich interakcií

Centrálny kompozitný plán CCD je prioritne zameraný na hľadanie úplného kvadratického regresného modelu, prostredníctvom ktorého hľadáme optimálne riešenie. Pri výpočte v Exceli je potrebné pôvodné úrovne faktorov zapísať v kódovaných jednotkách.

Nekódované jednotky neumožňujú správne štatistické vyhodnotenie. V analytických nástrojoch (*Data*→*Data analysis*→*Regression*) musí byť ako „nezávislá premenná“ X zapísaná súvislá oblasť, ktorá obsahuje stĺpce predstavujúce všetky členy, ktoré majú v regresnom modeli vystupovať, t. j. členy predstavujúce lineárny aj kvadratický vplyv faktorov a ich uvažované interakcie. Všetky kombinácie úrovní musia byť vyjadrené v kódovaných jednotkách. Korektný spôsob zápisu je na obr. 174 a 175. Význam jednotlivých stĺpcov je popísaný v prvom riadku. Stĺpce A, B, C s úrovňami faktorov predstavujú lineárny vplyv faktorov, stĺpce D, E, F kvadratický vplyv faktorov, stĺpce G, H, I interakcie faktorov.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	vc	ap	fn	vc*vc	ap*ap	fn*fn	vc*ap	vc*fn	ap*fn	drsnosť Ra	drsnosť Rz
2	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	2,125	8,525
3	1	-1	1	1	1	1	-1	1	-1	6,167	23,593
4	0	1,68179	0	0	2,82842712	0	0	0	0	4,563	17,254
5	-1,68179	0	0	2,8284271	0	0	0	0	0	4,415	16,814
6	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	2,220	8,795
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	6,062	21,695
8	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	6,049	22,442
9	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	6,052	23,791
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4,279	16,179
11	0	-1,68179	0	0	2,82842712	0	0	0	0	4,412	16,602
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4,465	15,929
13	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1,886	7,622
14	0	0	-1,68179	0	0	2,82843	0	0	0	0,628	3,855
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4,391	16,538
16	1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1,889	7,778
17	1,68179	0	0	2,8284271	0	0	0	0	0	4,207	15,713
18	-1	1	-1	1	1	1	-1	1	-1	2,160	8,873
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4,407	16,416
20	-1,68179	0	0	2,8284271	0	0	0	0	0	4,284	16,254
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4,387	16,505
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,615	14,924
23	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	1	3,899	18,100
24	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	2,488	11,259
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3,068	14,079
26	0	0	1,68179	0	0	2,82843	0	0	0	4,685	22,922
27	0	-1,68179	0	0	2,82842712	0	0	0	0	4,804	18,985
28	0	1,68179	0	0	2,82842712	0	0	0	0	3,325	16,951
29	0	0	-1,68179	0	0	2,82843	0	0	0	1,255	6,191
30	1,68179	0	0	2,8284271	0	0	0	0	0	2,991	14,008
31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3,315	15,757
32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,778	12,821
33	1	-1	1	1	1	1	-1	1	-1	5,741	26,173
34	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4,233	18,229
35	1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	2,278	10,998
36	0	0	1,68179	0	0	2,82843	0	0	0	6,763	28,260
37	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	1	4,568	21,174
38	-1	1	-1	1	1	1	-1	1	-1	1,576	8,422
39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3,207	14,812
40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3,501	15,514
41	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,908	15,136

Obr. 4 Zadávanie kombinácií úrovní faktorov, v ktorých bolo realizované meranie odoziev pre CCD musí byť v Exceli doplnené fiktívnymi premennými, ktoré predstavujú členy regresného modelu

Ako odozva Y
je zvolený iba
stĺpec
s nameranými
hodnotami
drsnosti Ra

Ako nezávislá
premenná X je
zvolená súvislá
oblasť v
stĺpcoch A až I

Obr. 5 Zadávanie vstupných údajov použité pri regresnej analýze s viacerými vstupnými parametrami v dialógovom okne v Exceli

Výstup regresnej analýzy v Exceli je na obr. 176. Môžeme ho rozdeliť do troch častí.

Regression Statistics						
Multiple R	0,91834185					
R Square	0,84335175					
Adjusted R Square	0,79635727					
Standard Error	0,66774436					
Observations	40					
ANOVA						
	df	SS	MS	F	Significance F	
Regression	9	72,01532343	8,0017026	17,94576363	8,77805E-10	
Residual	30	13,37647609	0,44588254			
Total	39	85,39179953				
	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%
Intercept	3,61524662	0,192572327	18,7734483	3,93261E-18	3,221961466	4,00853178
vc	-0,04226565	0,127767353	-0,33080164	0,743093745	-0,303201395	0,2186701
ap	-0,30372293	0,127767353	-2,37715604	0,024023043	-0,564658679	-0,04278719
fn	1,54629147	0,127767353	12,1023989	4,51139E-13	1,285355726	1,80722722
vc*vc	0,09423727	0,124378065	0,75766795	0,454560446	-0,159776622	0,34825117
ap*ap	0,2007747	0,124378065	1,61422913	0,116948346	-0,053239201	0,45478859
fn*fn	-0,13256723	0,124378065	-1,06584088	0,294998748	-0,386581123	0,12144667
vc*ap	0,19692708	0,166936091	1,17965553	0,247407674	-0,144001898	0,53785606
vc*fn	0,11871875	0,166936091	0,71116287	0,482476537	-0,222210231	0,45964773
ap*fn	-0,27690625	0,166936091	-1,65875604	0,107585677	-0,617835231	0,06402273

Obr. 6 Výstup regresnej analýzy v Exceli

Z prvej časti výstupu Excelu z tabuľky so všeobecnými štatistikami vyplýva údaj, že regresný model dokáže vysvetliť 84,34% variability nameraných hodnôt odozvy drsnosti R_a , 15,66% variability meraných dát zostalo modelom nevysvetlených. Upravený index determinácie sa výrazne od $R^2 = 84,34\%$ nelíši, je rovný 79,64%. Štandardná chyba, ktorej sme sa dopustili je 0,67, pozorovaných (vyhodnocovaných) hodnôt bolo 40.

Tabuľka ANOVA v druhej časti poskytuje informácie o sume štvorcov odchýlok od celkového priemeru - a to celkovej, vysvetlenej aj nevysvetlenej regresným modelom s predpisom $f_t(t_1, t_2, t_3) = b_0 + b_1t_1 + b_2t_2 + b_3t_3 + b_{11}t_1^2 + b_{22}t_2^2 + b_{33}t_3^2 + b_{12}t_1t_2 + b_{13}t_1t_3 + b_{23}t_2t_3$. Z podielu rozptylu vysvetleného a nevysvetleného regresným modelom je vypočítaná realizácia testovacej štatistiky pre celkový F-test o štatistickej významnosti regresného modelu $F_0 = 17,95$. Vzhľadom na kvantil $F_{9,30}^{kv}(0,95) = 2,21$ a kritickú oblasť $W = (2,21; \infty)$, do ktorej realizácia testovacej štatistiky F_0 nepatrí a rovnako podľa p-hodnoty $= 8,78 \cdot 10^{-10}$ možno na hladine významnosti 0,05 prijať záver, že nájdený regresný model je signifikantný.

Z tretej časti tabuľky s údajmi týkajúcimi sa regresných koeficientov možno napríklad podľa p-hodnoty zodpovedajúcej jednotlivým regresným koeficientom rozhodnúť, že pre drsnosť R_a bude na hladine významnosti 0,05 signifikantný iba lineárny vplyv faktora B hĺbka rezu a_p a faktora C posun f_n . K rovnakým záverom dospejeme porovnaním 95%-ných intervalov spoľahlivosti pre jednotlivé regresné koeficienty.

Rovnaký záver, týkajúci sa kvality regresného modelu, vyplýva aj z výstupu softvéru Minitab. Index determinácie $R^2 = 84,34\%$, upravený index determinácie $adj R^2 = 79,64\%$, ale tiež prediktívny index determinácie $pred R^2 = 72,91\%$, vyjadrujú kvalitu regresného modelu, vid'. obr. 177.

Model Summary

S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)
0,667744	84,34%	79,64%	72,91%

Obr. 7 Kvalita modelu vyjadrená pomocou rôznych R square v Minitabe

Tabuľka s bodovými odhadmi koeficientov úplného kvadratického regresného modelu v Minitabe na obr. 178 poskytuje realizácie testovacích štatistík t-testov štatistickej významnosti regresných koeficientov, p-hodnoty a faktor VIF. Bodové odhady $\hat{b}$ koeficientov

transformovanej regresnej funkcie pre úplný kvadratický regresný model s predpisom $f_t(t_1, t_2, t_3) = b_0 + b_1t_1 + b_2t_2 + b_3t_3 + b_{11}t_1^2 + b_{22}t_2^2 + b_{33}t_3^2 + b_{12}t_1t_2 + b_{13}t_1t_3 + b_{23}t_2t_3$ sú: $\hat{b}_0 = 3,615$, $\hat{b}_1 = -0,042$, $\hat{b}_2 = -0,304$, $\hat{b}_3 = 1,546$, $\hat{b}_{11} = 0,094$, $\hat{b}_{22} = 0,201$, $\hat{b}_{33} = -0,133$, $\hat{b}_{12} = 0,197$, $\hat{b}_{13} = 0,119$, $\hat{b}_{23} = -0,277$.

Faktor VIF má hodnoty rovné alebo veľmi blízke 1, čo hovorí, že medzi skúmanými faktormi nie je prítomná korelácia.

Pri rozhodovaní o ďalšom ponechaní, resp. vylúčení faktorov v ďalšom skúmaní môžeme napríklad pomocou p-hodnoty v stĺpci *P-Value* identifikovať, ktoré koeficienty, a tým aj ktoré členy modelu v ňom majú zostať a ktoré môžeme vylúčiť. Rozhodneme, ktorý lineárny a ktorý kvadratický vplyv faktora či interakcie faktorov sú, či nie sú štatisticky významné (signifikantné) vzhľadom na skúmanú drsnosť Ra. V našom prípade možno na hladine významnosti 0,05 ponechať v ďalšom skúmaní iba faktory hĺbka rezu a_p a posuv f_n , pretože ich p-hodnota je menšia ako nami zvolené $\alpha = 0,05$, obr.178. Po vylúčení nevýznamných členov z pôvodného regresného modelu dostaneme regresný model, ktorý spĺňa vlastnosť hierarchie.

Coded Coefficients

Term	Coef	SE Coef	T-Value	P-Value	VIF
Constant	3,615	0,193	18,77	0,000	
vc	-0,042	0,128	-0,33	0,743	1,00
ap	-0,304	0,128	-2,38	0,024	1,00
fn	1,546	0,128	12,10	0,000	1,00
vc*vc	0,094	0,124	0,76	0,455	1,02
ap*ap	0,201	0,124	1,61	0,117	1,02
fn*fn	-0,133	0,124	-1,07	0,295	1,02
vc*ap	0,197	0,167	1,18	0,247	1,00
vc*fn	0,119	0,167	0,71	0,482	1,00
ap*fn	-0,277	0,167	-1,66	0,108	1,00

Obr. 8 Výstup Minitabu obsahujúci bodové odhady koeficientov regresného modelu s výsledkami t-testu ich štatistickej významnosti

K rovnakým záverom sa dostaneme aj z časti tabuľky ANOVA na obr. 179. Je rozšírenou verziou ANOVY v Exceli, pretože vysvetlenú variabilitu dát v rámci regresného modelu Minitab rozdeľuje na lineárnu a kvadratickú zložku a na časť predstavujúcu interakcie druhého rádu. Vzhľadom na to, že daná zložka rozptylov je vždy porovnávaná s reziduálnym rozptylom $\text{Adj MS} = 0,4459$, umožňuje rozhodnúť, ktorú zložku regresného modelu možno považovať za signifikantnú. Z porovnania p-hodnoty s hladinou významnosti $\alpha = 0,05$ v modeli ponechávame ako štatisticky významnú iba lineárnu zložku regresného modelu.

V rámci nej je možné z modelu vylúčiť ako nevýznamný lineárny vplyv faktora rezná rýchlosť v_c s p-hodnotou 0,743. V regresnom modeli ponechávame iba faktory hĺbka rezu a_p a posuv f_n .

Analysis of Variance

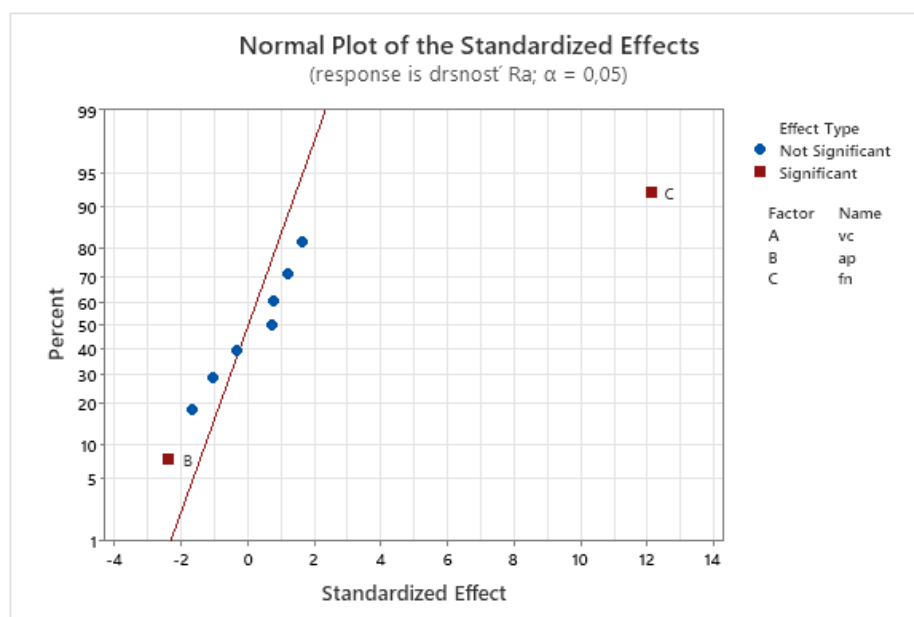
Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	9	72,0153	8,0017	17,95	0,000
Linear	3	67,8760	22,6253	50,74	0,000
vc	1	0,0488	0,0488	0,11	0,743
ap	1	2,5196	2,5196	5,65	0,024
fn	1	65,3075	65,3075	146,47	0,000
Square	3	2,0665	0,6888	1,54	0,223
vc*vc	1	0,2560	0,2560	0,57	0,455
ap*ap	1	1,1619	1,1619	2,61	0,117
fn*fn	1	0,5065	0,5065	1,14	0,295
2-Way Interaction	3	2,0728	0,6909	1,55	0,222
vc*ap	1	0,6205	0,6205	1,39	0,247
vc*fn	1	0,2255	0,2255	0,51	0,482
ap*fn	1	1,2268	1,2268	2,75	0,108
Error	30	13,3765	0,4459		
Lack-of-Fit	5	1,3725	0,2745	0,57	0,721
Pure Error	25	12,0040	0,4802		
Total	39	85,3918			

Vplyv faktora v_c možno v rámci lineárnej zložky regresného modelu považovať za štatisticky nevýznamný; vplyv faktorov a_p a f_n za štatisticky významný.

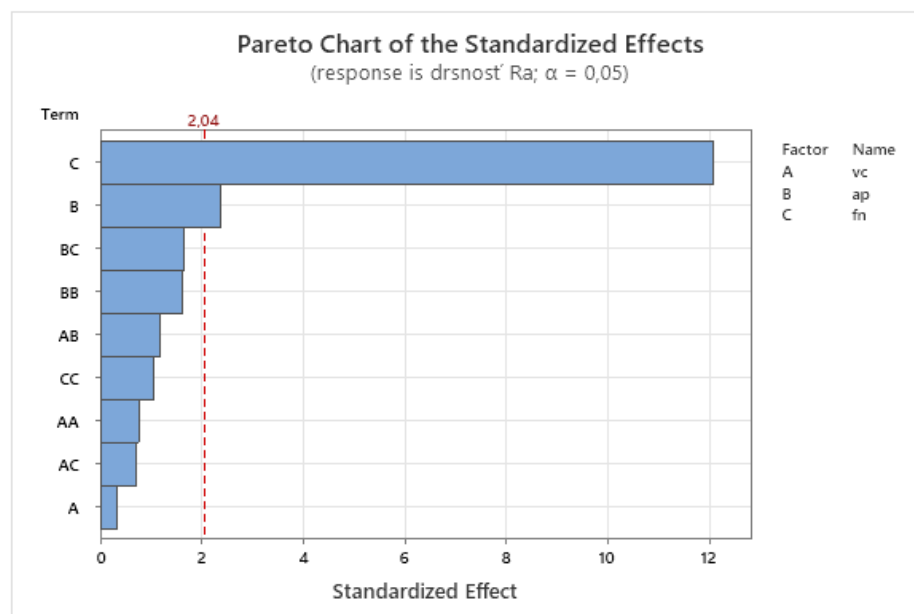
Časť týkajúca sa testu Lack of fit

Obr. 9 Tabuľka ANOVA, ktorá je súčasťou výstupu analýzy CCD v Minitabe

Uvedené rozhodnutie potvrdzuje normálny pravdepodobnostný graf efektov, kde je označený ako signifikantný samostatný vplyv faktorov B a C na obr. 180. To isté ukazuje Pareto graf na obr. 181, v ktorom iba efekty faktorov B a C presiahli kritickú hodnotu 2,04.

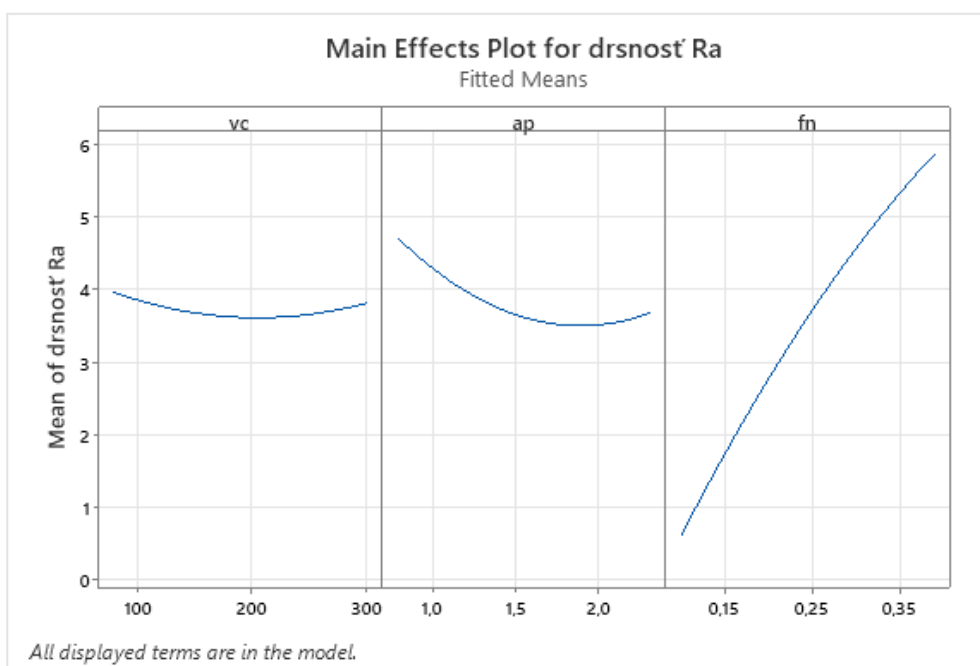


Obr. 10 Normálny pravdepodobnostný graf v Minitabe rozdeľuje vplyv faktorov a ich interakcií na signifikantný a nesignifikantný



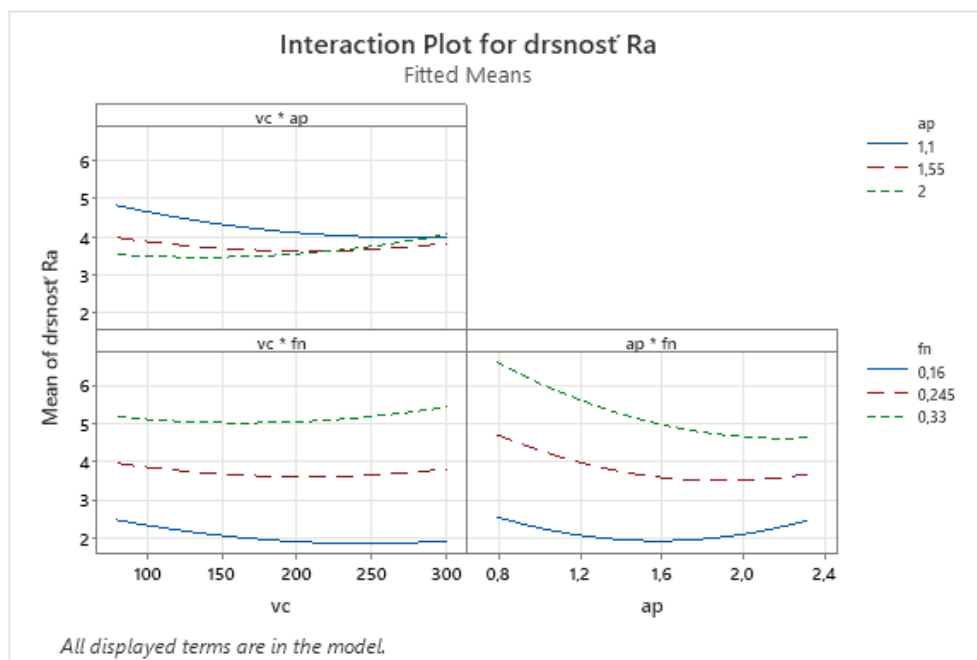
Obr. 11 Pareto graf v Minitabe porovnáva veľkosti efektov

Grafy hlavných efektov na obr. 182 nie sú zobrazené ako úsečky, ale ako krivky alebo lomené čiary, pretože hodnoty odozvy boli merané na viacerých (piatich) úrovniach každého faktora. Z porovnania kriviek vidieť, že najmenší sklon má krivka pri faktore A__{rezná rýchlosť} v_c , t. j. najmenší vplyv na drsnosť Ra pri zanedbaní vplyvu interakcie má rezná rýchlosť v_c . Hlavný efekt faktora B__{hlbka rezu} a_p je negatívny a hlavný efekt faktora C__{posuv} f_n je pozitívny, pričom pri zanedbaní interakcie medzi faktormi možno považovať vplyv faktora C__{posuv} f_n na odozvu Ra za najväčší.



