

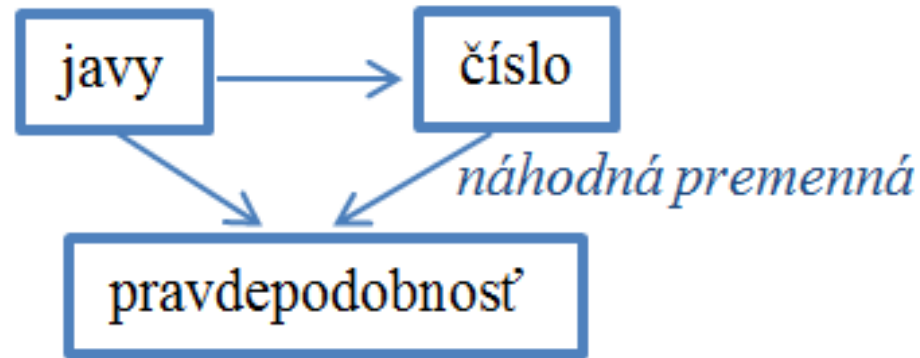
NÁHODNÁ PREMENNÁ

- zobrazenie z množiny elementárnych javov do množiny reálnych čísel

Náhodná premenná (náhodná veličina)

- je funkcia, ktorá zobrazuje elementárne javy $E_i \in \Omega$ (abstraktné pojmy) na reálne čísla $\mathbb{R}$;
- označujeme veľkými písmenami $X, Y, Z...$

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$



Ak priradíme číslam zodpovedajúce pravdepodobnosti, vznikne tzv. náhodná premenná.

Zápis javov pomocou náhodnej premennej

Zápisom $X = x$, ktorým zapisujeme že, náhodná premenná X nadobúda číselnú hodnotu x , súčasne rozumieme jav zložený z elementárnych javov $E_i \in \Omega$, ktorým náhodná premenná X priradí reálne číslo $X(E_i) = x$, t. j.

$$X = x = \{\forall E_i \in \Omega: X(E_i) = x\}.$$

Podobne:

$$X < x = \{\forall E_i \in \Omega: X(E_i) < x\},$$

$$X > x = \{\forall E_i \in \Omega: X(E_i) > x\},$$

$$(a < X < b) = \{\forall E_i \in \Omega: a < X(E_i) < b\}, \dots \text{kde } x, a, b \in R$$

Význam zavedenia náhodnej premennej:

umožňuje popísať abstraktný priestor elementárnych javov pomocou čísiel (s číslami sa ľahšie pracuje)

Podľa oboru hodnôt M rozlišujeme dva typy náhodnej premennej:

1. **diskrétna náhodná premenná DNP** – je náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnoty, ktoré tvoria konečnú alebo spočítateľnú množinu čísel;

počet členov domácnosti - $M=\{1,2,3 \dots\}$

počet porúch stroja počas pracovnej zmeny - $M=\{0,1,2,3 \dots\}$

počet chlapcov v rodine s 3 deťmi - $M=\{0,1,2,3\}$

2. **spojitá náhodná premenná SNP** – je náhodná premenná, ktorá nadobúda ľubovoľnú hodnotu z číselného intervalu.

doba čakania na bus, ktorý chodí v pravidelných 5-minútových intervaloch - $M=(0, 5)$

rozmer súčiastky - $M=(0, \infty)$

Zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej

Náhodná premenná bude úplne opísaná, ak poznáme

1. obor hodnôt náhodnej premennej M a
2. pravidlo, ktoré každej hodnote DNP alebo každému intervalu SNP vie priradiť prislúchajúcu pravdepodobnosť.

Hovoríme, že poznáme rozdelenie (zákon rozdelenia) pravdepodobnosti náhodnej premennej.

Zákon rozdelenia pravdepodobnosti DNP („jej chovanie sa“) môže byť zadaný:

tabuľkou – radom rozdelenia pravdepodobnosti

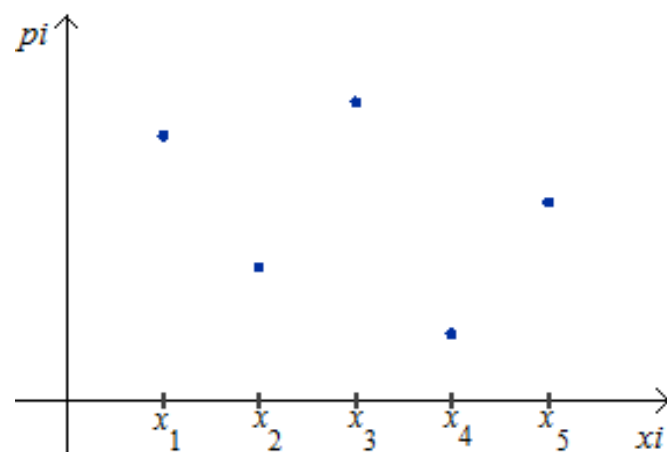
x_i	x_1	x_2	x_3		x_n		Σ
p_i	p_1	p_2	p_3		p_n		1

Musí platiť $\sum p_i = 1$.

