

SPOJITÁ NÁHODNÁ PREMENNÁ – RIEŠENÝ PRÍKLAD

Nech $f(x) = \begin{cases} cx^2 & \text{pre } x \in \langle -2, 1 \rangle \\ 0 & \text{pre } x \notin \langle -2, 1 \rangle \end{cases}$ je hustota rozdelenia pravdepodobnosti spojitej náhodnej premennej X . Nájdite číslo c , modus, strednú hodnotu, disperziu a smerodajnú odchýlku náhodnej premennej X . Nájdite a znázornite distribučnú a kvantilovú funkciu náhodnej premennej X . Vypočítajte hodnoty vybraných kvantilov, napr. mediánu, dolného kvartilu a 95. percentilu. Graficky znázornite dolný kvartil na grafe funkcie hustoty, distribučnej funkcie a kvantilovej funkcie. Určte pravdepodobnosti $P(X = 1)$, $P(X < 1)$ a $P(0 < X < 3)$.

Riešenie:

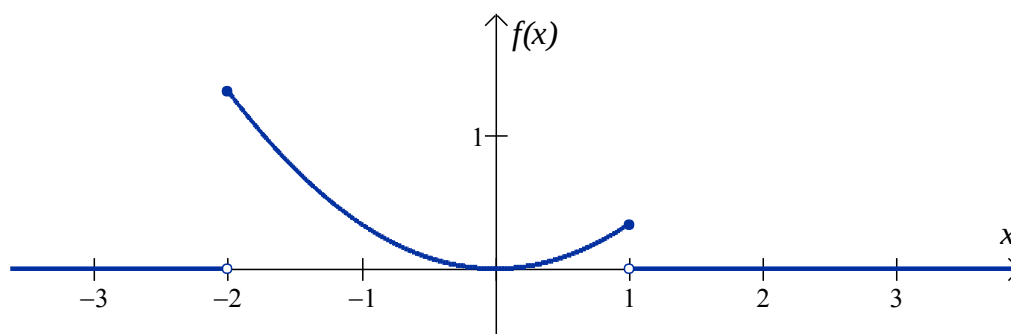
1. Aby sme funkciu $f(x)$ mohli nazvať hustotou rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X , musí pre ňu platiť:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$;

b) pre $\forall x \in R: f(x) \geq 0$.

a) Prvá podmienka vyjadruje, že obsah plochy pod krivkou hustoty rozdelenia pravdepodobnosti musí byť rovný jednej.

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{-2} 0 dx + \int_{-2}^1 cx^2 dx + \int_1^{\infty} 0 dx = \int_{-2}^1 cx^2 dx = \frac{c}{3} (1^3 - (-2)^3) \\ &= \frac{c}{3} (1 + 8) = 3c \Rightarrow c = \frac{1}{3} \end{aligned}$$



Obr. 1 Graf funkcie $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^2 & \text{pre } x \in \langle -2, 1 \rangle; \\ 0 & \text{pre } x \notin \langle -2, 1 \rangle \end{cases}$, ktorá je hustotou rozdelenia pravdepodobnosti spojitej náhodnej premennej X .

b) Vidíme, že je splnená aj druhá podmienka, t. j. že $f(x) \geq 0$ pre $\forall x \in R$, teda žiadna časť grafu funkcie $f(x)$ neleží pod x -ovou osou.

2. Modus $Mo(X)$ spojitej náhodnej premennej X je definovaný ako číslo, v ktorom funkcia hustoty rozdelenia pravdepodobnosti tejto spojitej náhodnej premennej X nadobúda svoje ostré lokálne maximum. Z grafu funkcie $f(x)$ vidíme, že funkcia má hľadaný lokálny extrém v čísle $x = -2$ a tiež v $x = 1$. Preto má funkcia $f(x)$ dva modusy $Mo_1(X) = -2$ a $Mo_2(X) = 1$.

3. Stredná hodnota $E(X)$ náhodnej premennej X je definovaná ako prvý začiatkový moment $z_1(X)$: $E(X) = z_1(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^1 f(x) dx = \int_{-\infty}^{-2} x \cdot 0 dx + \int_{-2}^1 x \cdot \frac{1}{3} x^2 dx + \int_1^{\infty} x \cdot 0 dx = \int_{-2}^1 \frac{1}{3} x^3 dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-2}^1 = \frac{1}{12} (1^4 - (-2)^4) = \frac{1}{12} (1 - 16) = -\frac{5}{4}$

Stredná hodnota predstavuje pomyselnú x-ovú súradnicu ťažiska plošnej dosky pod krivkou hustoty rozdelenia pravdepodobnosti.