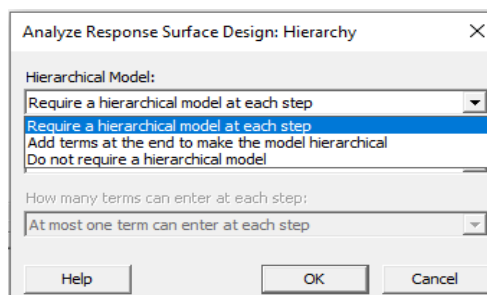
Obr. 12 Grafy hlavných efektov v Minitabe

Grafy interakcie faktorov z výstupu Minitabu sú na obr. 183. Uvedené krivky možno s výnimkou krivky faktora v_c pre $a_p = 2$ považovať za takmer rovnobežné, preto neočakávame, že interakcia medzi skúmanými faktormi bude signifikantná.

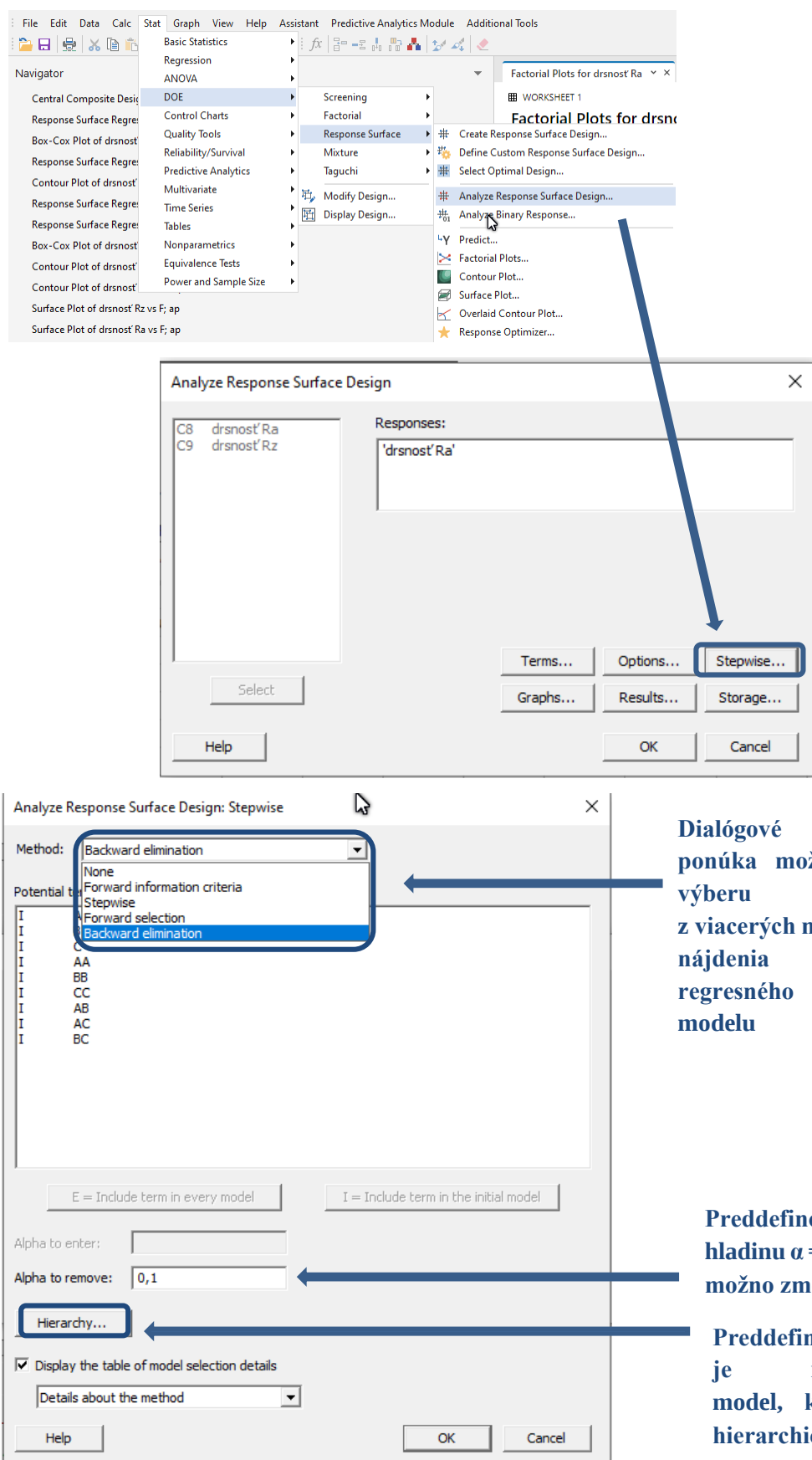


Obr. 13 Grafy interakcie faktorov v Minitabe

V prípade, že chceme z regresného modelu vylúčiť štatisticky nevýznamné (nesignifikantné) členy pomocou softvéru Minitab, môžeme to urobiť ručne v časti Terms, alebo volíme metódu postupnej spätnej eliminácie (Backward elimination), kedy softvér postupne s prepočítaním všetkých hodnôt štatistickej významnosti v každom kroku z regresného modelu vylúči štatisticky nevýznamné členy na zvolenej hladine významnosti α . Preddefinovaná je hodnota $\alpha = 0,01$, ktorá zabezpečuje dostatočnú robustnosť, v princípe je možné túto hodnotu α zmeniť, napr. môžeme zvoliť $\alpha = 0,05$. Postup spustenia spätnej eliminačnej metódy v Minitabe je naznačený na obr. 184. Pri opätovnom spustení analýzy Response Surface Design v časti Stepwise volíme Backward elimination. Softvér nájde regresný model, ktorý je hierarchický, obr. 185.



Obr. 14 Preddefinovaná vlastnosť hierarchie pri hľadaní regresného modelu



Obr. 15 Postup spustenia spätnej eliminačnej metódy pri hľadaní hierarchického modelu v softvéri Minitab

Výstup Minitabu po spustení spätnej eliminačnej metódy vypíše všetky členy, ktoré v regresnom modeli zostali po vylúčení štatisticky nevýznamných členov pri dodržaní hierarchie regresného modelu, obr. 186.

Backward Elimination of Terms

α to remove = 0,05

Coded Coefficients

Term	Coef	SE Coef	T-Value	P-Value	VIF
Constant	3,726	0,109	34,20	0,000	
ap	-0,304	0,132	-2,30	0,027	1,00
fn	1,546	0,132	11,73	0,000	1,00

Obr. 16 Výstup spätnej eliminačnej metódy po vylúčení štatisticky nevýznamných členov v Minitabe

Obr. 187 zobrazuje kvalitu nového regresného modelu podľa rôznych R^2 . Vidíme, že rozdiely medzi týmito charakteristikami sa v porovnaní s modelom, ktorý obsahoval i nevýznamné členy, zmenšili. Nový regresný model vie vysvetliť 79,43% nameraných hodnôt drsnosti R_a . Je zrejmé, že podiel vysvetlenej variability meranej odozvy bude v porovnaní s pôvodným regresným modelom menší vzhľadom na menší počet členov regresného modelu. Pozitívne hodnotíme, že rozdiel medzi indexom determinácie a upraveným indexom determinácie sa zmenšil. Schopnosť regresného modelu predikovať hodnoty odozvy sa v porovnaní s pôvodným regresným modelom zväčšila.

Model Summary

S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)
0,688999	79,43%	78,32%	75,72%

Obr. 17 Kvalita regresného modelu po vylúčení štatisticky nevýznamných členov v Minitabe

Štatistickú významnosť jednotlivých členov nového regresného modelu vidíme na obr. 186 i v tabuľke ANOVA na obr. 188. V časti tabuľky 186, ktorá obsahuje bodové odhady kódovaných koeficientov, sú vypočítané hodnoty, ktoré súvisia s t-testom štatistickej významnosti regresných koeficientov (testujeme „nulovosť“ regresných koeficientov pri a_p a f_n). Výstupom ANOVY na obr.188, ktorá analyzuje zložky rozptylu, sú realizácie F testu dodatočného príspevku k -tej vysvetľujúcej premennej a im prislúchajúce p-hodnoty, ktoré sa zhodujú s výsledkom t-testov štatistickej významnosti daných regresných koeficientov. Realizácia testovacej štatistiky F_0 pre celkový F test

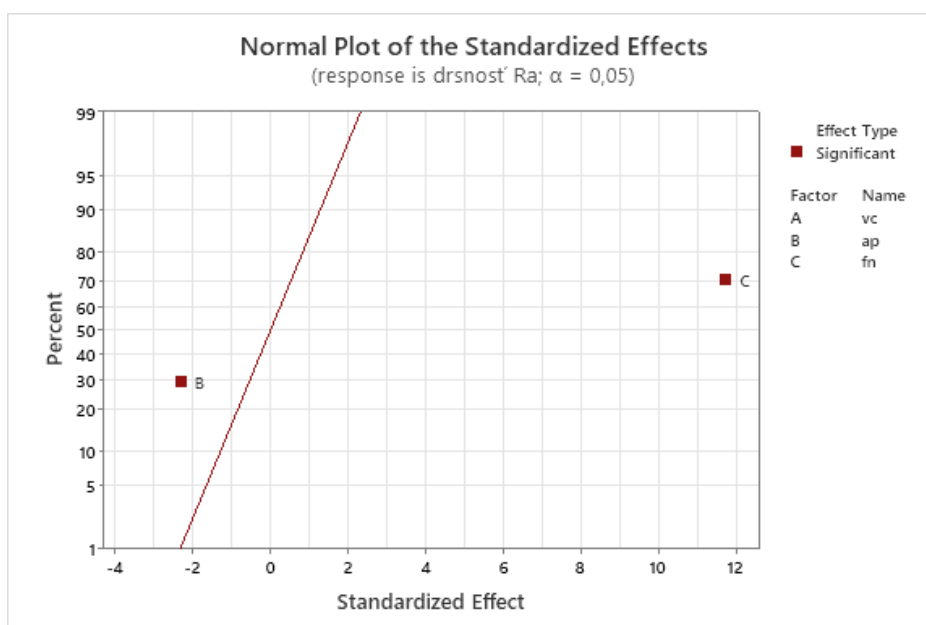
štatistickej významnosti regresného modelu 71,44 leží v kritickej oblasti ($F_{2,37}^{kv}(1 - \alpha); \infty$) a rovnako p-hodnota = 0,000 je menšia ako zvolené α , preto možno považovať nájdený regresný model za štatisticky významný na danej hladine významnosti. Súčasťou tabuľky ANOVA je aj test Lack of Fit, na základe ktorého možno vzhľadom na p-hodnotu rovnú 0,505 považovať regresný model za dostatočný.

Analysis of Variance

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	2	67,827	33,9136	71,44	0,000
Linear	2	67,827	33,9136	71,44	0,000
ap	1	2,520	2,5196	5,31	0,027
fn	1	65,308	65,3075	137,57	0,000
Error	37	17,565	0,4747		
Lack-of-Fit	12	5,561	0,4634	0,97	0,505
Pure Error	25	12,004	0,4802		
Total	39	85,392			

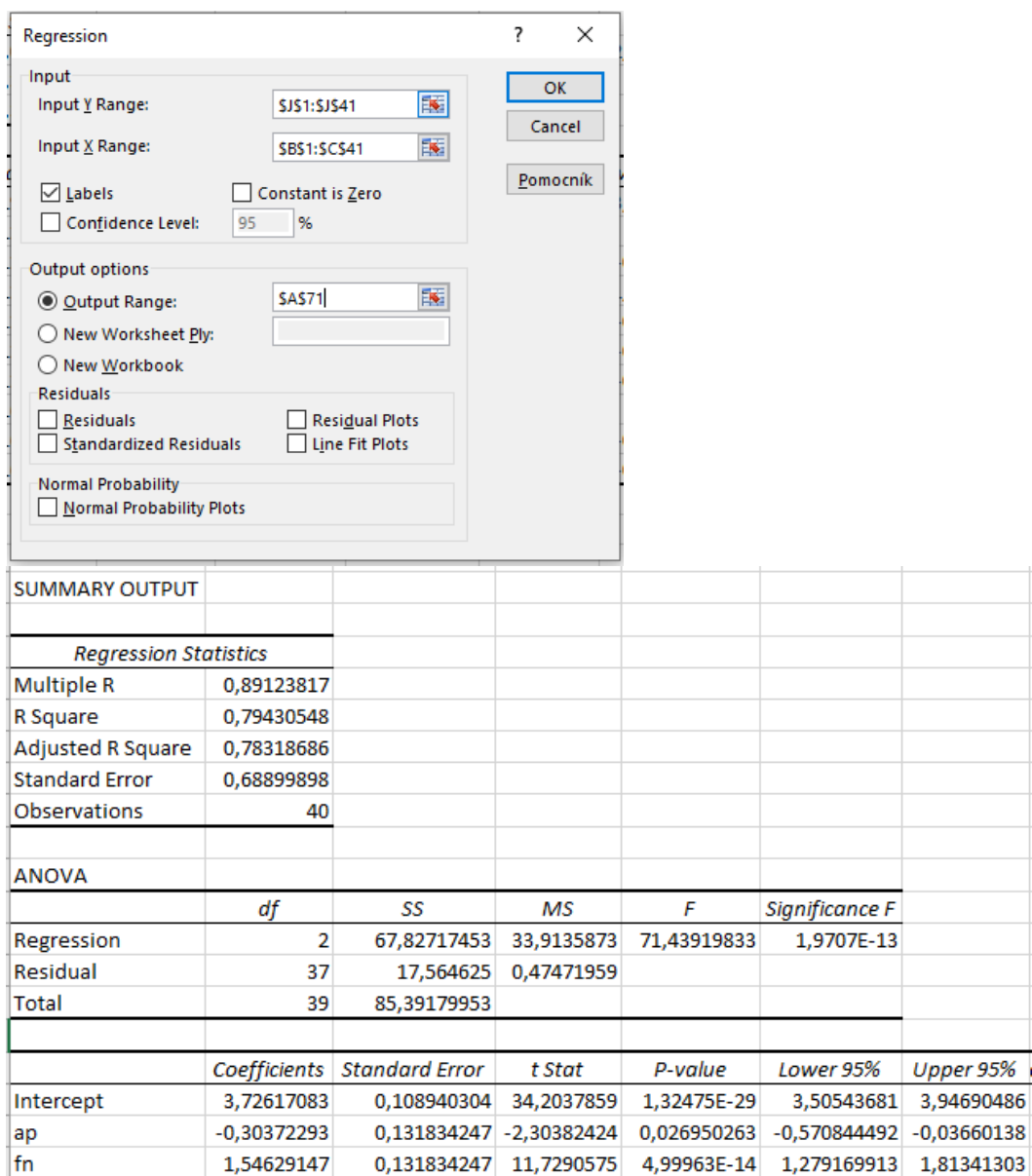
Obr. 18 ANOVA pre regresný model získaný po vylúčení štatisticky nevýznamných členov

Štatistickú významnosť vplyvu ponechaných faktorov na odozvu ukazuje aj normálny pravdepodobnostný graf pre standardizované efekty. Vplyv ponechaných faktorov B_hĺbka rezu a_p a C_posuv f_n je podľa tohto grafu signifikantný.



Obr. 19 Normálny pravdepodobnostný graf efektov s ponechanými členmi hierarchického regresného modelu

Postup riešenia s výstupom v Exceli naznačuje obr. 190. Po vylúčení štatisticky nevýznamných členov regresného modelu, analýza dát musí byť opätovne spustená. Ako nezávislá premenná X sú označené iba susedné stĺpce B a C, v ktorých sú zapísané kombinácie úrovni faktorov B – hĺbka rezu a_p a C – posuv f_n , ku ktorým bola nameraná zodpovedajúca drsnosť R_a . Výstup regresnej analýzy v Exceli je totožný s výstupom v Minitabe.



Obr. 20 Spustenie a výstup regresnej analýzy v Exceli po vylúčení štatisticky nevýznamných členov

Bodový odhad transformovanej lineárnej regresnej funkcie $\hat{f}_t(t_2, t_3)$, ktorú dostaneme po vylúčení štatisticky nevýznamných členov je

$$(\hat{f}_L)_t(t_1, t_3) = 3,73 - 0,30t_2 + 1,55t_3$$

Odtiaľ bodový odhad lineárnej regresnej funkcie $\hat{f}(x_2, x_3)$ v neupravenom tvare po spätnom dosadení transformačných vzťahov pre ponechané faktory bude:

$$\hat{f}_L(x_2, x_3) = 3,73 - 0,30 \frac{x_2 - 1,55}{0,9} + 1,55 \frac{x_3 - 0,25}{0,085}$$

Po úprave

$$\hat{f}_L(x_2, x_3) = -0,312 - 0,333x_2 + 18,235x_3$$

Testovanie hypotéz

Ďalšia časť je zameraná na výpočet riešenia vybraných testov hypotéz. Uvádzaný je podrobný postup pri zvolenom teste hypotézy spolu s jeho grafickým riešením.

Individuálne t-testy štatistickej významnosti regresných koeficientov

Ak chceme napríklad otestovať, či má hĺbka rezu a_p výrazný vplyv na drsnosť R_a , môžeme použiť individuálny t -test štatistickej významnosti regresných koeficientov. Volíme ľubovoľnú malú chybu I. druhu α , ktorej sa môžeme dopustiť pri vyhodnocovaní hypotéz, najčastejšie $\alpha = 0,05$. Na zvolenej hladine významnosti 5% chceme otestovať, či je vplyv samostatného pôsobenia faktora x_2 – hĺbka rezu a_p na hodnotu lineárnej regresnej funkcie $f(x_2, x_3) = b_0 + b_2x_2 + b_3x_3$ štatisticky významný.

Pri testovaní používame kódované hodnoty, resp. transformovanú lineárnu regresnú funkciu, preto samostatné pôsobenie faktora x_2 na hodnotu $f(x_2, x_3)$ vyhodnocujeme ako samostatné pôsobenie transformovaného faktora t_2 na hodnotu $f_t(t_2, t_3) = b_0 + b_2t_2 + b_3t_3$. Samostatné pôsobenie transformovaného faktora t_2 testujeme pomocou koeficientu b_2 , ktorý pri ňom stojí. Nulová hypotéza H_0 hovorí, že regresný koeficient b_2 nie je štatisticky významný, oproti stojí obojstranná alternatívna hypotéza H_1 , ktorá hovorí, že regresný koeficient b_2 je štatisticky významný: $H_0: b_2 = 0 \leq H_1: b_2 \neq 0$.

Z výstupu Excelu na obr.191 použijeme riadok, v ktorom sa nachádzajú údaje súvisiace s koeficientom b_2 , ktorý stojí pri faktore a_p vyjadrenom v kódovaných jednotkách.

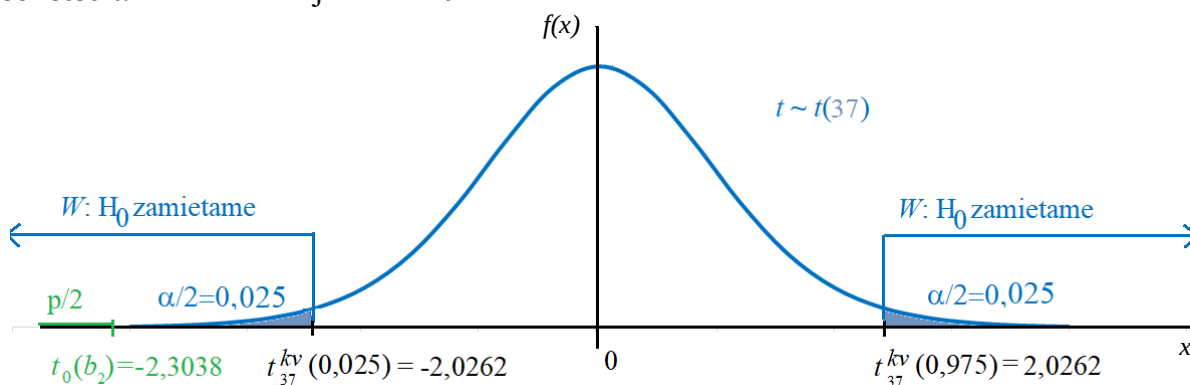
	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%
Intercept	3,72617083	0,108940304	34,2037859	1,32475E-29	3,50543681	3,94690486
ap	-0,30372293	0,131834247	-2,30382424	0,026950263	-0,570844492	-0,03660138
fn	1,54629147	0,131834247	11,7290575	4,99963E-14	1,279169913	1,81341303

Obr. 21 Tabuľka s bodovými odhadmi koeficientov a im prislúchajúcimi hodnotami

Testovacia štatistika $t(b_2) = \frac{\hat{b}_2}{SE(b_2)} \sim t(n - k - 1)$, kde $\hat{b}_2$ je bodový odhad regresného koeficientu b_2 : $\hat{b}_2 = -0,30372293$, $SE(b_2) = 0,131834247$ je štandardná chyba tohto odhadu, $n = 40$ je celkový počet nameraných hodnôt, $k = 2$ je počet členov testovaného regresného modelu (máme dva lineárne členy $b_2 t_2$ a $b_3 t_3$). Odtiaľ $n - k - 1 = 40 - 2 - 1 = 37$ je parameter Studentovho t-rozdelenia, ktorým sa riadi naša testovacia štatistika. Zápis $t(b_i) \sim t(37)$ čítame: testovacie štatistiky pre koeficienty b_i majú Studentovo rozdelenie s 37 stupňami voľnosti.