4. Disperziou alebo rozptylom $D(X)$ spojitej náhodnej premennej X nazývame druhý centrálny moment $c_2(X)$, t. j. počítame $c_k(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^k f(x) dx$ pre $k = 2$. Pri výpočte k -teho centrálného momentu vždy potrebujeme poznať číselnú hodnotu $E(X)$. Disperzia

$$\begin{aligned} D(X) = c_2(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \left(-\frac{5}{4} \right) \right)^2 f(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{-2} \left(x + \frac{5}{4} \right)^2 \cdot 0 dx + \int_{-2}^1 \left(x + \frac{5}{4} \right)^2 \cdot \frac{1}{3} x^2 dx + \int_1^{\infty} \left(x + \frac{5}{4} \right)^2 \cdot 0 dx = \\ &= \int_{-2}^1 \left(x + \frac{5}{4} \right)^2 \cdot \frac{1}{3} x^2 dx = \frac{1}{3} \int_{-2}^1 \left(x^2 + \frac{5}{2} x + \frac{25}{16} \right) \cdot x^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \int_{-2}^1 \left(x^4 + \frac{5}{2} x^3 + \frac{25}{16} x^2 \right) dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^5}{5} + \frac{5}{2} \frac{x^4}{4} + \frac{25}{16} \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^1 \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1^5}{5} + \frac{5}{2} \frac{1^4}{4} + \frac{25}{16} \frac{1^3}{3} - \left(\frac{(-2)^5}{5} + \frac{5}{2} \frac{(-2)^4}{4} + \frac{25}{16} \frac{(-2)^3}{3} \right) \right) = \frac{51}{80} \end{aligned}$$

Poznámka: Na výpočet disperzie je možné tiež použiť vzťah $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, tzv. vetu o výpočte.

$E(X^2)$ počítame ako druhý začiatočný moment $E(X^2) = z_2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{-2} x^2 \cdot$

$$0 dx + \int_{-2}^1 x^2 \cdot \frac{1}{3} x^2 dx + \int_1^{\infty} x^2 \cdot 0 dx = \int_{-2}^1 \frac{1}{3} x^4 dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^5}{5} \right]_{-2}^1 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} - \left(-\frac{32}{5} \right) \right) = \frac{33}{15} = \frac{11}{5}$$

$$D(X) = \frac{11}{5} - \left(-\frac{5}{4} \right)^2 = \frac{11}{5} - \frac{25}{16} = \frac{51}{80}$$

5. Smerodajná odchýlka $s = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{51}{80}}$.

6. Distribučná funkcia náhodnej premennej X $F(x)$ je definovaná pre $\forall x \in R$ ako nevlastný integrál $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

$$x \in (-\infty, -2): F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$$

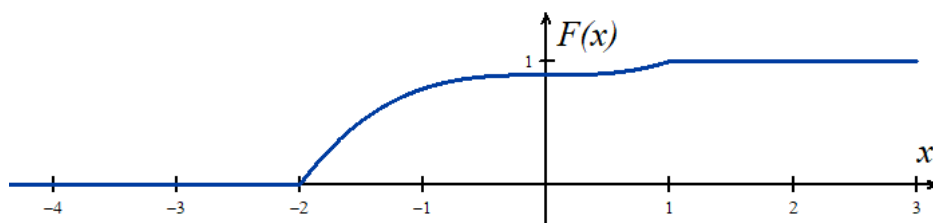
$$x \in \langle -2, 1 \rangle: F(x) = \int_{-\infty}^{-2} 0 dt + \int_{-2}^x \frac{1}{3} t^2 dt = 0 + \frac{1}{3} \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-2}^x = \frac{1}{9} (x^3 - (-8)) = \frac{x^3 + 8}{9}$$

$$x \in (1, \infty): F(x) = \int_{-\infty}^{-2} 0 dt + \int_{-2}^1 \frac{1}{3} t^2 dt + \int_1^x 0 dt = 0 + \frac{1}{3} \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-2}^1 = \frac{1}{9} (1^3 - (-2)^3) = 1$$

Vypočítané zapíšeme nasledovným spôsobom:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \in (-\infty, -2); \\ \frac{x^3 + 8}{9} & \text{pre } x \in \langle -2, 1 \rangle; \\ 1 & \text{pre } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Možno konštatovať, že táto distribučná funkcia je na celom definičnom obore, t. j. na množine R spojitá, nezáporná, neklesajúca a jej obor hodnôt $F(x) \in \langle 0, 1 \rangle$ pre $\forall x \in R$. Jej graf môžeme vidieť na nasledujúcom obrázku 2.