Na základe analyzovaných údajov vypočítaná hodnota testovacej štatistiky pre regresný koeficient b_2 , t. j. realizácia testovacej štatistiky $t_0(b_2) = \frac{-0,30372293}{0,131834247} \doteq -2,30382424$. Túto hodnotu nájdeme v stĺpci *t Stat* v tabuľke na obr. 191.

Vizuálnu predstavu o rozdelení testovacej štatistiky $t(b_2)$ o umiestnení hodnoty testovacej štatistiky t_0 vzhľadom na kritickú oblasť W zamietnutia nulovej hypotézy H_0 , ktorú sme určili podľa zvolenej hladiny významnosti α , o veľkosti p-hodnoty v porovnaní s hodnotou α dáva nasledujúci obr. 192.



Obr. 22 Grafické riešenie pre testovanie hypotézy o koeficiente b_2

O výsledku testu hypotéz rozhodujeme 3 spôsobmi, pričom vždy musíme dostať rovnaký záver:

- Pomocou kritickej oblasti (kritického oboru) $W = (-\infty; -2,0262) \cup (2,0262, \infty)$, kde pre obojstrannú alternatívu určíme kritickú hodnotu pomocou kvantilu $t_{n-k-1}^{kv}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$, t. j. vypočítame 97,5% kvantil $t_{37}^{kv}(0,975) = T.INV(0,975; 37) = 2,0261925$.
 - možnosť vyhodnotenia – geometricky – porovnaním vzdialenosti od 0 pomocou absolútnej hodnoty: $|t_0(b_2)| = |-2,3038| > t_{37}^{kv}(0,975)$ alebo
 - možnosť vyhodnotenia: ak vypočítaná hodnota testovacej štatistiky padla do kritickej oblasti W , potom nulovú hypotézu H_0 zamietame, ak hodnota testovacej štatistiky

do kritickej oblasti W nepadla, potom H_0 nezamietame. Nakoľko realizácia testovacej štatistiky $t_0(b_1) = -2,3038 \in W$, testovanú nulovú hypotézu $H_0 : b_2 = 0$ zamietame.

b) Vyhodnotenie pomocou p-hodnoty.

Túto p-hodnotu nájdeme v stĺpci *P-value*. P-hodnota predstavuje pravdepodobnosť, že dostaneme rovnaký alebo ešte extrémnejší výsledok ako v prípade, ak by platila nulová hypotéza H_0 . Jej číselnú hodnotu vieme vypočítať pomocou distribučnej funkcie.

$$p(b_2) = 2 * \min\{F(t_0(b_2)); 1 - F(t_0(b_2))\} = 0,026950263$$

Výpočet p-hodnoty v Exceli je na obr. 193 a zhoduje sa hodnotou v stĺpci *P-value* na obr. 191.

F(t0)=	=T.DIST(-2,30382424;37;1)	F(t0)=	0,01347513
1-F(t0)=	=1-D91	1-F(t0)=	0,98652487
p=	=2*MIN(D91:D92)	p=	0,02695026

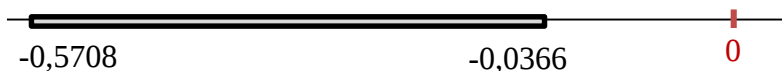
Obr. 23 Výpočet p-hodnoty pomocou distribučnej funkcie

Čím je p-hodnota menšia, tým viac sme presvedčení, že nulovú hypotézu možno zamietnuť.

$$p = 0,027 < 0,05 = \alpha, \text{ preto zamietame } H_0 : b_2 = 0$$

c) Vyhodnotenie pomocou $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ intervalu spoľahlivosti alebo tzv. konfidenčného intervalu.

Pri vyhodnotení testov hypotéz pomocou intervalu spoľahlivosti o prijatí alebo zamietnutí nulovej hypotézy rozhodujeme na základe toho, či 0 patrí alebo nepatrí do $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ IS. V našom prípade $\alpha = 0,05$, preto počítame 95% IS pre koeficient b_2 . Dolnú hranicu intervalu nájdeme vo výstupe regresnej analýzy v tabuľke na obr. 191 v stĺpci *Lower 95%* a hornú hranicu v stĺpci *Upper 97%*. 95% IS pre koeficient b_1 je: (-0,5708; -0,0366).



Obr. 24 0 nepatrí do 95% IS pre koeficient b_2

Na výpočet hraníc použijeme vzťah $b_2 \pm \Delta$, kde $\Delta = SE(b_1) \cdot t_{n-k-1}^{kv} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$, obr. 195.

	C	D		C	D	
95	b2=	-0,30372293		95	b2=	-0,30372293
96	SE(b2)=	0,13183425		96	SE(b2)=	0,13183425
97	t kv 37(0,975)=	=T.INV(0,975;37)		97	t kv 37(0,975)=	2,02619246
98	delta=	=D96*D97		98	delta=	0,26712156
99	b2-delta=	=D95-D98		99	b2-delta=	-0,57084449
100	b2+delta=	=D95+D98		100	b2+delta=	-0,03660138

Obr. 25 Výpočet 95% intervalu spoľahlivosti pre koeficient b_2 v Exceli

Nulová hypotéza $H_0 : b_2 = 0$ hovorí, že regresný koeficient b_2 je nulový, preto sme overovali, či 0 patrí alebo nepatrí do daného 95% konfidenčného intervalu pre koeficient b_2 . Keďže $0 \notin (-0,5708; -0,0366)$, vid' obr. 194, so spoľahlivosťou 95% môžeme hypotézu $H_0 : b_2 = 0$ zamietnuť.

Záver:

Na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ možno konštatovať, že regresný koeficient b_2 je štatisticky významný, t. j. samostatný vplyv faktora t_2 na hodnotu transformovanej regresnej funkcie $(f)_t(t_2, t_3)$ je štatisticky významný, t. j. nemožno ho zanedbať. Hĺbka rezu a_p je dôležitý faktor pre drsnosť Ra.

Ak chceme zistiť, či má posuv f_n výrazný vplyv na drsnosť povrchu obrobku Ra, budeme testovať, či je samostatné pôsobenie faktora x_3 – posuv f_n na hodnotu lineárnej regresnej funkcie štatisticky významné. Zvolíme hladinu významnosti, najčastejšie 5%.

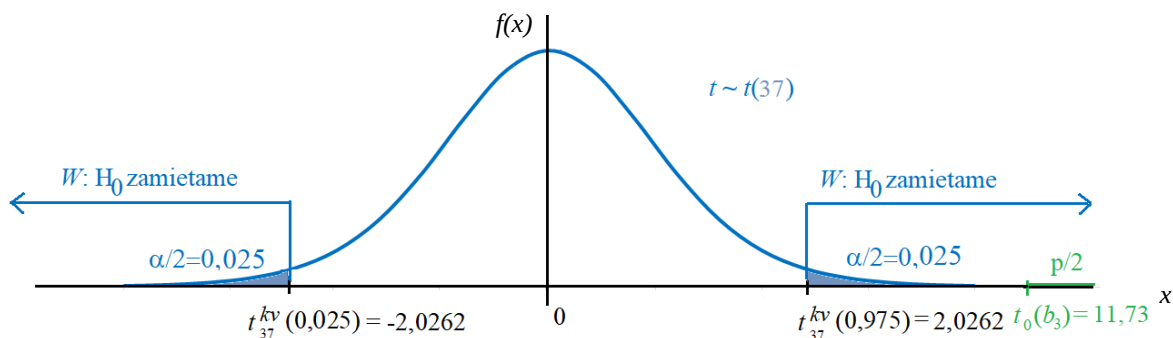
Pretože samostatné pôsobenie kódovaného faktora t_3 vystupuje v transformovanej lineárnej regresnej funkcii $(f)_t(t_2, t_3) = b_0 + b_2 t_2 + b_3 t_3$ v člene $b_3 t_3$, t. j. budeme testovať nulovosť regresného koeficientu b_3 . Testujeme hypotézy $H_0: b_3 = 0 \leq H_1: b_3 \neq 0$.

Z výstupu Excelu použijeme riadok, v ktorom sa nachádzajú údaje súvisiace s koeficientom b_3 , obr. 196.

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%
Intercept	3,72617083	0,108940304	34,2037859	1,32475E-29	3,50543681	3,94690486
ap	-0.30372293	0.131834247	-2.30382424	0.026950263	-0.570844492	-0.03660138
fn	1,54629147	0,131834247	11,7290575	4,99963E-14	1,279169913	1,81341303

Obr. 26 Tabuľka s bodovými odhadmi koeficientov a im prislúchajúcimi hodnotami

Grafické riešenie je na obr. 197.



Obr. 27 Grafické riešenie pre testovanie hypotézy o koeficiente b_3

Kritická oblasť je vzhľadom na rovnaké $\alpha = 0,05$ opäť rovnaká $W = (-\infty; -2,0262) \cup (2,0262, \infty)$. Platí $|t_0(b_3)| = 11,73 > 2,0262 = t_{37}^{kv}(0,975)$. Z grafického riešenia pre test hypotézy o koeficiente b_3 na obr. 197 realizácia testovacej štatistiky $t_0(b_3) = 11,73 \in W$, preto zamietame $H_0 : b_3 = 0$.

Rovnako p-hodnota $p = 4,99 \cdot 10^{-14} < 0,05 = \alpha$, preto zamietame $H_0 : b_3 = 0$.

Výpočet p-hodnoty je:

$$p(b_3) = 2 * \min\{F(t_0(b_3)); 1 - F(t_0(b_3))\} = 2 * \text{MIN}(T.\text{DIST}(11,73; 37; 1); 1 - T.\text{DIST}(11,73; 37; 1)) = 4,99 \cdot 10^{-14}.$$

Graficky p-hodnota predstavuje dvojnásobok veľkosti plochy pod krivkou hustoty rozdelenia Studentovho t-rozdelenia $t(37)$ od realizácie testovacej štatistiky $t_0(b_3)$ vpravo, vid' obr. 197.

Výpočet 95% IS pre koeficient b_3 je na obr.198.

	F	G
94		
95	b3=	0,02695026
96	SE(b3)=	-0,57084449
97	t kv 37(0,975)=	=T.INV(0,975;37)
98	delta=	=G96*G97
99	b3-delta=	=G95-G98
100	b3+delta=	=G95+G98

	F	G
94		
95	b3=	0,02695026
96	SE(b3)=	-0,57084449
97	t kv 37(0,975)=	2,02619246
98	delta=	-1,15664081
99	b3-delta=	1,18359107
100	b3+delta=	-1,12969054

Obr. 28 Výpočet intervalu spoľahlivosti pre koeficient b_3 v Exceli

Z tabuľky na obr. 196 je 95% IS pre koeficient b_3 : (1,279; 1,813)



Obr. 29 0 nepatrí do 95% IS pre koeficient b_3

Na obr.199 vidíme, že $0 \notin (1,279; 1,813)$, preto so spoľahlivosťou 95% môžeme nulovú hypotézu $H_0 : b_3 = 0$ zamietnuť.

Záver:

Na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ je možné konštatovať, že regresný koeficient b_3 je štatisticky významný, t. j. samostatný vplyv faktorov t_3 na hodnotu transformovanej regresnej funkcie $(f)_t(t_2, t_3)$ je štatisticky významný, preto ho nemožno zanedbať. Posuv f_n je dôležitý faktor pre drsnosť Ra.

Kvalita modelu vyjadrená pomocou R^2 a celkovej štatistickej významnosti a adekvátnosti regresného modelu

Kvalitu regresného modelu získaného po vylúčení štatisticky nevýznamných členov je vyjadrená pomocou indexu determinácie R^2 , označovaná tiež *R Square* a upraveného indexu determinácie *Adjusted R Square* z výstupu regresnej analýzy v Exceli na obr. 200 je totožná s výstupom Minitabu, t. j. $R^2 = 0,79430548$ a $\text{adjusted } R^2 = 0,78318686$. Síce nepatrí medzi časť testovania hypotéz, ale patrí medzi základné techniky porovnania rôznych regresných modelov.

SUMMARY OUTPUT	
Regression Statistics	
Multiple R	0.89123817
R Square	0.79430548
Adjusted R Square	0.78318686
Standard Error	0.68899898
Observations	40

Obr. 30 Štatistiky R^2 a $\text{adjusted } R^2$ týkajúce sa získaného regresného modelu ako výstup regresnej analýzy v Exceli

Číselná hodnota indexu determinácie R^2 je vypočítaná z tabuľky ANOVA (obr. 201), nakoľko index determinácie vyjadruje, aký je podiel variability závislej premennej, ktorý vieme vyjadriť získaným regresným modelom. V našom prípade suma štvorcov odchýlok nameraných hodnôt drsnosti Ra od celkového vypočítaného priemeru je $SS_{\text{Total}} = 85,39179953$. Z celkovej variability je regresným modelom vysvetlená variabilita $SS_{\text{Regression}} = 67,82717453$.

ANOVA					
	df	SS	MS	F	Significance F
Regression	2	67,82717453	33,9135873	71,43919833	1,9707E-13
Residual	37	17,564625	0,47471959		
Total	39	85,39179953			

Obr. 31 ANOVA ako súčasť výstupu regresnej analýzy v Exceli

Podiel variability nameraných dát drsnosti Ra, ktorý vieme vysvetliť získaným modelom je $R^2 = \frac{67,82717453}{85,39179953} = 0,79430548$, čo interpretujeme: 79,43% variability nameraných hodnôt drsnosti Ra vieme vysvetliť lineárnym regresným modelom, 20,57% variability nameraných hodnôt zostalo modelom nevysvetlenej. Upravený index determinácie R^2_{adj} uvádzaný ako *Adjusted R Square*, ktorý penalizuje regresný model za nadbytočné členy v modeli, má hodnotu

$R_{adj}^2 = 0,78318686$ vyjadruje mieru zhody nameraných dát a fitovaných hodnôt (78,32%), ale zohľadňuje pritom počet členov (prediktorov) v modeli.

Kvalitu modelu vyhodnocujeme tiež celkovým F testom štatistickej významnosti regresného modelu, testom adekvátnosti (testom Lack of fit) a analýzou rezíduí.

Celkovým F testom štatistickej významnosti nášho regresného modelu $(f)_t(t_2, t_3) = b_0 + b_2t_2 + b_3t_3$ testujeme nulovú hypotézu, že regresný model nie je štatisticky významný, t. j. všetky jeho koeficienty sú nulové oproti alternatívnej hypotéze, že regresný model je štatisticky významný, t. j. aspoň jeden koeficient je nenulový. Zápis je nasledovný:

$$H_0: b_2 = b_3 = 0 \leq H_1: \text{existuje aspoň jedno } b_i \neq 0$$

Pri celkovom F teste štatistickej významnosti regresného modelu pre testovaciu charakteristiku (štatistiku) platí:

$$F = \frac{\frac{SSR}{k}}{\frac{SSE}{n - k - 1}} \sim F(k; n - k - 1),$$

kde n je počet nameraných dát a k je počet členov v regresnom modeli. Testovacia štatistika F má Fisherovo-Snedecorovo rozdelenie so stupňami voľnosti k a $n - k - 1$. Testovacia štatistika porovnáva rozptyl dát vysvetlený regresným modelom s rozptylom, ktorý zostal modelom nevysvetlený. Čím je tento podiel väčší, tým regresný model lepšie vystihuje správanie skúmaných dát. Tento test je jednostranný (pravostranný).

Realizáciu testovacej štatistiky, stupne voľnosti, p -hodnotu vieme získať z regresnej analýzy z tabuľky ANOVA na obr. 202. Pri výpočte testovacej štatistiky používame hodnoty $SSR = SS$ Regression, a $SSE = SS$ Residual a údaje z nich vypočítané.

ANOVA					
	<i>df</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>Significance F</i>
Regression	2	67,82717453	33,9135873	71,43919833	1,9707E-13
Residual	37	17,564625	0,47471959		
Total	39	85,39179953			

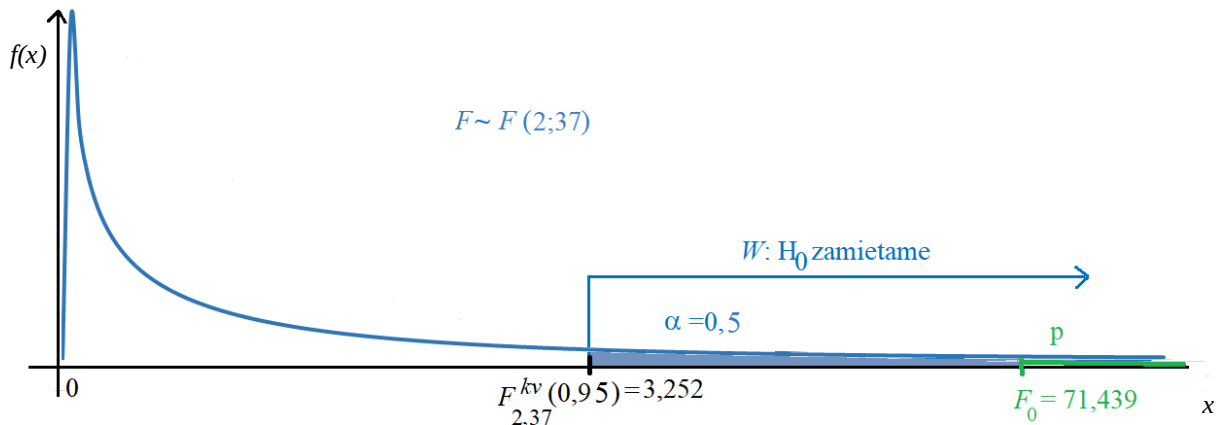
Obr. 32 ANOVA ako súčasť výstupu regresnej analýzy v Exceli

Ak zvolíme hladinu významnosti napr. $\alpha = 0,05$, kritická oblasť bude ohraničená kritickou hodnotou $F_{2,37}^{kv}(0,95)$. Jej hodnotu vypočítame ako 95% kvantil Fisherovho rozdelenia $F.INV(0,95; 2; 37) = 3,25192385$. Kritická oblasť je na základe toho $W = (3,252; \infty)$.

Realizácia testovacej štatistiky F_0 sa nachádza v tabuľke na obr. 202 v stĺpci F .

$$F_0 = \frac{\frac{67,827117453}{2}}{\frac{17,564625}{37}} = \frac{33,9135873}{0,47471959} = 71,43919833 > 3,252 = F_{2,37}^{kv}(0,95)$$

Pretože $F_0 = 71,439 \in W$ (vid' obr. 203), zamietame nulovú hypotézu $H_0: b_2 = b_3 = 0$ a prijímame alternatívnu hypotézu H_1 : existuje aspoň jedno $b_i \neq 0$.



Obr. 33 Grafické riešenie pre celkový F test o štatistickej významnosti regresného modelu

Pri vyhodnotení podľa p -hodnoty, jej číselnú hodnotu nájdeme v tabuľke na obr. 202 v stĺpci *Significance F*, alebo vypočítame pomocou distribučnej funkcie v realizácii testovacej štatistiky F_0 : $p = 1 - F(F_0) = 1 - \text{F.DIST}(71,43919833; 2; 37; 1) = 1,971 \cdot 10^{-13}$.

Ak p -hodnotu porovnáme so zvolenou hladinou významnosti $\alpha = 0,05$, dostaneme rovnaký záver o tom, že zamietame nulovú hypotézu $H_0: b_2 = b_3 = 0$ a prijímame alternatívnu hypotézu H_1 : existuje aspoň jedno $b_i \neq 0$.

Záver:

Na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ možno konštatovať, že lineárny regresný model typu je štatisticky významný.

F test štatistickej významnosti prínosu k -tej vysvetľujúcej premennej

Súčasťou ANOVY, ktorá obsahuje celkový F test štatistickej významnosti regresného modelu, zvyčajne bývajú aj F testy štatistickej významnosti prínosu k -tych vysvetľujúcich premenných. Rovnako ako pri individuálnych t -testoch štatistickej významnosti regresných koeficientov na základe uvedených testov vieme rozhodnúť, ktorý faktor a interakciu faktorov v regresnom modeli ponechávame ako signifikantné a ktoré členy je možné z modelu vylúčiť. Uvedeným testom testujeme prínos, ktorým dodatočne prispieva k -ta vysvetľujúca premenná k

vysvetleniu variability závislej premennej. Význam tohto testu spočíva v tom, že v prípade zamietnutia nulovej hypotézy pri F -teste štatistickej významnosti regresného modelu uvedeného ďalej chceme hneď vedieť, ktorá zo vstupných premenných má štatisticky významný a nevýznamný vplyv na závislú premennú (chceme vedieť, ktoré konkrétne premenné štatisticky významne prispievajú k vysvetleniu variability závislej premennej v rámci modelu). Označením dodatočný príspevok k -tej vysvetľujúcej premennej rozumieme prínos tejto premennej za predpokladu, že sa už prv uvažovalo s $(k - 1)$ nezávislými (vysvetľujúcimi) premennými.

Testované hypotézy sú:

H_0 : Dodatočný príspevok k -tej vysvetľujúcej premennej na vysvetlenie variability vysvetľovanej premennej nie je štatisticky významný.

H_1 : Dodatočný príspevok k -tej vysvetľujúcej premennej na vysvetlenie variability vysvetľovanej premennej je štatisticky významný.

Testovacia štatistika:

$$F = \frac{\frac{SSR_{\text{úplný model}} - SSR_{\text{redukovaný model}}}{1}}{\frac{SSE_{\text{úplný model}}}{n - k - 1}} \sim F(1; n - k - 1),$$

kde $SSR_{\text{úplný model}}$ je suma štvorcov odchýlok od celkového priemeru vysvetlená úplným regresným modelom s k prediktormi, $SSR_{\text{redukovaný model}}$ je suma štvorcov odchýlok vysvetlená redukovaným regresným modelom s $k - 1$ prediktormi, ich rozdiel nazývame príspevok k -tej vysvetľujúcej premennej, n je počet nameraných dát a k je počet členov (prediktorov, vysvetľujúcich premenných) v úplnom regresnom modeli. Tento test je pravostranný, nakoľko chceme, aby bol prínos k -tej vysvetľujúcej premennej čo najväčší, v opačnom prípade je možné k -tu vysvetľujúcu premennú z modelu vylúčiť.