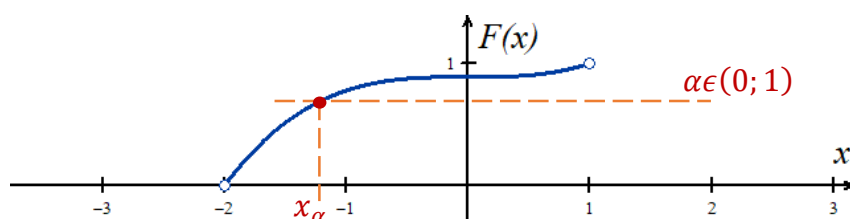


Obr. 2. Graf distribučnej funkcie $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \in (-\infty, -2); \\ \frac{x^3 + 8}{9} & \text{pre } x \in \langle -2, 1 \rangle; \\ 1 & \text{pre } x \in (1, \infty) \end{cases}$ prislúchajúci

skúmanej spojitej náhodnej premennej X

7. Kvantilová funkcia náhodnej premennej X $F^{-1}(\alpha)$ je definovaná pre všetky $\alpha \in (0; 1)$. Je inverzná k tej časti distribučnej funkcie $F(x)$, ktorá je rastúca na množine M a zobrazuje ju na interval $(0, 1)$. Pre zvolenú časť platí, že $D(F) = (-2; 1) = H(F^{-1})$ a $H(F) = (0; 1) = D(F^{-1})$.

Parameter α volíme z intervalu $(0, 1)$, t. j. robíme tzv. α rez na zvolenej časti distribučnej funkcie (obr.3).



Obr. 3 α rez vyjadruje, že pod krivkou hustoty volíme „zl'ava“ veľkosť plochy α

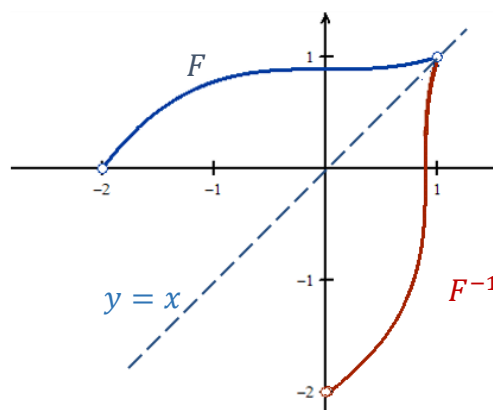
$$\alpha = \frac{x_\alpha^3 + 8}{9}$$

$$9\alpha = x_\alpha^3 + 8$$

$$x_\alpha^3 = 9\alpha - 8$$

$$x_\alpha = \sqrt[3]{9\alpha - 8} \Rightarrow F^{-1}(\alpha) = \sqrt[3]{9\alpha - 8} \text{ pre } \alpha \in (0; 1)$$

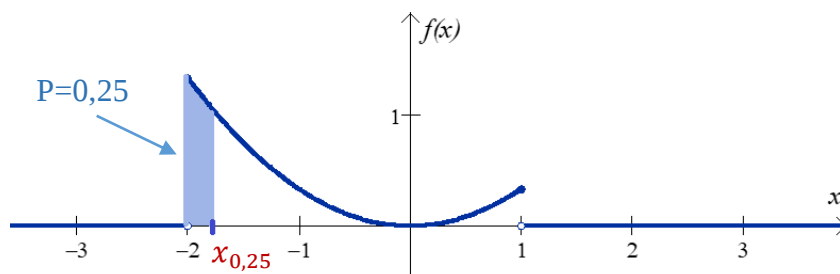
Graf kvantilovej funkcie F^{-1} je k vybranej časti grafu distribučnej funkcie F symetrický podľa priamky $y = x$ (obr.4).