Výsledok uvedeného testu významnosti prínosu vieme získať v Minitabe, Excel tento test neposkytuje. Jeho závery týkajúce sa ponechania alebo vylúčenia člena z modelu sú vždy totožné s výsledkom t -testu štatistickej významnosti regresného modelu napriek tomu, že oba testy sú založené na inom princípe, t. j. testujú niečo iné.

Na obr. 204 v tabuľke ANOVA môžeme vidieť, že Minitab poskytuje okrem F testu štatistickej významnosti regresného modelu aj výsledky F testov štatistickej významnosti prínosu pre nami zvolené (ponechané) premenné a test Lack of Fit.

Analysis of Variance						
	Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
	Model	2	67,827	33,9136	71,44	0,000
1. →	Linear	2	67,827	33,9136	71,44	0,000
2. →	ap	1	2,520	2,5196	5,31	0,027
3. →	F	1	65,308	65,3075	137,57	0,000
	Error	37	17,565	0,4747		
4. →	Lack-of-Fit	12	5,561	0,4634	0,97	0,505
	Pure Error	25	12,004	0,4802		
	Total	39	85,392			

Obr. 34 ANOVA po vylúčení štatisticky nevýznamných členov - výstup Minitabu bude použitý pre rôzne F testy štatistickej významnosti prínosu k -tej vysvetľujúcej premennej

Vyhodnotenie výsledkov tabuľky ANOVA:

1. F test štatistickej významnosti prínosu lineárnej zložky vyjadrujúcej celkový lineárny vplyv faktora B hĺbka rezu a_p a faktora C posuv f_n v regresnom modeli

Nech $\alpha = 0,05$. Testované hypotézy pre F test o štatistickej významnosti prínosu lineárnej zložky regresného modelu sú:

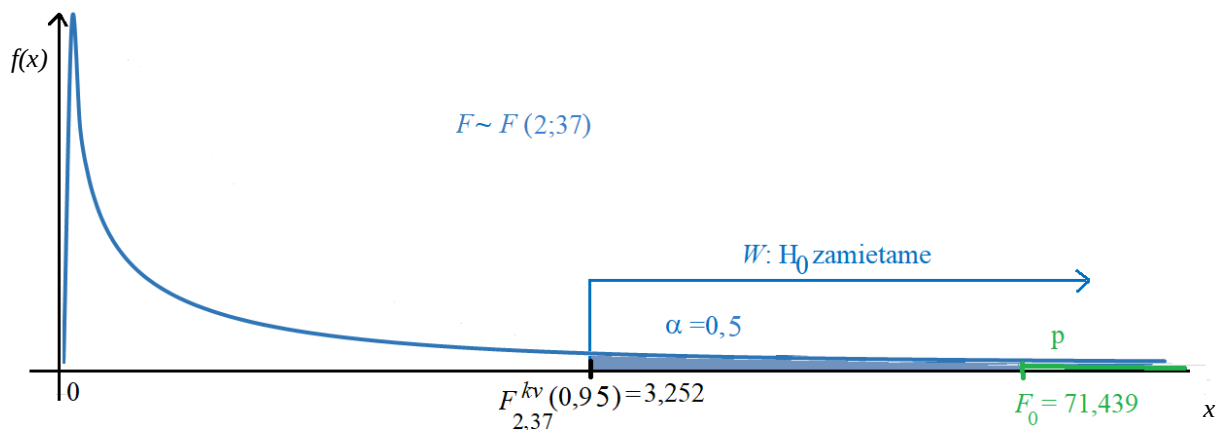
H_0 : Dodatočný lineárny príspevok faktorov a_p a F na vysvetlenie variability drsnosti R_a nie je štatisticky významný.

H_1 : Dodatočný lineárny príspevok faktorov a_p a F na vysvetlenie variability drsnosti R_a je štatisticky významný.

Použijeme štatistiky uvedené v riadku 1. označenom Linear. Realizácia testovacej štatistiky F_0 sa nachádza v tabuľke na obr. 204 v stĺpci F-Value:

$$F_0 = \frac{\frac{67,827}{2}}{\frac{17,565}{37}} = \frac{33,9136}{0,4747} = 71,44 > 3,252 = F_{2,37}^{kv}(0,95)$$

Pretože $F_0 = 71,439 \in W$ (viď obr. 205), zamietame nulovú hypotézu H_0 : Dodatočný lineárny príspevok faktorov hĺbka rezu a_p a posuv f_n (v tabuľke označený F) na vysvetlenie variability drsnosti R_a nie je štatisticky významný. Prijímame alternatívnu hypotézu H_1 : Dodatočný lineárny príspevok faktorov hĺbka rezu a_p a posuv f_n na vysvetlenie variability drsnosti R_a je štatisticky významný. Vzhľadom na to, že regresný model obsahuje iba lineárne členy, vypočítané hodnoty aj záver musia byť totožné s výsledkom celkového F testu štatistickej významnosti regresného modelu. Grafické riešenie musí byť preto tiež rovnaké.



Obr. 35 Grafické riešenie pre F test o štatistickej významnosti prínosu lineárnej zložky regresného modelu

Pri vyhodnotení podľa p -hodnoty: $p = 1 - F(F_0) = 1 - \text{F.DIST}(71,439; 2; 37; 1) = 1,971 \cdot 10^{-13}$. Vo výstupe Minitabu v časti ANOVA sa p -hodnota nachádza v stĺpci P-Value. Ak p -hodnotu porovnáme so zvolenou hladinou významnosti $\alpha = 0,05$, dostaneme rovnaký záver, t. j. zamietame nulovú hypotézu H_0 a prijímame alternatívnu hypotézu H_1 .

Záver:

Na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ možno prijať hypotézu, že prínos lineárnej zložky regresného modelu je štatisticky významný.

2. F test štatistickej významnosti prínosu premennej B hĺbka rezu a_p

Nech $\alpha = 0,05$. Testované hypotézy pre F test o štatistickej významnosti prínosu lineárnej zložky faktora a_p sú:

H_0 : Dodatočný lineárny príspevok faktora a_p na vysvetlenie variability drsnosti R_a nie je štatisticky významný.

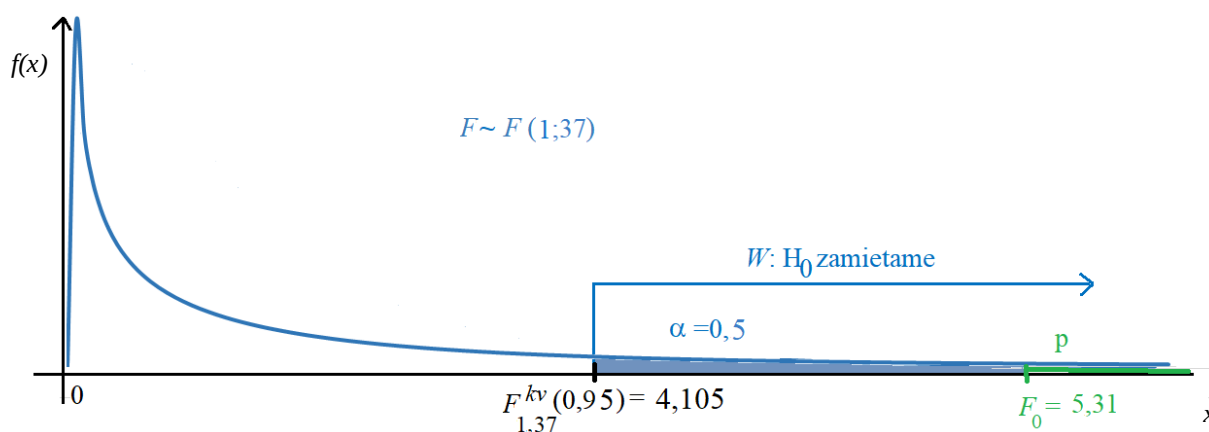
H_1 : Dodatočný lineárny príspevok faktora a_p na vysvetlenie variability drsnosti R_a je štatisticky významný.

Pri tomto type testu porovnávame veľkosť rozptylu vysvetleného faktorom a_p s reziduálnym rozptylom v riadku Error.

Pri výpočte testovacej štatistiky F_0 použijeme štatistiky uvedené v riadku 2. označeného a_p . Vypočítaná hodnota testovacej štatistiky F_0 sa nachádza v tabuľke na obr. 204 v stĺpci F -Value:

$$F_0 = \frac{\frac{2,520}{1}}{\frac{17,565}{37}} = \frac{2,5196}{0,4747} = 5,31 > 4,105 = F_{1,37}^{kv}(0,95)$$

Pretože $F_0 = 5,31 \in W$ (viď obr. 206), zamietame H_0 : Dodatočný lineárny príspevok faktora ap na vysvetlenie variability drsnosti Ra nie je štatisticky významný a prijímame alternatívnu hypotézu H_1 : Dodatočný lineárny príspevok faktora ap na vysvetlenie variability drsnosti Ra je štatisticky významný. Grafické riešenie je na obr. 206.



Obr. 36 Grafické riešenie pre F test o štatistickej významnosti prínosu lineárnej zložky faktora ap v regresnom modeli

Pri vyhodnotení podľa p-hodnoty: $p = 1 - F(F_0) = 1 - F.DIST(5,31; 1; 37; 1) = 0,027$. Vo výstupe Minitabu v časti ANOVA sa p-hodnota nachádza v stĺpci P-Value. Na základe porovnania p-hodnoty so zvolenou hladinou významnosti $\alpha = 0,05$, dostaneme rovnaký záver, t. j. zamietame H_0 a prijímame alternatívnu hypotézu H_1 .

Záver:

Na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ možno prijať hypotézu, že prínos lineárnej zložky faktora hĺbka rezu ap v regresnom modeli je štatisticky významný.

3. F test štatistickej významnosti prínosu premennej C posuv f_n

Nech $\alpha = 0,05$. Testované hypotézy pre F test o štatistickej významnosti prínosu lineárnej zložky faktora ap sú:

H_0 : Dodatočný lineárny príspevok faktora f_n na vysvetlenie variability drsnosti Ra nie je štatisticky významný.

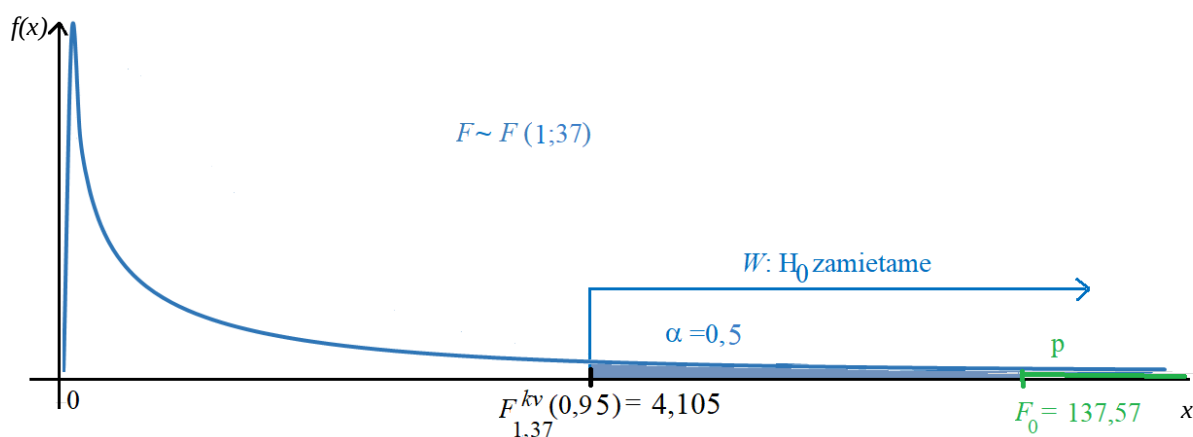
H_1 : Dodatočný lineárny príspevok faktora f_n na vysvetlenie variability drsnosti Ra je štatisticky významný.

Pri tomto type testu porovnávame veľkosť rozptylu vysvetleného faktorom f_n s reziduálnym rozptylom v riadku Error.

Pri výpočte testovacej štatistiky F_0 použijeme štatistiky uvedené v riadku 3. označeného F. Vypočítaná hodnota testovacej štatistiky F_0 sa nachádza v tabuľke na obr. 204 v stĺpci *F-Value*:

$$F_0 = \frac{\frac{65,308}{1}}{\frac{17,565}{37}} = \frac{65,3075}{0,4747} = 137,57 > 4,105 = F_{1,37}^{kv}(0,95)$$

Pretože $F_0 = 137,57 \in W$, zamietame hypotézu H_0 : Dodatočný lineárny príspevok faktora posuv f_n na vysvetlenie variability drsnosti Ra nie je štatisticky významný a prijímame alternatívnu hypotézu H_1 : Dodatočný lineárny príspevok faktora posuv f_n na vysvetlenie variability drsnosti Ra je štatisticky významný. Grafické riešenie je na obr. 207.



Obr. 37 Grafické riešenie pre F test o štatistickej významnosti prínosu lineárnej zložky faktora f_n v regresnom modeli

Pri vyhodnotení podľa p-hodnoty: $p = 1 - F(F_0) = 1 - \text{F.DIST}(137,57; 1; 37; 1) = 4,996 \cdot 10^{-14}$. Vo výstupe Minitabu v časti ANOVA sa p-hodnota nachádza v stĺpci P-Value. Ak p-hodnotu porovnáme so zvolenou hladinou významnosti $\alpha = 0,05$, dostaneme rovnaký záver, t. j. zamietame H_0 a prijímame alternatívnu hypotézu H_1 .

Záver:

Na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ možno prijať hypotézu, že prínos lineárnej zložky faktora posuv f_n v regresnom modeli je štatisticky významný.

4. Kvalita regresného modelu vyjadrená testom dostatočného prispôsobenie regresného modelu (testom Lack of Fit)

Pri teste Lack of fit (LOF) testujeme adekvátnosť (dostatočnosť) regresného modelu. Nech zvolená hladina významnosti je $\alpha = 0,05$. Testované hypotézy pri tomto teste:

Nulová hypotéza je $H_0: SSLF = SSPE$. Možný je tiež zápis: No LOF – regresný model nie je nedostatočný.

Alternatívna hypotéza $H_1: SSLF > SSPE$, resp. ekvivalentný zápis: LOF – regresný model je nedostatočný.

Testovacia štatistika: $F = \frac{\frac{SSLF}{df_{LF}}}{\frac{SSPE}{df_{PE}}} = \frac{MSLF}{MSPE} \sim F(df_{LF}; df_{PE})$.

Pri tomto druhu testu reziduá, resp. sumu štvorcov reziduálnych odchýlok SSE rozdeľujeme na také, ktoré vznikli chybou merania, t. j. v dôsledku čistej chyby (Pure Error - PE) a také, ktoré vznikli z dôvodu nedostatočného prispôsobenia regresného modelu (Lack of Fit - LF), t. j. $SSE = SSLF + SSPE$. V tomto prípade bude model tým lepšie vystihovať správanie dát, čím bude suma štvorcov odchýlok spôsobená nedostatočnosťou modelu čo najmenšia. Test je z uvedeného dôvodu pravostranný.

Excel priamy výpočet testu Lack of fit neposkytuje. Na obr. 208 je výstup Minitabu, kde je suma štvorcov reziduálnych odchýlok v riadku Error rozdelená na sumu štvorcov odchýlok v dôsledku nedostatočného prispôsobenia modelu v riadku Lack of Fit a na čistú chybu v dôsledku chyby merania, uvedenú v riadku Pure Error. Stupne voľnosti sú v stĺpci DF.

Analysis of Variance

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	2	67,827	33,9136	71,44	0,000
Linear	2	67,827	33,9136	71,44	0,000
ap	1	2,520	2,5196	5,31	0,027
F	1	65,308	65,3075	137,57	0,000
Error	37	17,565	0,4747		
Lack-of-Fit	12	5,561	0,4634	0,97	0,505
Pure Error	25	12,004	0,4802		
Total	39	85,392			

Obr. 38 Súčasťou ANOVY v Minitabe je test Lack of fit

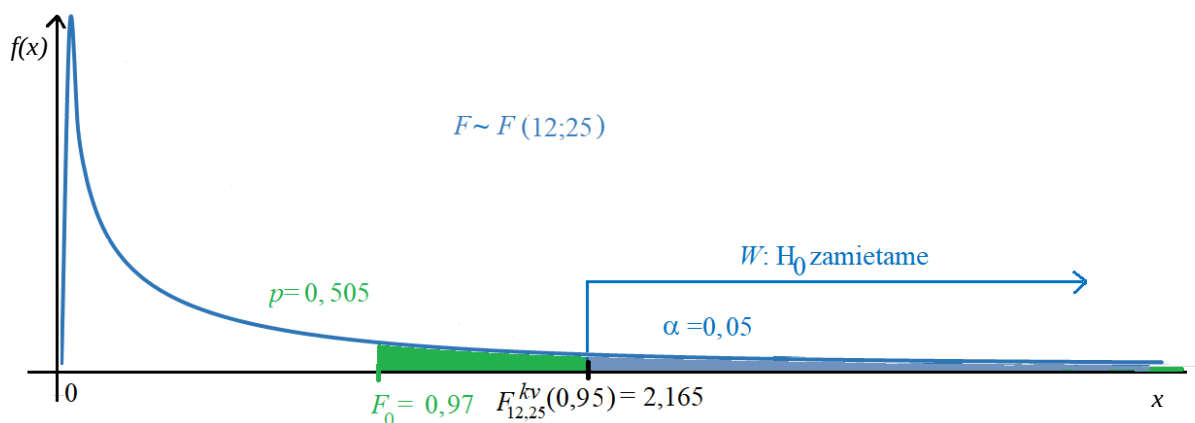
Testovacia štatistika pre test LOF má Fisherovo rozdelenie s 12 a 25 stupňami voľnosti, pretože platí $df_E = df_{LF} + df_{PE}$, t. j. v našom prípade $37 = 12 + 25$.

$$\text{Realizácia testovacej štatistiky } F_0 = \frac{\frac{5,561}{12}}{\frac{12,004}{25}} = \frac{0,4634}{0,4802} = 0,97.$$

Na obr. 204 v tabuľke ANOVA v riadku 4. je realizácia testovacej štatistiky s rovnakou hodnotou.

Test LOF je jednostranný, preto kritická oblasť bude pre $\alpha = 0,05$ ohraničená kritickou hodnotou $F_{(12,25)}^{kv}(0,95)$. Jej hodnotu vypočítame ako 95% kvantil Fisherovho rozdelenia, jeho výpočet je $F.INV(0,95; 12; 25) = 2,164891$. Kritická oblasť je potom $W = (2,165; \infty)$.

Pretože vypočítaná hodnota testovacej štatistiky $F_0 = 0,97$ neleží v kritickej oblasti W (viď obr. 209), nezamietame, čo znamená, že prijímame nulovú hypotézu H_0 .



Obr. 39 Grafické riešenie pre test o adekvátnosti regresného modelu

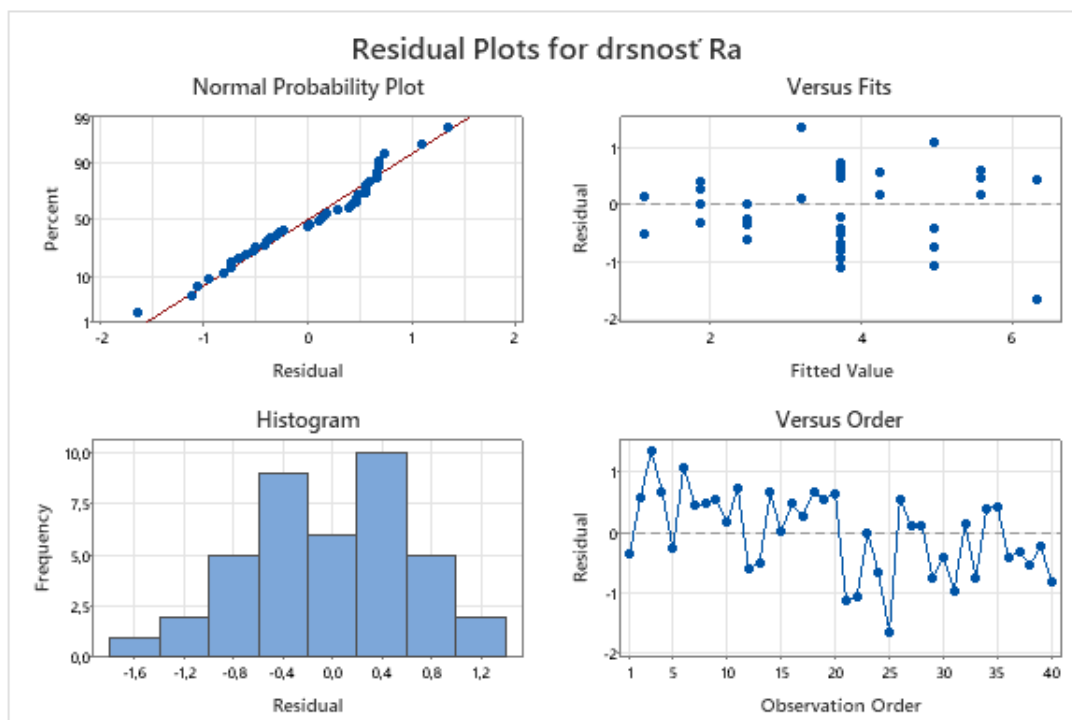
Pri vyhodnotení podľa p-hodnoty: $p = 1 - F(F_0) = 1 - F.DIST(0,97; 12; 25; 1) = 0,505$ túto hodnotu porovnávame s nami zvolenou hladinou významnosti $\alpha = 0,05$, pričom dostávame rovnaký záver, že nezamietame nulovú hypotézu H_0 , a teda zamietame alternatívnu hypotézu H_1 .

Záver:

Na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ možno konštatovať, že získaný lineárny regresný model pre odozvu Ra nie je nedostatočný (je dostatočný) a nie je potrebné do modelu zaraďovať ďalšie členy, teda nie je potrebné hľadať zložitejší model.

Grafická analýza rezíduí regresného modelu

Súčasťou posúdenia kvality regresného modelu je grafická analýza rezíduí, kedy vizuálne kontrolujeme normalitu a nezávislosť rezíduí. Výstup Minitabu s grafmi rezíduí je vidieť na obr. 210.



Obr. 40 Výstup Minitabu umožňujúci analýzu rezíduí

Vizuálnu kontrolu normálneho rozdelenia rezíduí umožňuje normálny pravdepodobnostný graf (Normal Probability Plot) a histogram (Histogram). Normálny pravdepodobnostný graf zobrazuje rozdelenie rezíduí oproti teoretickým kvantilom normálneho rozdelenia. Kvantily, t. j. percentily predstavujú podiel dát menších ako dané rezíduum, ak by rezíduá mali normálne rozdelenie. V ideálnom prípade by mali zobrazené body ležať na červenej diagonálnej priamke, čo interpretujeme ako splnenú normalitu analyzovaných dát. V tomto prípade sa rezíduá väčšinou nachádzajú blízko čiar, sú však viditeľné určité odchýlky, čo naznačuje mierne odchýlky od normálneho rozdelenia. Tieto odchýlky môžu naznačovať prítomnosť odľahlých hodnôt alebo systematických chýb. Ak na posúdenie normality rezíduí použijeme histogram, tento by mal mať pre normálne rozdelené rezíduá približne tvar zvona. Náš histogram je približne symetrický.

Graf rezíduí verzus fitované hodnoty (Residuals versus Fits) ukazuje, či existuje nejaká systematická závislosť medzi rezíduami a predikovanými hodnotami. Ideálne by rezíduá mali

byť rozptýlené náhodne okolo nulovej osi dodržiavajúc zákon troch sigma. V našom prípade sú štandardizované rezíduá rozptýlené náhodne okolo vodorovnej osi a väčšina z nich sa nachádza v intervale ± 1 , iba 5 z 40 je od nulovej hodnoty vzdialených v intervale ± 2 .

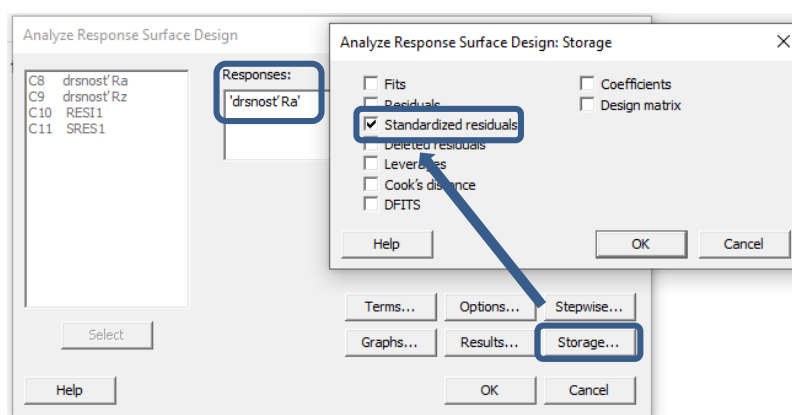
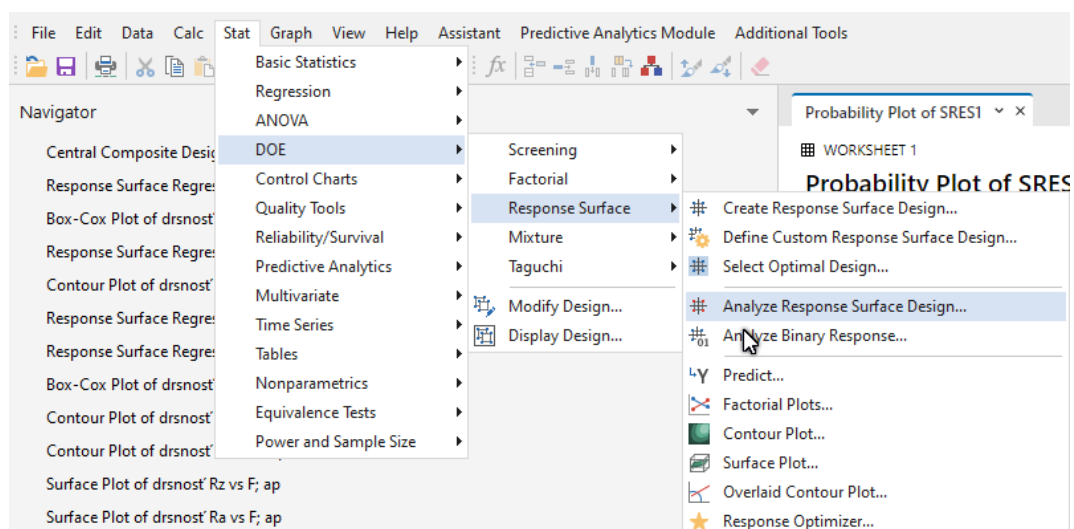
Z grafu rezíduí verzus poradie (Residuals vs Order) vieme zistiť, či existuje trend, t. j. nejaká funkčná závislosť v zaznamenanom časovom poradí rezíduí. Ideálne by mali byť hodnoty rezíduí náhodne rozptýlené, čo by naznačovalo absenciu autokorelácie. Správanie rezíduí v čase v našom prípade nenaznačuje žiadny trend. Rezíduá sú náhodne rozptýlené bez vzoru v poradí, čo naznačuje, že nie je prítomná autokorelácia.

Celkovo možno zhodnotiť, že grafy naznačujú, že model je vhodný a rezíduá majú požadované vlastnosti pre „dobré sediace“ model.

Test normality rezíduí

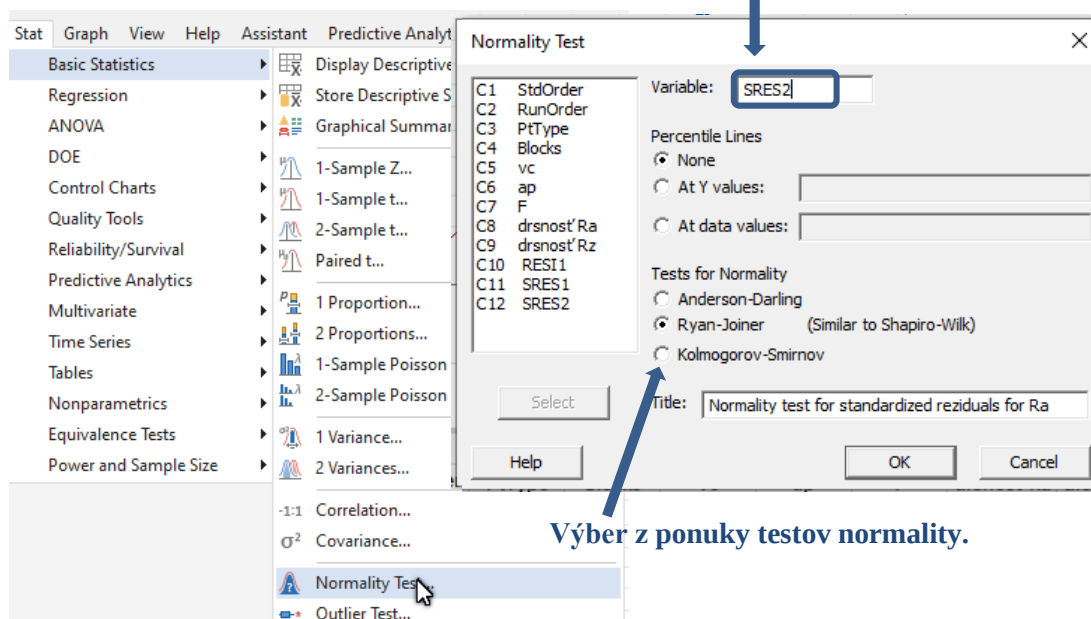
Podmienkou „dobrého“ regresného modelu je splnený predpoklad normality rezíduí. V Minitabe sú k dispozícii tieto testy normality: Ryan-Joiner test (modifikovaný Shapiro-Wilk test), Anderson-Darling test a Kolmogorov-Smirnovovho test. Samotnému spusteniu testu normality predchádza výpočet hodnôt štandardizovaných rezíduí. Ich rozdelenie je možné následne testovať. Excel výpočet testov normality dát priamo neposkytuje, preto uvádzame výpočet normovaných rezíduí a spustenie testov normality v Minitabe. Štandardizované rezíduá v Minitabe získame pri analýze výsledkov nameraných hodnôt odozvy Ra postupnosťou príkazov *Stat*→*DOE*→*Response Surface*→*Analyse Response Surface Design...*, kde v ponuke *Storage* volíme *Standardized residuals* (obr. 211).

Postupnosť príkazov pre spustenie testu normality v Minitabe je zobrazená na obr. 212. Štandardizované rezíduá pre drsnosť Ra boli v tomto prípade zapísané v stĺpci SREZ2. Bol zvolený Ryan-Joiner test, obdoba Shapiro-Wilk testu pre malé vzorky. Výstupom testu normality je na obr. 213. Výstup obsahuje normálny pravdepodobnostný graf spolu s vypočítanou hodnotou testovacej štatistiky, p-hodnotou, parametrami rozdelenia a rozsahom súboru. Pre analyzovaných 40 hodnôt bola vypočítaná stredná hodnota 0,0009998, štandardná odchýlka 1,015. Na základe uvedeného, analyzované dáta (štandardizované rezíduá) spĺňajú parametre štandardizovaného normálneho rozdelenia $N(0;1)$. Hodnota testovacej štatistiky je vyjadrená ako korelačný koeficient $r = 0,984$.



Obr. 41 Výpočet štandardizovaných rezíduí pri analýze RSD v Minitabe

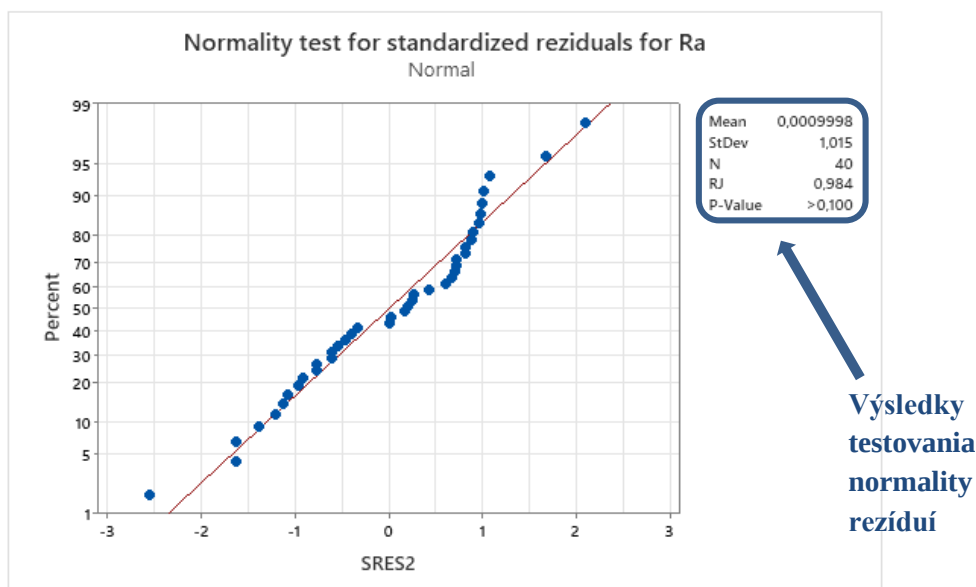
Pred spustením testov normality bolo potrebné pri analýze dát nastaviť výpis štandardizovaných rezíduí, ktoré boli v tomto prípade umiestnené do stĺpca SRES2.



Výber z ponuky testov normality.

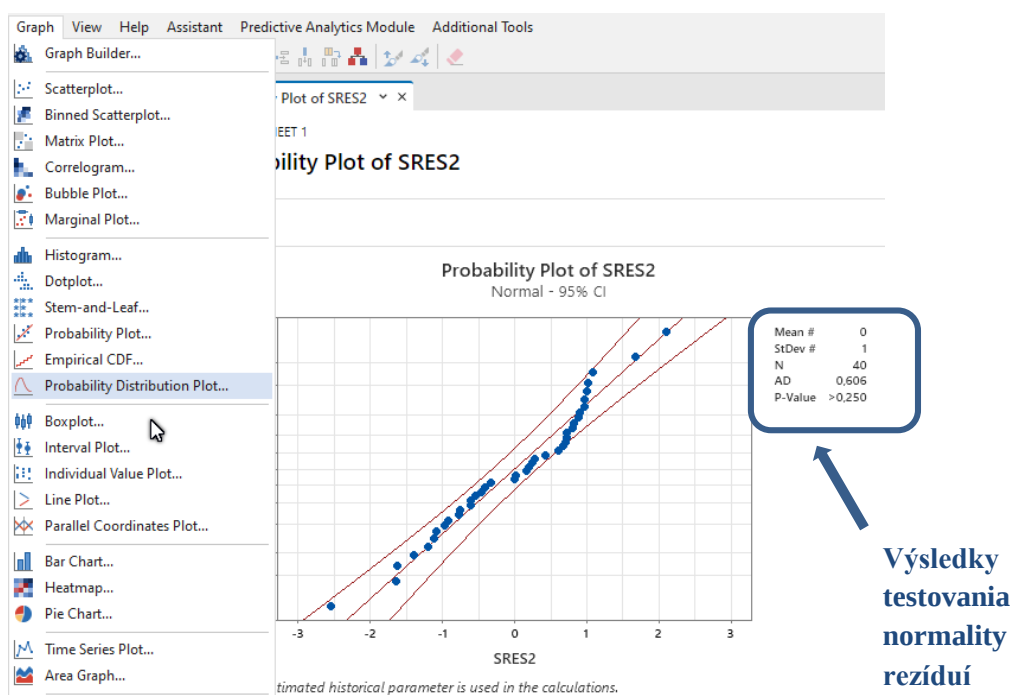
Obr. 42 Postup spustenia testov normality v Minitabe

Pretože hodnote testovacej štatistiky zodpovedá $P\text{-Value} > 0,100$, môžeme prijať nulovú hypotézu H_0 : Dáta pochádzajú z normálneho rozdelenia zamietnuť alternatívnu hypotézu H_1 : Dáta nepochádzajú z normálneho rozdelenia.



Obr. 43 Normálny pravdepodobnostný graf s výstupom zvoleného Ryan-Joiner testu

Rovnaký záver vyplýva zo zobrazenia normálneho pravdepodobnostného grafu, kde je prednastavený Anderson-Darlingov test (obr. 214). V tomto prípade má testovacia štatistika hodnotu 0,606, pričom vypočítaná p-hodnota je väčšia ako 0,250. Záver testu normality bude rovnaký.



Obr. 44 Normálny pravdepodobnostný graf s výstupom Anderson-Darling testu

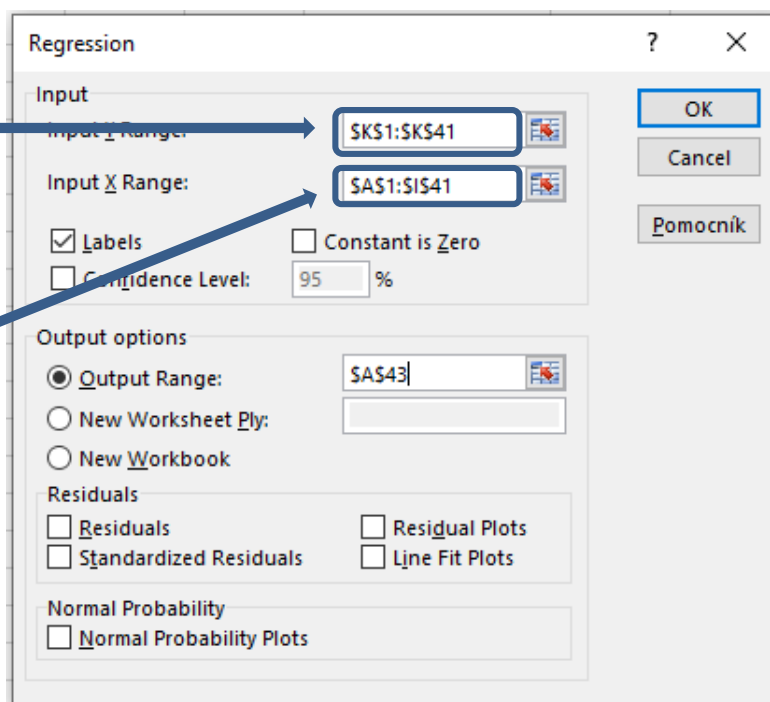
Analýza výsledkov pre odozvu Rz

Hierarchický model a identifikácia štatistickej významnosti lineárneho a kvadratického vplyvu skúmaných faktorov a ich interakcií

Postupnosťou príkazov *Data*→*Data analysis*→*Regression* v Exceli, kde nezávislá premenná X musí byť zapísaná ako súvislá oblasť a obsahovať stĺpce predstavujúce všetky členy, ktoré majú v regresnom modeli vystupovať (členy predstavujúce lineárny, aj kvadratický vplyv faktorov, aj všetky ich uvažované interakcie). Postupujeme rovnakým spôsobom ako pri vyhodnotení výsledkov nameraných hodnôt odozvy pre drsnosť Rz. Všetky hodnoty nezávislých premenných musia byť vyjadrené v kódovaných jednotkách. Korektný spôsob zápisu v Exceli je uvedený na obr. 174. Zmení sa iba zadanie závislej premennej Y, ktorá v tomto prípade bude predstavovať hodnoty odozvy drsnosti Rz, ktoré boli namerané pri daných kombináciách úrovní vstupných faktorov. Dialógové okno na spustenie regresnej analýzy v Exceli je na obr. 215.

Ako odozva Y je zvolený iba stĺpec s nameranými hodnotami drsnosti Rz

Ako nezávislá premenná X je zvolená súvislá oblasť v stĺpcoch A až I



Obr. 45 Zadávanie vstupných údajov použité pri regresnej analýze s viacerými vstupnými parametrami v dialógovom okne v Exceli

Výstup regresnej analýzy v Exceli je zobrazený na obr. 216. Z výsledku vyplýva, že na hladine významnosti $\alpha = 0,1$ je možné z ďalšieho skúmania vylúčiť samostatné pôsobenie faktora A_{vc}, nevýznamný je aj jeho kvadratický vplyv i interakcie so všetkými ostatnými faktormi. Nesignifikantný vplyv na meranú odozvu drsnosť Rz má tiež kvadratický člen $f_n \cdot f_n$.

V regresnom modeli ponecháme iba lineárny člen a_p , f_n , kvadratický člen a_p*a_p a člen vyjadrujúci interakciu a_p*f_n . V ďalších fázach realizácie experimentu ponechávame iba faktory hĺbka rezu a_p a posuv f_n . Rozhodnutie robíme podľa vypočítanej p-hodnoty v stĺpci P-value alebo podľa 90% intervalu spoľahlivosti pre odhad daných regresných koeficientov.

Tabuľka so všeobecnými charakteristikami týkajúcimi sa regresného modelu.

ANOVA poskytuje výsledok celkového F-testu o štatistickej významnosti regresného modelu.

Nevýznamné členy regresného modelu identifikujeme podľa výsledku t-testu o štatistickej významnosti regresného koeficientu v regresnom modeli.

Regression Statistics	
Multiple R	0,96863353
R Square	0,93825091
Adjusted R Square	0,91972619
Standard Error	1,57477323
Observations	40

ANOVA					
	df	SS	MS	F	Significance F
Regression	9	1130,435434	125,603937	50,64857182	1,07043E-15
Residual	30	74,39732216	2,47991074		
Total	39	1204,832757			

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%
Intercept	15,4077481	0,45415246	33,9263781	1,7301E-25	14,48024501	16,3352511
vc	-0,14183265	0,301319813	-0,4707047	0,641256192	-0,757209808	0,4735445
ap	-0,70500268	0,301319813	-2,33971564	0,02614534	-1,320379835	-0,08962552
fn	6,30100359	0,301319813	20,9113484	1,93349E-19	5,685626436	6,91638075
vc*vc	-0,04345485	0,293326695	-0,1481449	0,883219686	-0,642507884	0,55559817
ap*ap	0,57555821	0,293326695	1,96217466	0,059077002	-0,023494823	1,17461124
fn*fn	-0,18145853	0,293326695	-0,61862262	0,540834085	-0,780511558	0,4175945
vc*ap	0,15654167	0,393693309	0,39762339	0,693723066	-0,647487334	0,96057067
vc*fn	0,413125	0,393693309	1,04935743	0,302394076	-0,390904	1,217154
ap*fn	-1,042	0,393693309	-2,64673028	0,012821255	-1,846029	-0,237971

Obr. 46 Výstup regresnej analýzy pre drsnosť Rz v Exceli

Rovnaké výsledky poskytuje Minitab, obr. 217 a 218. Bodové odhady koeficientov a t testy o štatistickej významnosti regresných koeficientov sú doplnené o faktor VIF, obr. 217.