Obr. 4 Zobrazenie distribučnej a kvantilovej funkcie

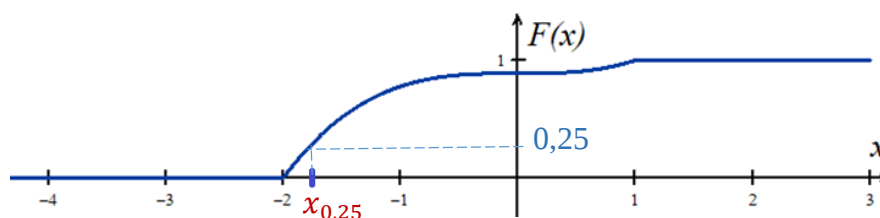
8. Na výpočet hodnoty ľubovoľných kvantilov môžeme použiť kvantilovú funkciu, napríklad medián Me , ktorý označujeme $x_{0,5} = F^{-1}(0,5) = \sqrt[3]{9 \cdot 0,5 - 8} \doteq -1,52$, dolný kvartil $x_{0,25} = F^{-1}(0,25) = \sqrt[3]{9 \cdot 0,25 - 8} \doteq -1,79$, alebo 95. percentil $x_{0,95} = F^{-1}(0,95) = \sqrt[3]{9 \cdot 0,95 - 8} \doteq 0,82$.

9. Ak chceme zobrazit' približnú hodnotu dolného kvartilu na grafe funkcie hustoty rozdelenia pravdepodobnosti $f(x)$, musíme plochu pod touto krivkou rozdeliť na 4 rovnako veľké časti s plošným obsahom 0,25. Prvá z nich, t. j. plocha zľava je ohraničená na x -ovej osi dolným kvartilom $x_{0,25}$ (obr. 5).



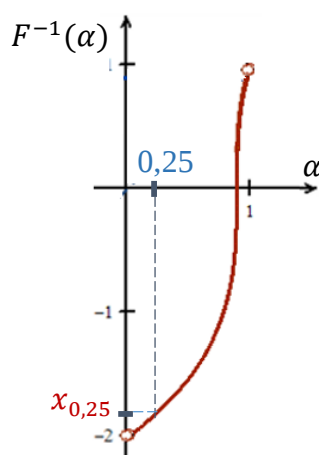
Obr. 5 Zobrazenie dolného kvartilu $x_{0,25}$ na grafe funkcie hustoty rozdelenia pravdepodobnosti $f(x)$

Pri zobrazení dolného kvartilu na grafe distribučnej funkcie vyznačená veľkosť plochy 0,25 pod krivkou $f(x)$ zodpovedá funkčnej hodnote $F(x)$, t. j. číslu 0,25 na y -ovej osi. K nej vieme nájsť na x -ovej osi zodpovedajúcu hodnotu dolného kvartilu $x_{0,25}$. (obr.6)



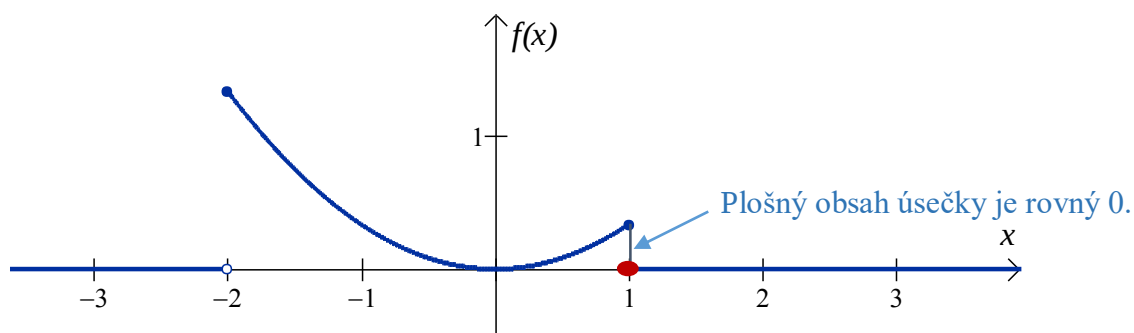
Obr. 6 Zobrazenie dolného kvartilu $x_{0,25}$ na grafe distribučnej funkcie $F(x)$

Na výpočet a rovnako aj na zobrazenie ľubovoľného kvantilu možno použiť kvantilovú funkciu, pričom hodnota kvantilu je rovná funkčnej hodnote kvantilovej funkcie pre nami zvolené α z intervalu $(0,1)$. Zobrazenie dolného kvartilu $x_{0,25} = F^{-1}(0,25)$ na grafe kvantilovej funkcie je na obr. 7.