Coded Coefficients

Term	Coef	SE Coef	T-Value	P-Value	VIF
Constant	15,408	0,454	33,93	0,000	
vc	-0,142	0,301	-0,47	0,641	1,00
ap	-0,705	0,301	-2,34	0,026	1,00
F	6,301	0,301	20,91	0,000	1,00
vc*vc	-0,043	0,293	-0,15	0,883	1,02
ap*ap	0,576	0,293	1,96	0,059	1,02
F*F	-0,181	0,293	-0,62	0,541	1,02
vc*ap	0,157	0,394	0,40	0,694	1,00
vc*F	0,413	0,394	1,05	0,302	1,00
ap*F	-1,042	0,394	-2,65	0,013	1,00

Obr. 47 Výstup regresnej analýzy pre drsnosť Rz v Minitabe - časť týkajúca sa koeficientov

Tabuľka ANOVA, ktorá je súčasťou výstupu Minitabu, v porovnaní s Excelom poskytuje tiež rozsiahlejšie výsledky. Je doplnená o všetky výsledky F-testov, t. j. okrem porovnania variability reziduálnych odchýlok s celkovou variabilitou vysvetlenou regresným modelom pri celkovom F-teste štatistickej významnosti regresného modelu ju tiež porovnáva s variabilitou zodpovedajúcou parciálnym častiam regresného modelu, v našom prípade súhrnnému lineárnemu, kvadratickému vplyvu faktorov a tiež interakcii skúmaných faktorov (Linear, Square a 2-Way Interaction). Súčasťou ANOVY v Minitabe sú tiež F-testy dodatočného príspevku k -tej vysvetľujúcej premennej, kedy je prínos daného k -teho člena (faktora) porovnávaný s príspevkom ostatných $k - 1$ členov (faktorov). Výsledky rozhodnutia o prijatí, resp. vylúčení členov regresného modelu sú vždy totožné s výsledkami t-testov v tabuľke s bodovými odhadmi regresných koeficientov.

Vzhľadom na stupne voľnosti a zaradenie merania v centrálnom bode býva ANOVA v Minitabe štandardne doplnená o test Lack of Fit, ktorý chybu merania Error rozdeľuje na tú, ktorá vznikla v dôsledku merania (Pure Error) a tú, ktorá je spôsobená nedostatočnosťou regresného modelu (Lack of Fit). Ak je súčasťou výstupu test krivosti (Curvature), potom je počítaný dodatočný príspevok tohto člena.

Analysis of Variance

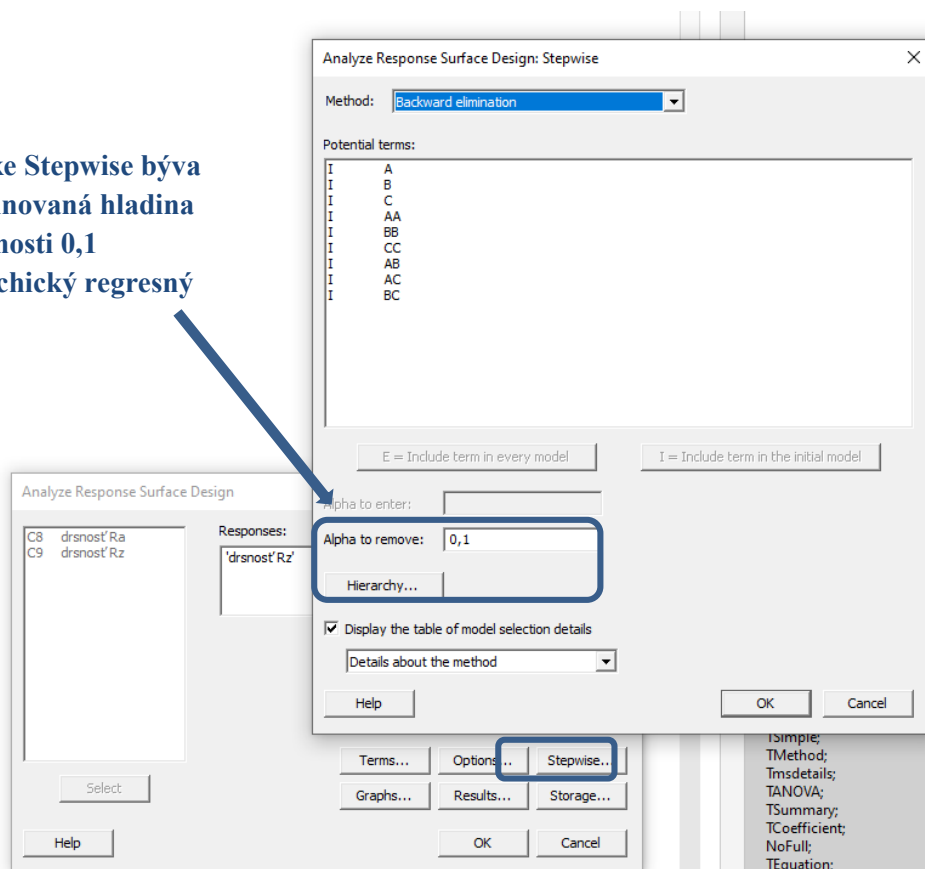
Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	9	1130,44	125,60	50,65	0,000
Linear	3	1098,55	366,18	147,66	0,000
vc	1	0,55	0,55	0,22	0,641
ap	1	13,58	13,58	5,47	0,026
F	1	1084,43	1084,43	437,28	0,000
Square	3	11,39	3,80	1,53	0,227
vc*vc	1	0,05	0,05	0,02	0,883
ap*ap	1	9,55	9,55	3,85	0,059
F*F	1	0,95	0,95	0,38	0,541
2-Way Interaction	3	20,50	6,83	2,75	0,060
vc*ap	1	0,39	0,39	0,16	0,694
vc*F	1	2,73	2,73	1,10	0,302
ap*F	1	17,37	17,37	7,01	0,013
Error	30	74,40	2,48		
Lack-of-Fit	5	15,62	3,12	1,33	0,284
Pure Error	25	58,78	2,35		
Total	39	1204,83			

Obr. 48 Výstup regresnej analýzy pre drsnosť Rz v Minitabe - časť ANOVA

Spätná eliminačná metóda v Minitabe slúži na postupné vylúčenie členov regresného modelu, ktoré nie sú signifikantné, pričom sú opakovane prepočítavané všetky štatistiky. Postupnosť krokov pri jej spustení v Minitabe je zobrazená na obr. 219. Výstup je v našom

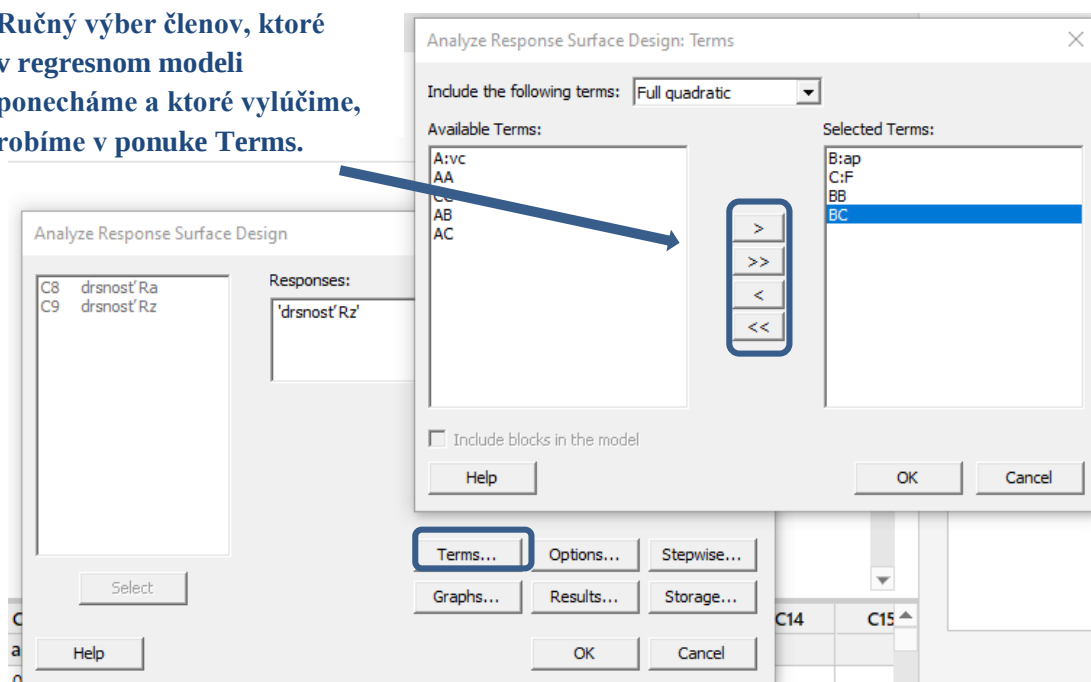
případe rovnaký ako pri ručnom vylúčení štatisticky nevýznamných členov regresného modelu na obr. 220.

V ponuke Stepwise býva preddefinovaná hladina významnosti 0,1 a hierarchický regresný model .



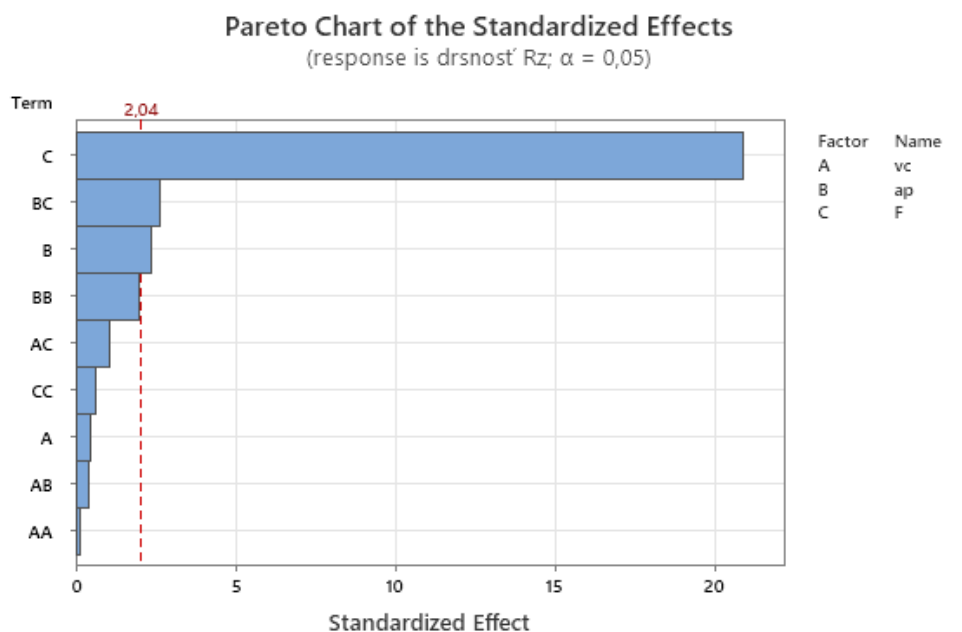
Obr. 49 Spustenie spätnej eliminačnej metódy pri analýze výsledkov v Minitabe

Ručný výber členov, ktoré v regresnom modeli ponecháme a ktoré vylúčime, robíme v ponuke Terms.

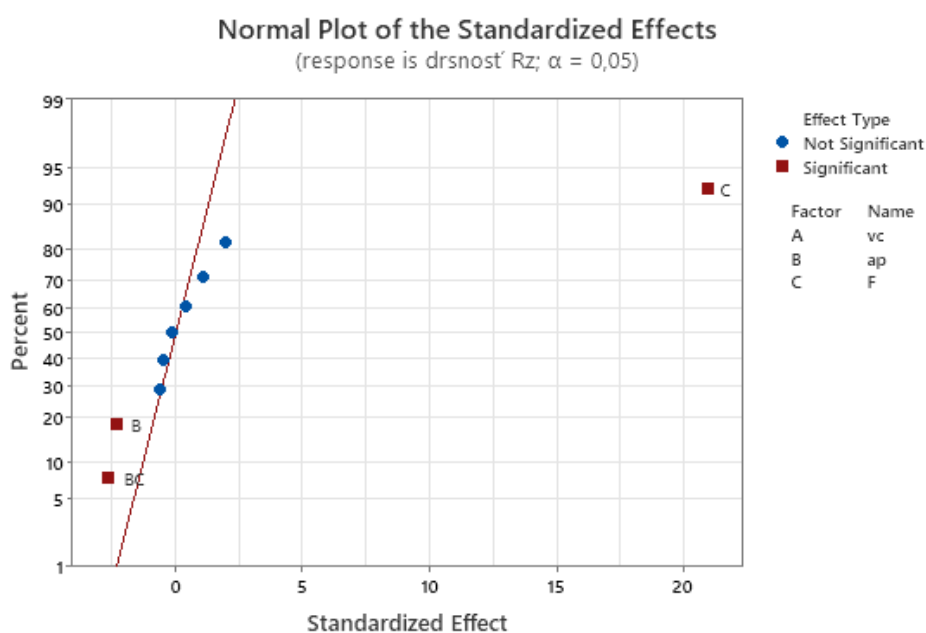


Obr. 50 Ručné vylúčenie štatisticky nevýznamných členov z regresného modelu v Minitabe robíme výberom členov v ponuke Terms pri analýze výsledkov

Kontrolu porovnania veľkosti vplyvu všetkých faktorov a ich interakcií, t. j. všetkých uvažovaných členov regresného modelu na veľkosť odozvy - drsnosti Rz je možné robiť pomocou Pareto grafu (obr. 221) alebo normálneho pravdepodobnostného grafu (obr. 222). Preddefinovaná je hladina významnosti $\alpha = 0,05$. Vzhľadom na to, že štandardizovaný efekt kvadratického člena $ap \cdot ap$ má kritickú hodnotu blízku 2,04 bola hladina významnosti zvýšená na $\alpha = 0,1$ a tento kvadratický člen sme v regresnom modeli ponechali. Prepočítané hodnoty testovacích štatistík ukazujú, že toto rozhodnutie bolo správne.



Obr. 51 Pareto graf pre odozvu drsnosť Rz



Obr. 52 Normálny pravdepodobnostný graf pre štandardizované efekty pre $\alpha = 0,05$

Výstup regresnej analýzy po vylúčení štatisticky nevýznamných členov je na obr. 223 až 225.

Coded Coefficients

Term	Coef	SE Coef	T-Value	P-Value	VIF
Constant	15,240	0,304	50,16	0,000	
ap	-0,705	0,288	-2,45	0,019	1,00
F	6,301	0,288	21,91	0,000	1,00
ap*ap	0,596	0,277	2,15	0,039	1,00
ap*F	-1,042	0,376	-2,77	0,009	1,00

Obr. 53 Výstup Minitabu – časť týkajúca sa regresných koeficientov po vylúčení nevýznamných členov

Analysis of Variance

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	4	1125,80	281,45	124,63	0,000
Linear	2	1098,00	549,00	243,11	0,000
ap	1	13,58	13,58	6,01	0,019
F	1	1084,43	1084,43	480,21	0,000
Square	1	10,42	10,42	4,61	0,039
ap*ap	1	10,42	10,42	4,61	0,039
2-Way Interaction	1	17,37	17,37	7,69	0,009
ap*F	1	17,37	17,37	7,69	0,009
Error	35	79,04	2,26		
Lack-of-Fit	10	20,26	2,03	0,86	0,578
Pure Error	25	58,78	2,35		
Total	39	1204,83			

Obr. 54 Výstup Minitabu – časť ANOVA zodpovedajúca návrhu CCD po vylúčení nevýznamných členov pre odozvu Rz

SUMMARY OUTPUT						
Regression Statistics						
Multiple R	0,966643					
R Square	0,9344					
Adjusted R Square	0,926902					
Standard Error	1,502736					
Observations	40					
ANOVA						
	df	SS	MS	F	Significance F	
Regression	4	1125,795	281,4488	124,6333	3,42935E-20	
Residual	35	79,0375	2,258214			
Total	39	1204,833				
	Coefficient	Standard Err	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%
Intercept	15,2403	0,303862	50,15533	3,43E-34	14,62342284	15,8571679
ap	-0,705	0,287536	-2,45188	0,019344	-1,28873182	-0,12127354
fn	6,301004	0,287536	21,91379	5,04E-22	5,717274455	6,884732728
ap*fn	-1,042	0,375684	-2,77361	0,00883	-1,80467887	-0,27932113
ap*ap	0,595874	0,277387	2,148169	0,038701	0,032748628	1,158998623

Obr. 55 Výstup regresnej analýzy po vylúčení nesignifikantných členov pre odozvu Rz v Exceli

Všetky ponechané členy regresného modelu možno na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ považovať za signifikantné, pretože všetky prepočítané p-hodnoty sú menšie ako 0,05.

Kvalita získaného regresného modelu

Z výstupu Excelu na obr. 225 z tabuľky so všeobecnými štatistikami vyplýva, že nájdený hierarchický regresný model dokáže vysvetliť 93,44% variability nameraných hodnôt odozvy drsnosti Rz. Iba 6,17% variability meraných dát zostalo modelom nevysvetlených. Upravený index determinácie je rovný 92,69%. Štandardná chyba, ktorej sme sa dopustili, je 1,50, pozorovaných hodnôt bolo 40. Z výstupu softvéru Minitabu na obr. 227 vyplýva, že index determinácie týkajúci sa predikcie má hodnotou pred $R^2 = 90,95\%$. Vzhľadom na malé rozdiely medzi týmito charakteristikami, regresný model možno považovať za dobrý. Pozitívne je, že rozdiely medzi týmito charakteristikami sa v novom regresnom modeli v porovnaní s modelom, ktorý obsahoval i nevýznamné členy, zmenšili, upravený index determinácie R^2 narástol. Schopnosť regresného modelu predikovať hodnoty odozvy drsnosti Rz sa v porovnaní s pôvodným regresným modelom zväčšila (obr.226 a 227).

Model Summary

S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)
1,57477	93,83%	91,97%	87,71%

Obr. 56 Kvalita regresného modelu pred vylúčením štatisticky nevýznamných členov vyjadrená pomocou rôznych R square v Minitabe

Model Summary

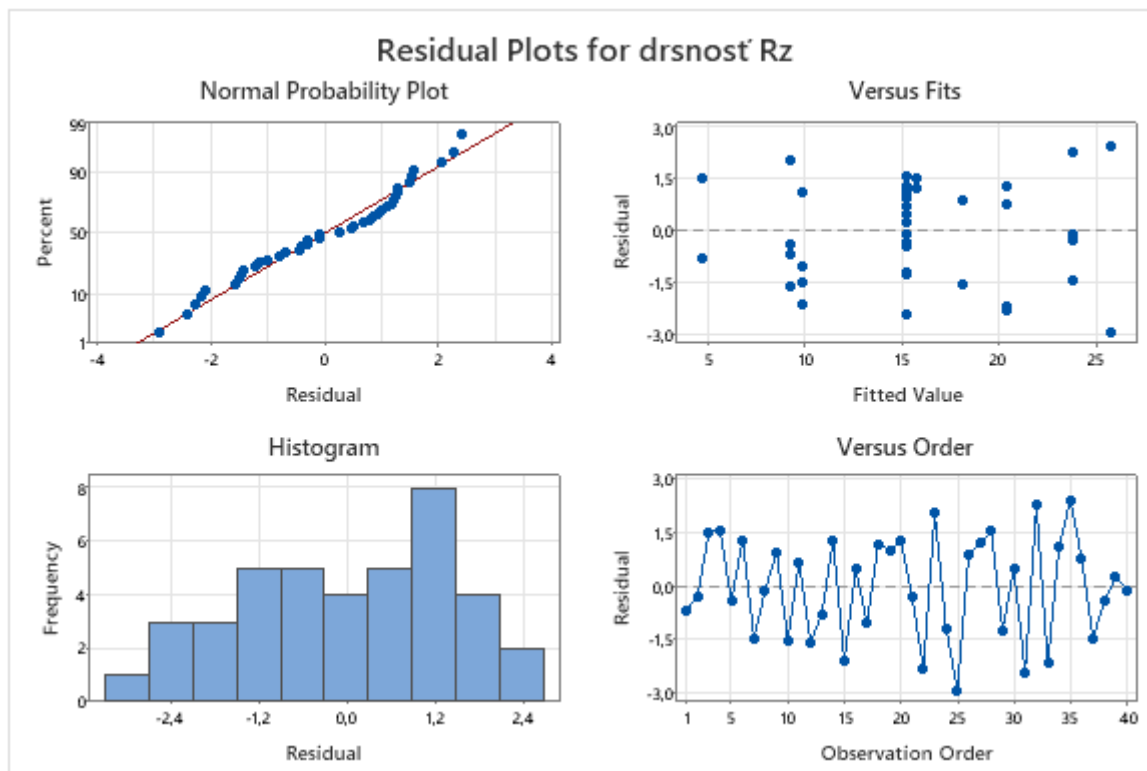
S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)
1,50274	93,44%	92,69%	90,95%

Obr. 57 Kvalita regresného modelu po vylúčení štatisticky nevýznamných členov vyjadrená pomocou rôznych R square v Minitabe

Na základe F-testu štatistickej významnosti regresného modelu s p-hodnotou $3,43 \cdot 10^{-20}$ možno považovať regresný model za štatisticky významný.

Na základe testu Lack of Fit s p-hodnotou 0,578 možno považovať aj nový regresný model za dostatočný.

Súčasťou posúdenia kvality získaného regresného modelu je grafická analýza rezíduí, kedy vizuálne kontrolujeme normalitu a nezávislosť rezíduí. Výstup Minitabu s grafmi rezíduí je vidieť na obr. 228.



Obr. 58 Výstup Minitabu umožňujúci analýzu rezíduí

Vizuálnu kontrolu normálneho rozdelenia rezíduí umožňuje normálny pravdepodobnostný graf (Normal Probability Plot) a histogram (Histogram). Normálny pravdepodobnostný graf zobrazuje rozdelenie rezíduí oproti teoretickým kvantilom normálneho rozdelenia. V ideálnom prípade by mali zobrazené body ležať na červenej diagonálnej priamke, čo interpretujeme ako splnenú normalitu analyzovaných rezíduí. V tomto prípade sa reziduá väčšinou nachádzajú blízko čiary, sú viditeľné určité odchýlky, čo naznačuje mierne odchýlky od normálneho rozdelenia. Tieto odchýlky môžu naznačovať prítomnosť odľahlých hodnôt alebo systematických chýb. Ak na posúdenie normality rezíduí použijeme histogram, tento by mal mať pre normálne rozdelené reziduá približne tvar zvona. Histogram má v prípade malého množstva dát menšiu výpovednú hodnotu ako normálny pravdepodobnostný graf.

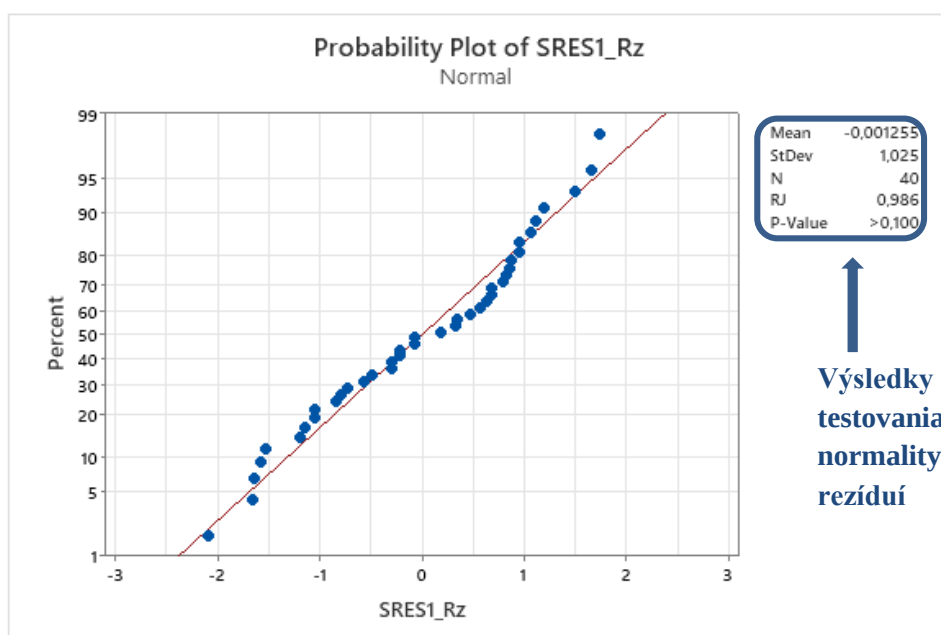
Graf rezíduí verzus fitované hodnoty (Residuals versus Fits) ukazuje, či existuje nejaká systematická závislosť medzi reziduami a predikovanými hodnotami. Ideálne by reziduá mali byť rozptýlené náhodne okolo nulovej osi dodržiavajúc zákon troch sigma. V našom prípade sú

štandardizované rezíduá rozptýlené náhodne okolo vodorovnej osi, všetky sú vzdialené v intervale ± 3 .

Z grafu rezíduí verzus poradie (Residuals vs Order) vieme zistiť, či existuje trend, t. j. nejaká funkčná závislosť v zaznamenanom časovom poradí rezíduí. Ideálne by mali byť hodnoty rezíduí náhodne rozptýlené, čo by naznačovalo absenciu autokorelácie. Správanie rezíduí v čase v našom prípade nenaznačuje žiadny trend. Rezíduá sú náhodne rozptýlené bez vzoru v poradí, čo naznačuje, že nie je prítomná autokorelácia.

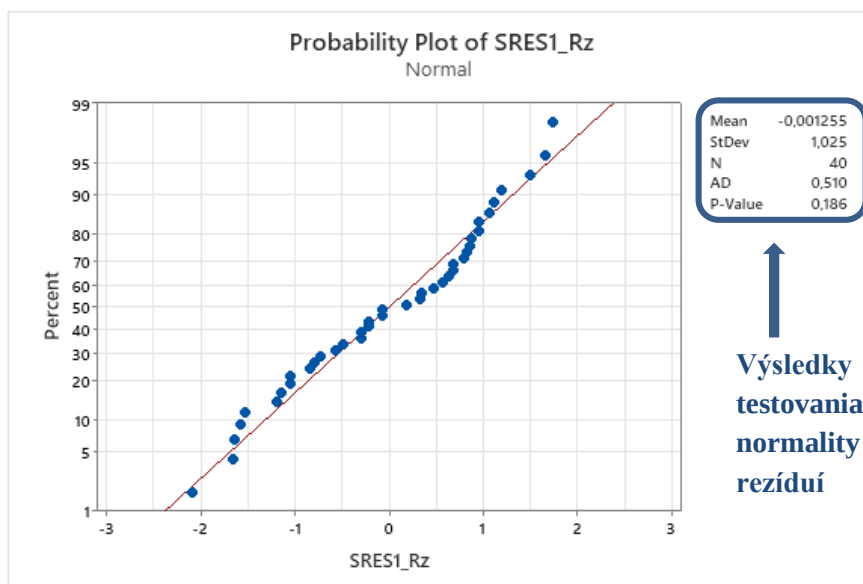
Celkovo možno zhodnotiť, že grafy naznačujú, že model je vhodný a rezíduá majú požadované vlastnosti pre „dobré sediacy“ model.

Overenie normality vypočítaných štandardizovaných rezíduá je možné testovať. Normálny pravdepodobnostný graf spolu s vypočítanou hodnotou testovacej štatistiky Ryan-Joiner testu, p-hodnotou, parametrami rozdelenia a rozsahom súboru môžeme vidieť na obr. 229. Pre analyzovaných 40 hodnôt bola vypočítaná stredná hodnota -0,001255, štandardná odchýlka 1,025. Na základe toho je možné konštatovať, že analyzované dáta (štandardizované rezíduá) spĺňajú parametre štandardizovaného normálneho rozdelenia $N(0;1)$. Hodnota testovacej štatistiky vyjadrená ako korelačný koeficient $r = 0,986$. Pretože vypočítaná p-hodnota $> 0,1$, môžeme prijať nulovú hypotézu H_0 : Dáta pochádzajú z normálneho rozdelenia, a zamietnuť alternatívnu hypotézu H_1 : Dáta nepochádzajú z normálneho rozdelenia.



Obr. 59 Normálny pravdepodobnostný graf s výstupom zvoleného Ryan-Joiner testu

K rovnakému záveru sa dostaneme pomocou Anderson-Darlingov testu (obr. 230). V tomto prípade má testovacia štatistika hodnotu 0,510, pričom p-hodnota je rovná 0,186.

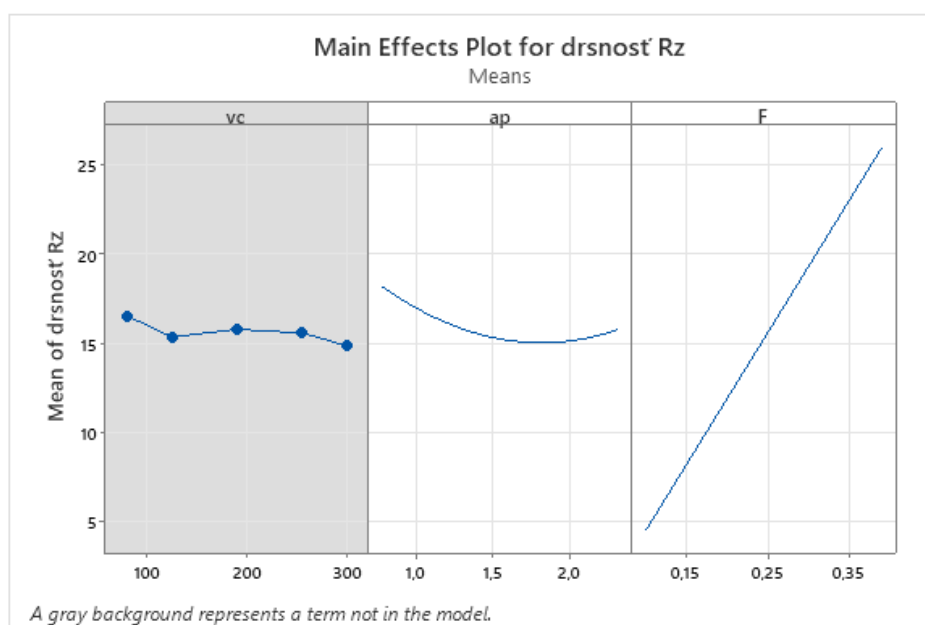


Obr. 60 Normálny pravdepodobnostný graf s výstupom Anderson-Darling testu

Na základe uvedeného možno prijať tvrdenie, že regresný model je „dobrý“.

Grafy hlavných efektov a grafy interakcií faktorov

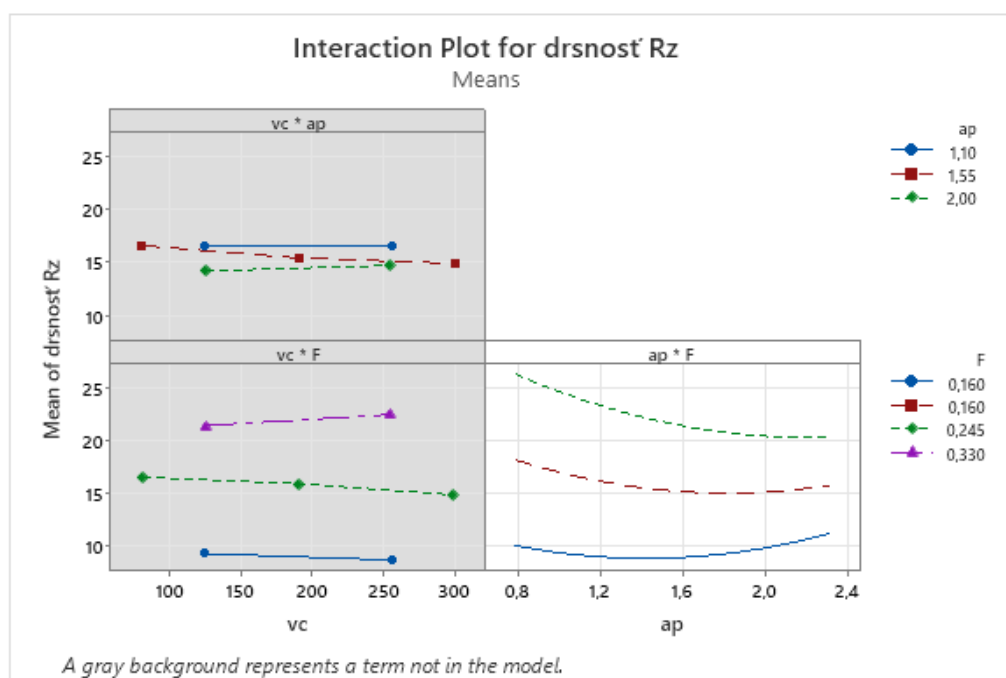
Grafy hlavných efektov na obr. 231 nie sú zobrazené ako úsečky, ale ako krivky alebo lomené čiary, pretože hodnoty odozvy boli merané na viacerých (piatich) úrovniach každého faktora. Z porovnania kriviek vidieť, že najmenší sklon má krivka pri faktore A_vc, t. j. najmenší vplyv na drsnosť Rz pri zanedbaní vplyvu interakcie má rezná rýchlosť v_c . Zakrivenie krivky v tvare paraboly pre hlavný efekt faktora B_ap naznačuje kvadratický vplyv faktora B hĺbka rezu a_p . Zo sklonu, resp. dĺžky úsečky pri faktore C_F možno očakávať, že najväčší vplyv na odozvu bude mať práve faktor C posuv f_n . Grafy hlavných efektov majú veľkú výpovednú hodnotu vtedy, ak nie je prítomná interakcia faktorov.



Obr. 61 Grafy hlavných efektov v Minitabe

Grafy interakcie faktorov z výstupu Minitabu sú na obr. 232. Pomocou testov hypotéz bola identifikovaná ako signifikantná interakcia faktorov hĺbka rezu a_p a posuv f_n . Pri vizuálnej kontrole pri grafoch interakcie by sme však pravdepodobne tento interakčný člen z regresného modelu vylúčili na základe „približne rovnakého“ sklonu (tvaru) kriviek. To ukazuje, že vizuálna kontrola výsledkov nie je vždy dostatočná a testovanie má svoje opodstatnenie.

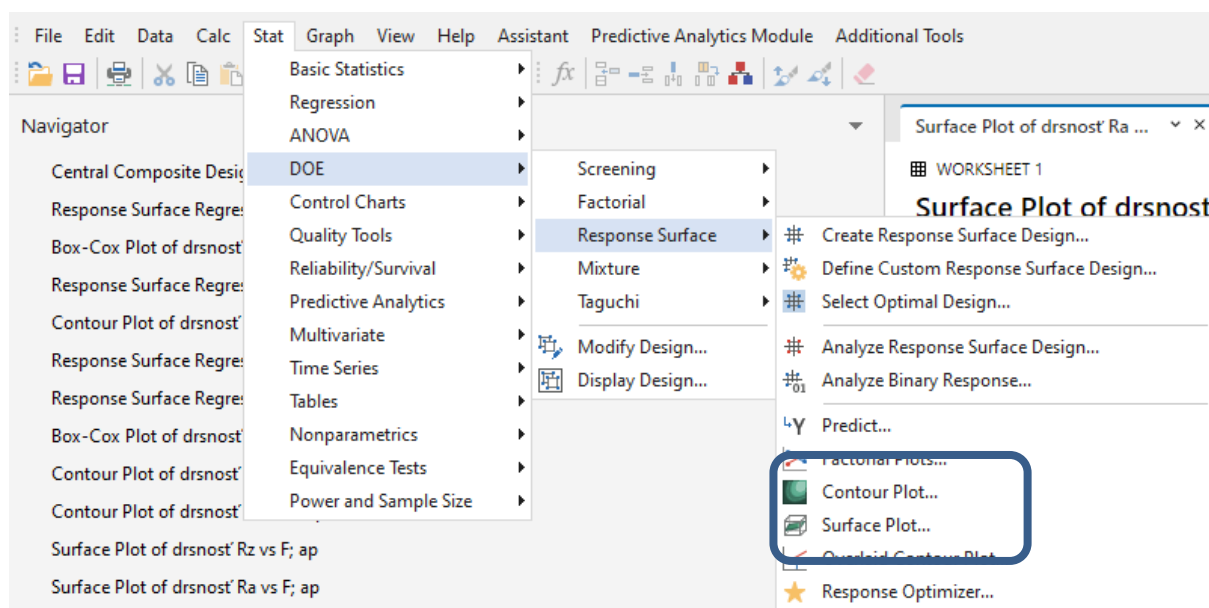
Pri zobrazení grafov hlavných efektov faktorov a grafov interakcií faktorov Minitab ponúka možnosť zobrazit' aj grafy tých efektov faktorov či efektov interakcií, ktoré boli z regresného modelu vylúčené. Vylúčené členy z regresného modelu sú v tomto prípade zobrazené so sivým pozadím a graf je doplnený upozornením, že obsahuje členy regresného modelu, ktoré boli z neho odstránené.



Obr. 62 Grafy interakcie faktorov v Minitabe

Grafické zobrazenie získaných regresných modelov pomocou 3D grafov a ich vrstevnicových grafov

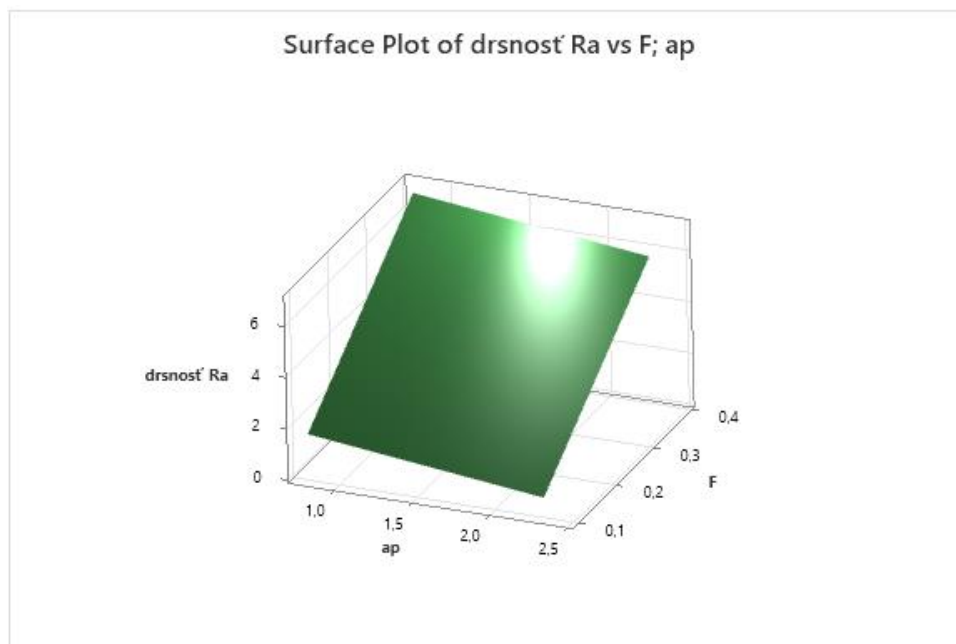
Postup zobrazenia 3D grafu a vrstevnicového grafu v Minitabe je naznačený na obr. 233. Výstupy regresnej analýzy pre odozvu drsnosť R_a sú uvedené na obr. 186 a 190 a pre odozvu drsnosť R_z sú uvedené na obr. 223 a 225. Regresný model v kódovaných jednotkách pre drsnosť R_a má predpis: $R_a = 3,7 - 0,3ap + 1,6fn$. Regresný model v kódovaných jednotkách pre drsnosť R_z má predpis: $R_z = 15,2 - 0,7ap + 6,3fn + 0,6ap^2 - ap \cdot fn$. Ak regresný model obsahuje iba lineárne členy a má dva faktory, výsledný graf lineárnej regresnej funkcie predstavuje rovinu. Zakrivenie odozvovej plochy vzniká v dôsledku prítomnosti interakčných a kvadratických členov v modeli. Pri lineárnom regresnom modeli je vrstevnicový graf premietnutý do roviny experimentálneho priestoru vo forme rovnobežných priamok. V prípade kvadratického modelu alebo modelu s obsahujúcimi interakčnými členmi dochádza v rovine experimentálneho priestoru v prípade zobrazenia vrstevnicového grafu k zakriveniu izočiar. Izolína (izočiar) je čiara, pozdĺž ktorej má zvolená skalárna fyzikálna veličina rovnakú hodnotu.



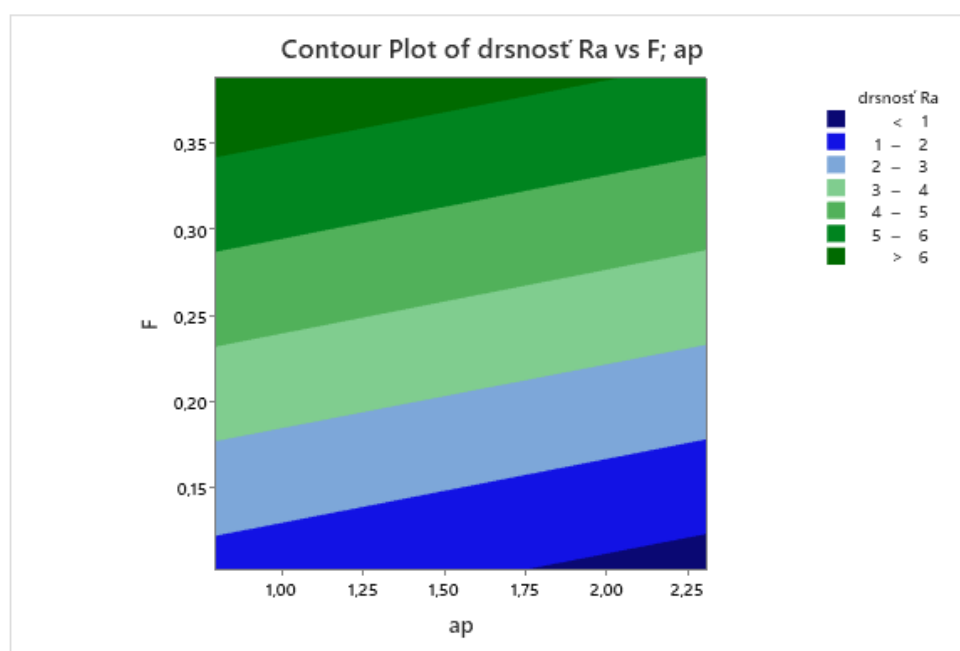
Obr. 63 Postup zobrazenia 3D grafu alebo vrstevnicového grafu v Minitabe

Na obr. 234 je zobrazený 3D graf vyjadrujúci závislosť drsnosti R_a od parametrov B_{ap} (hĺbka rezu a_p) a C_F (posuv f_n). Obr. 235 zobrazuje k nemu prislúchajúci vrstevnicový graf. Regresný model popisujúci závislosť drsnosti R_a od faktorov hĺbka rezu a_p a posuv f_n je lineárny, preto je 3D grafom rovina a vrstevnicový graf obsahuje rovnobežné izopásma oddelené rovnobežnými priamkami (izočiarami). Najväčšiu drsnosť R_a možno očakávať podľa

rozdelenia plochy vrstevnicového grafu v oblasti vľavo hore, naopak najmenšiu drsnosť Ra vpravo dole. To znamená najväčšie hodnoty drsnosti Ra boli namerané pri vysokých hodnotách posuvu f_n a po vylúčení veľkých hĺbok rezu a_p . Najmenšiu drsnosť Ra dostaneme v rámci nášho experimentálneho priestoru, ak bude hĺbka rezu a_p maximálna a posuv f_n čo najmenší.