Obr. 7 Zobrazenie dolného kvartilu na grafe kvantilovej funkcie $F^{-1}(\alpha)$

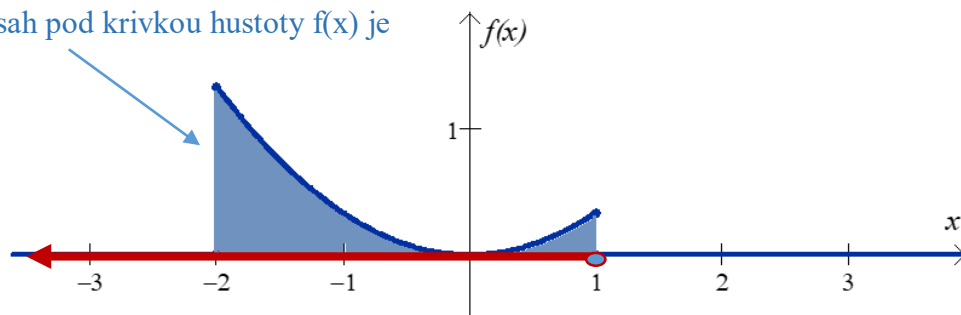
10. Pri výpočte pravdepodobnosti toho, že spojitá náhodná premenná X bude spĺňať určitú podmienku, vieme číselnú hodnotu prislúchajúcu tejto pravdepodobnosti vypočítať ako veľkosť plochy pod krivkou hustoty pravdepodobnosti pre rozsah X vyplývajúci zo zadanej podmienky. Napríklad pri výpočte pravdepodobnosti toho, že náhodná premenná nadobúda hodnotu 1, počítame plošný obsah úsečky, t. j. $P(X = 1) = \int_1^1 \left(\frac{1}{3}x^2\right) dx = 0$. (obr. 8)



Obr. 8 Pravdepodobnosť toho, že spojitá náhodná nadobúda jedinú konkrétnu hodnotu z intervalu $\langle -2; 1 \rangle$ je nulová.

Pravdepodobnosť toho, že náhodná premenná nadobúda hodnoty menšie ako 1, je rovná jednej, pretože daná podmienka zahŕňa celý plošný obsah pod krivkou $f(x)$, t. j. počítame $P(X < 1) = \int_{-\infty}^{-2} 0 dx + \int_{-2}^1 \left(\frac{1}{3}x^2\right) dx = 1$. (obr. 9)

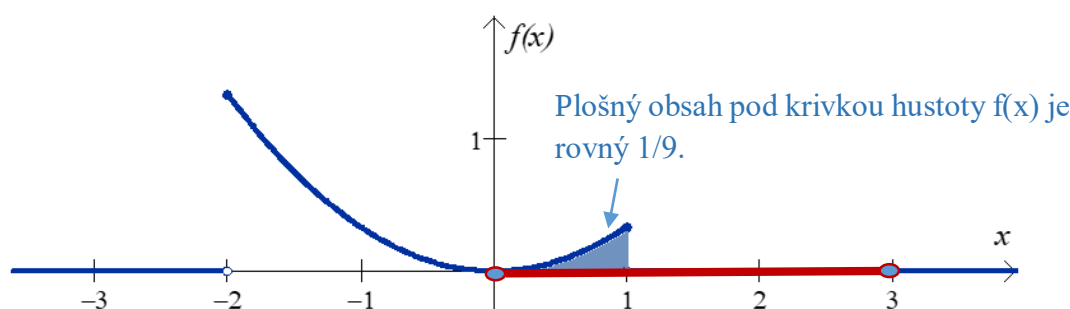
Plošný obsah pod krivkou hustoty $f(x)$ je rovný 1.



Obr. 9 Pravdepodobnosť toho, že spojitá náhodná nadobúda hodnoty menšie ako 1, je rovná plošnému obsahu pod krivkou hustoty rozdelenia pravdepodobnosti.

Pravdepodobnosť toho, že náhodná premenná nadobúda hodnoty väčšie ako 0 a súčasne menšie ako 3, je rovná veľkosti plochy vyznačenej na obr. 10.

$$P(0 < X < 3) = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} x^2\right) dx + \int_1^3 0 dx = \frac{1}{9}.$$



Obr. 10 Pravdepodobnosť toho, že spojitá náhodná nadobúda hodnoty od 0 po 3, je rovná vyznačenému plošnému obsahu pod krivkou hustoty rozdelenia pravdepodobnosti.