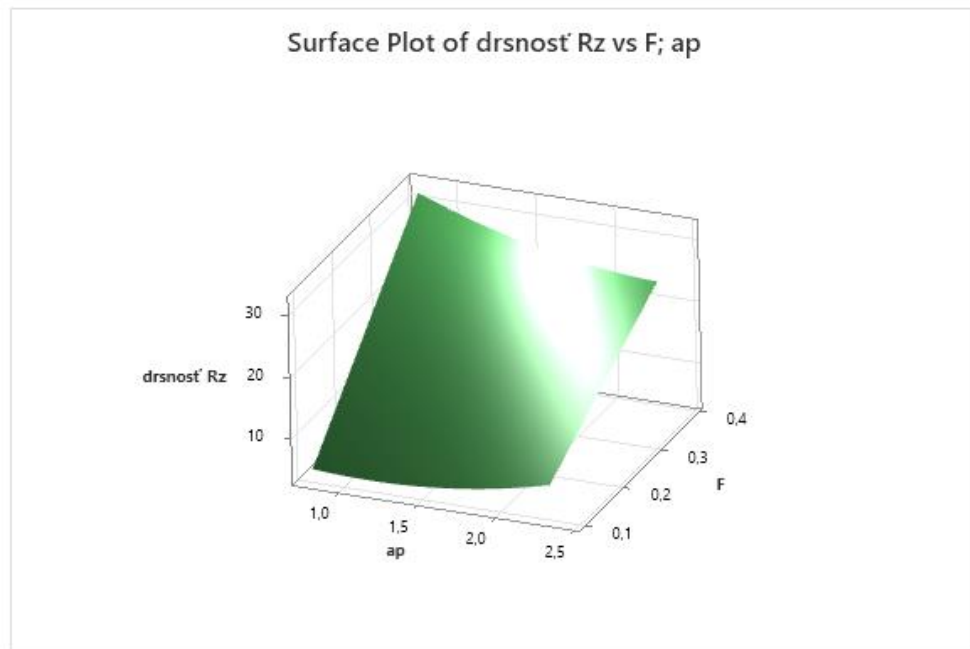


Obr. 64 3D graf vyjadrujúci závislosť drsnosti Ra od parametrov a_p a f_n : $Ra = -0,3ap + 1,6fn$ – výstup Minitabu

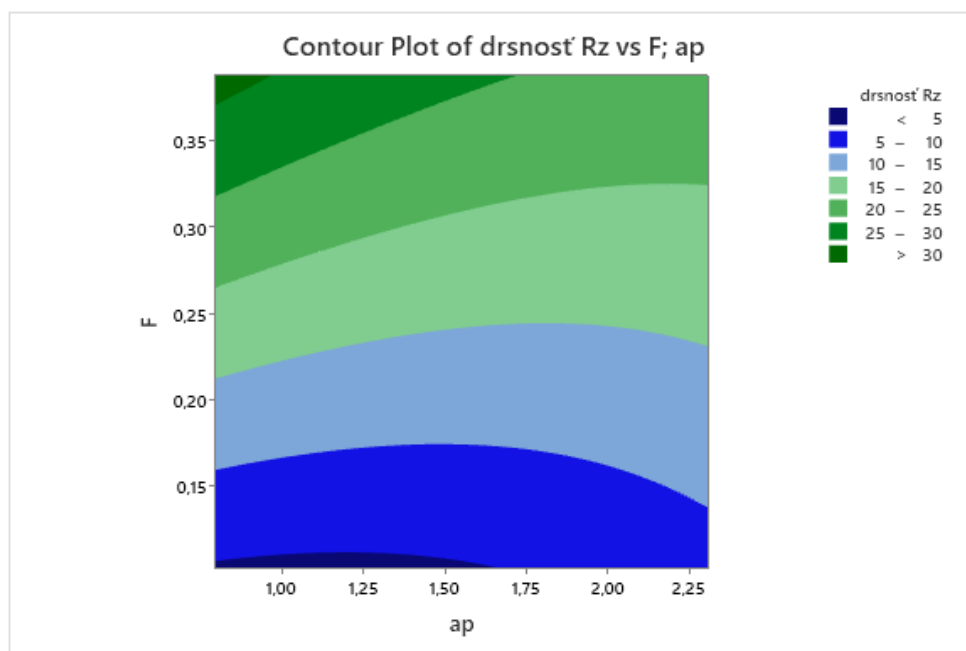


Obr. 65 Vrstevnicový graf pre odozvu drsnosť Ra – výstup Minitabu

Na obr. 236 je zobrazený 3D graf vyjadrujúci závislosť drsnosti Rz od faktorov hĺbky rezu a_p a posuvu f_n . Prvý faktor rezná rýchlosť v_c bolo možné považovať pre drsnosť Rz rovnako ako pre drsnosť Ra za nevýznamný. Obr. 237 zobrazuje vrstevnicový graf prislúchajúci 3D grafu pre drsnosť Rz.



Obr. 66 3D graf vyjadrujúci závislosť drsnosti od parametrov a_p a F : $Rz = 15,2 - 0,7a_p + 6,3f_n + 0,6a_p^2 - a_p \cdot f_n$ – výstup Minitabu



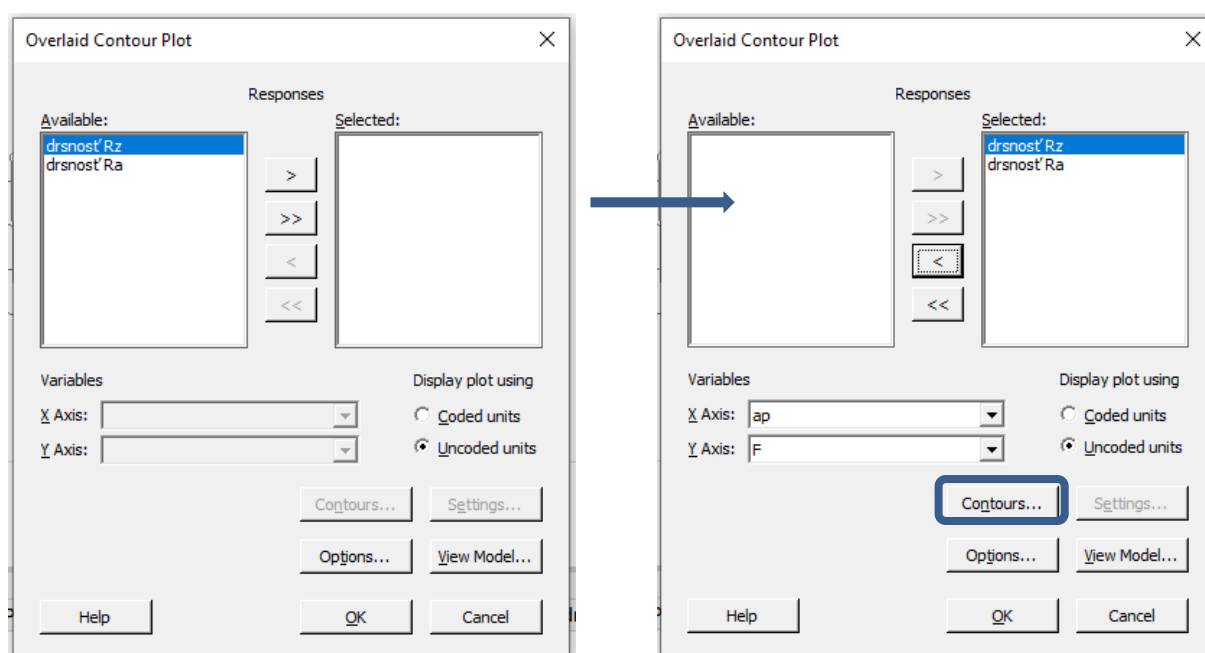
Obr. 67 Vrstevnicový graf pre odozvu drsnosť Rz – výstup Minitabu

Najväčšiu drsnosť Rz možno očakávať podľa rozdelenia plochy vrstevnicového grafu v oblasti vľavo hore, t. j. pri vysokých hodnotách posuvu f_n a minimálnych hodnotách hĺbok rezu a_p . Najmenšia drsnosť Rz je určená minimálnou hodnotou posuvu f_n , ak je súčasne hĺbka rezu a_p v dolnej polovici svojho intervalu.

Na základe zobrazených pásiem s rovnakou hodnotou drsností Ra či Rz (izopásiem) vieme z vrstevnicových grafov jednoduchým spôsobom získať informáciu, na aké hodnoty je potrebná nastaviť úrovně vstupných parametrov – faktorov hĺbka rezu a_p a posuv f_n , aby sledovaná odozva mala požadovanú hodnotu.

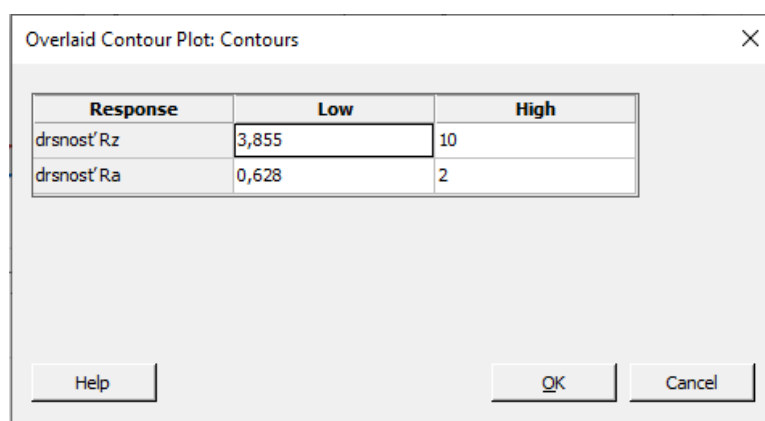
Viackriteriálna optimalizácia využívajúca vrstevnicové grafy

Ak potrebujeme zobraziť prekrývajúce sa vrstevnicové grafy v Minitabe, postupujeme ako je naznačené na obr. 238. Z ponúkaných vyhodnocovaných odoziev vyberieme nami požadované a nastavíme ich požadované hranice. V ponuke *Contours...* v dialógovom okne *Overlaid Contour Plot* nastavíme požadované hranice pre každú zvolenú odozvu. Na obr. 239 boli nastavené hranice od minimálnej nameranej hodnoty po hodnotu drsnosti 10 pre drsnosť Rz a od minimálnej nameranej hodnoty po hodnotu drsnosti 2 pre drsnosť Ra. Tomuto nastaveniu zodpovedá výstup na obr. 240, kde experimentálna oblasť môže byť zobrazená v pôvodných alebo v kódovaných jednotkách.

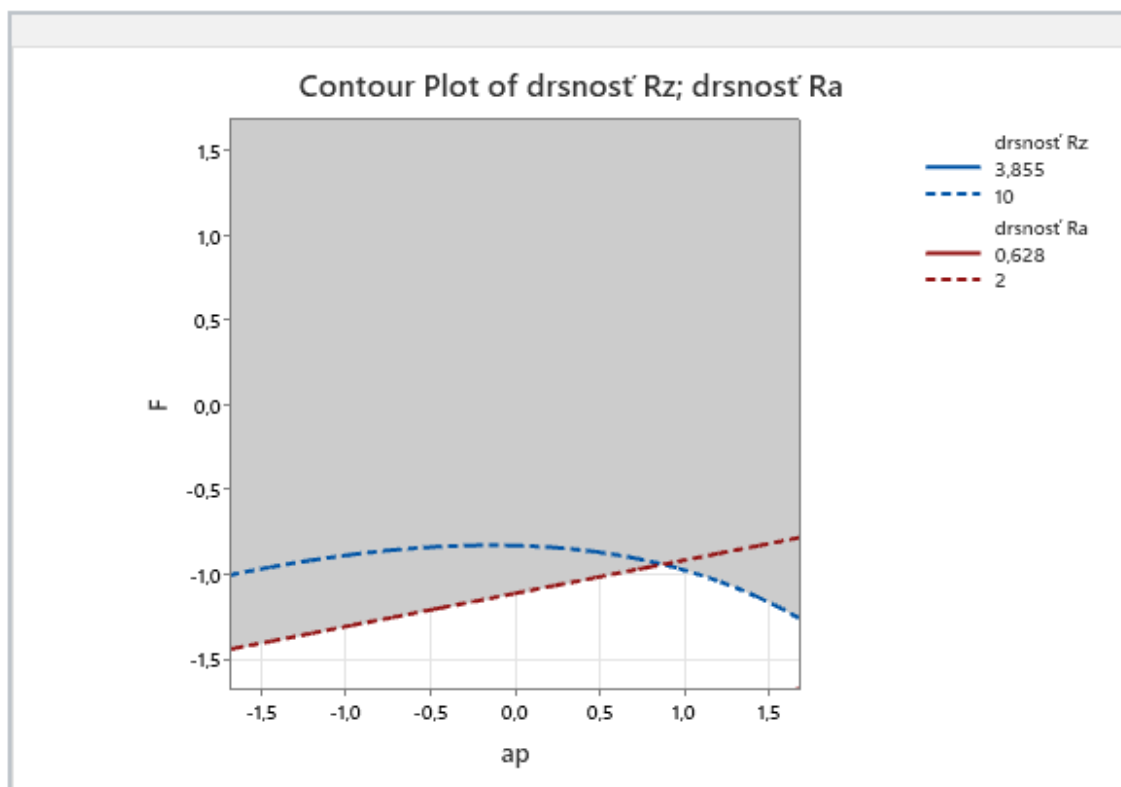


Obr. 68 Postup pri zobrazení prekryvu vrstevnicových grafov v Minitabe

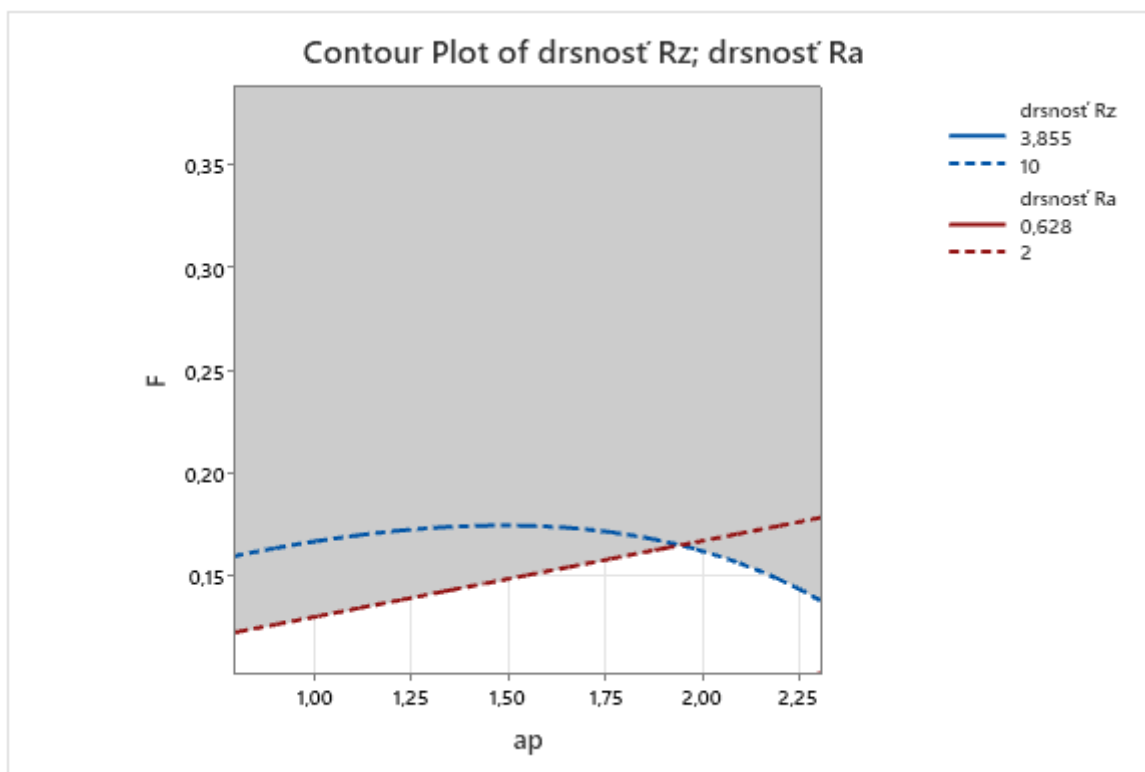
Graf zobrazujúci oblasť, kedy bude mať podľa získaných regresných modelov drsnosť Rz maximálnu hodnotu 10 μm a súčasne drsnosť Ra maximálnu hodnotu 2 μm , je na obr. 240 a 241. Faktory pre zvolenú experimentálnu oblasť sú vo vrstevnicovom grafe na obr. 240 vyjadrené v kódovaných jednotkách. Na obr. 241 je pri rovnakých podmienkach zobrazený experimentálny priestor v pôvodných experimentálnych jednotkách. Na grafe s prekrývajúcimi sa oboma vrstevnicovými grafmi je oblasť spĺňajúca súčasne obe požadované kritériá s bielym pozadím, experimentálny priestor podfarbený sivou farbou nami zadané požiadavky na odozvy nespĺňa.



Obr. 69 Nastavenie hraníc pre zvolené minimálne odozvy Rz a Ra v Minitabe

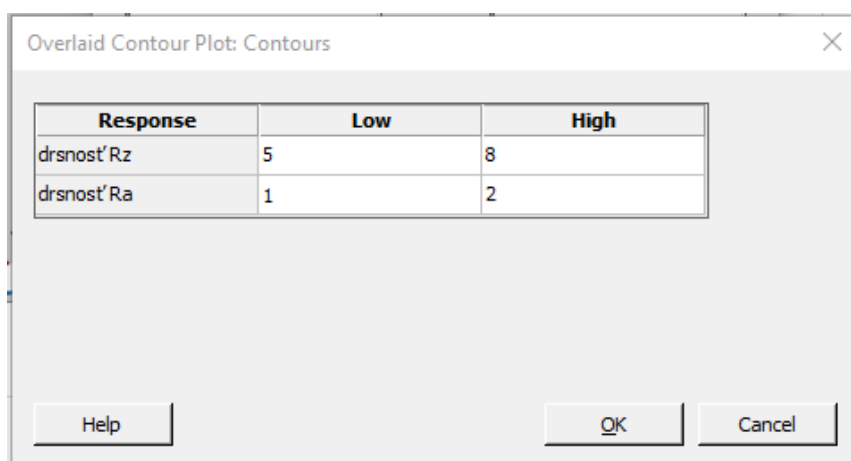


Obr. 70 Graf zobrazujúci oblasť, kedy bude mať drsnosť Rz maximálne hodnotu 10 μm a súčasne drsnosť Ra maximálne hodnotu 2 μm – Overlaid Contour Plot ako výstup Minitabu

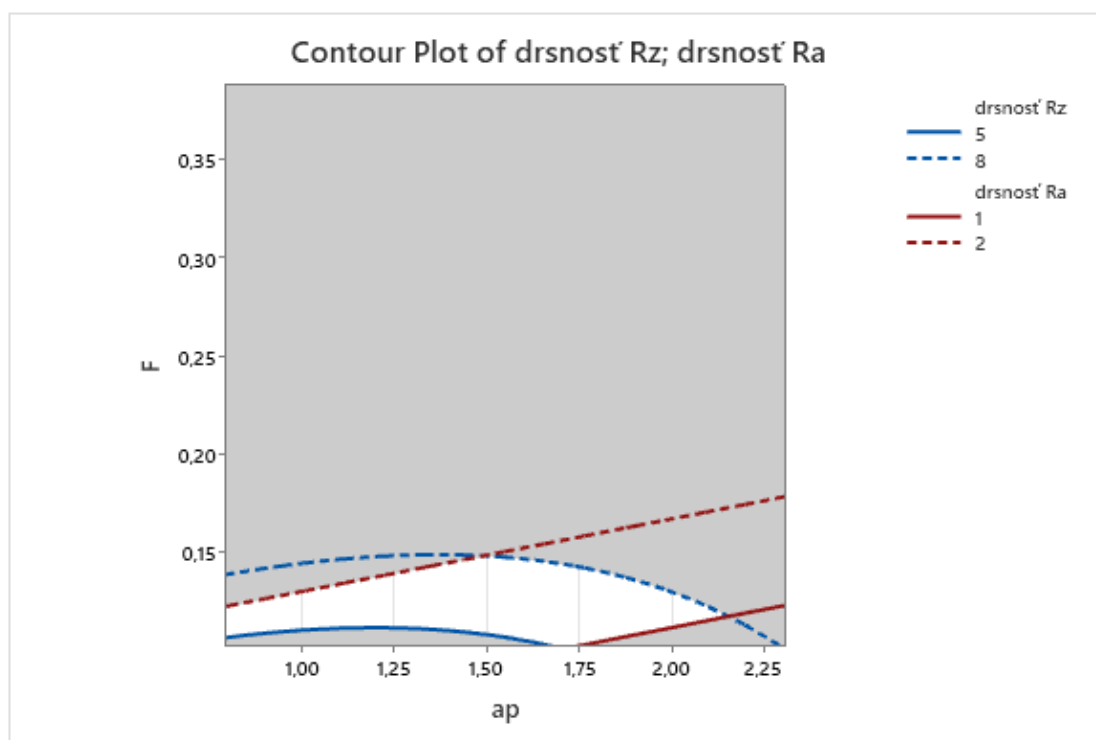


Obr. 71 Graf zobrazujúci oblasť, kedy bude mať drsnosť Rz maximálne hodnotu 10 μm a súčasne drsnosť Ra maximálne hodnotu 2 μm – Overlaid Contour Plot výstup Minitabu

Pri ohrazení hodnôt odozvy Rz od 5 μm do 8 μm a odozvy Ra od 1 μm do 2 μm (obr. 242) vidíme výslednú časť experimentálneho priestoru spĺňajúcu obe podmienky na obr. 243. Pri voľbe bodu z „bieleho“ experimentálneho priestoru (nastavení faktorov na dané úrovne) možno očakávať ako výstup nastavené zvolené hodnoty odoziev, t. j. drsnosti Ra a Rz.



Obr. 72 Nastavenie hraníc pre zvolené odozvy Rz a Ra v Minitabe



Obr. 73 Graf zobrazujúci oblasť, kedy možno očakávať drsnosť Rz z intervalu (5;8) μm a súčasne drsnosť Ra z intervalu (1;2) μm – výstup Minitabu