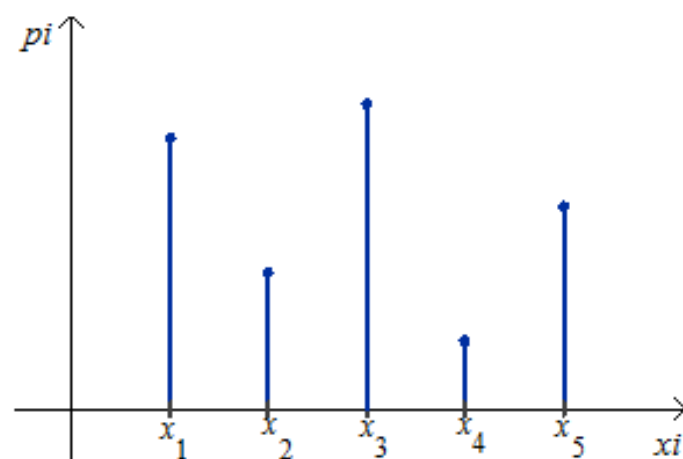
matematickou formulou (pravdepodobnostnou funkciou $p(x)=P(X=x)$)

$$p(x) = \begin{cases} c \cdot \frac{x}{2} & \text{pre } x = 2, 4, 6, 8 \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

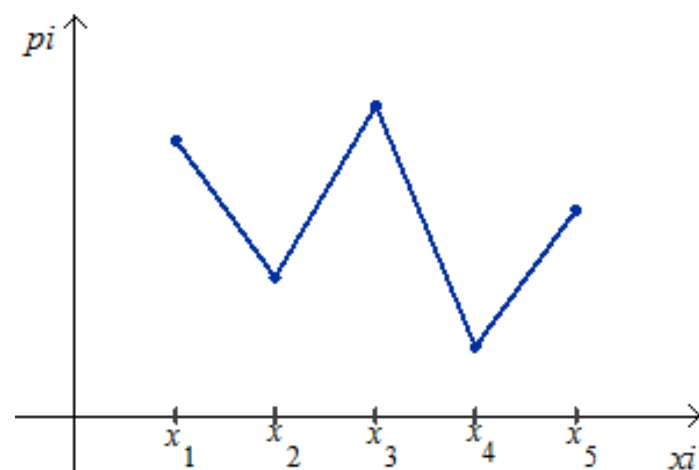
graficky



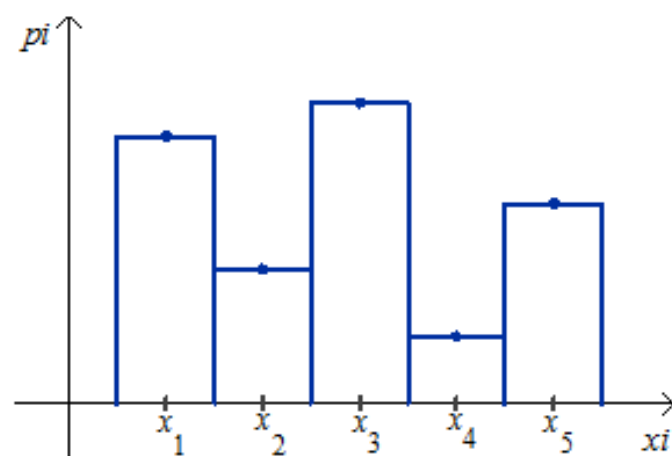
bodovým grafom



paličkovým grafom



polygónom



histogramom

Príklad

Nech náhodná premenná X znamená minimálnu hodnotu padnutých bodov na kocke pri hode dvoma hracími kockami. Nájdite zákon rozdelenia pravdepodobnosti danej náhodnej premennej X .

Riešenie:

X - minimálnu hodnotu padnutých bodov pri hode dvoma hracími kockami
priestor elementárnych javov Ω :

						
	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

zákon rozdelenia pravdepodobnosti
náhodnej premennej X :

$$M = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

x_i	1	2	3	4	5	6	Σ
p_i	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{36}{36} = 1$

Príklad

Nech náhodná premenná X znamená výšku mojej výhry pri hádzaní hracou kockou pri dodržaní nasledujúcich pravidiel:

- ak hodím počet bodov 1 alebo 2 vyhrávam 2 €;
- ak hodím počet bodov 3, 4, 5 vyhrávam 5 €;
- ak hodím počet bodov 6, prehrávam 10 €.

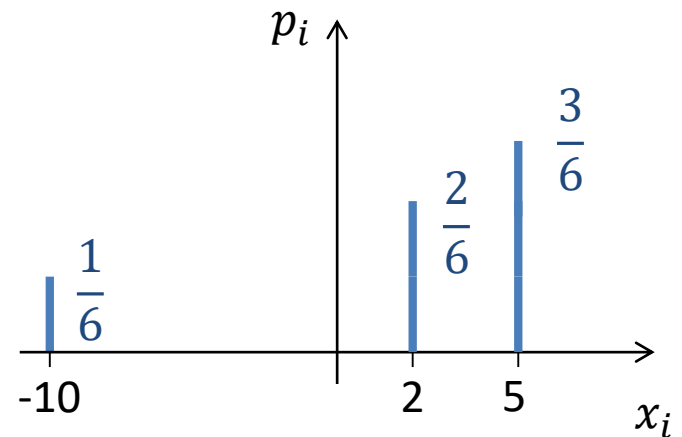
Nájdite zákon rozdelenia pravdepodobnosti takto definovanej náhodnej premennej X .

Riešenie:

X – výška mojej výhry

$M = \{-10; 2; 5\}$

x_i	-10	2	5	Σ
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	1



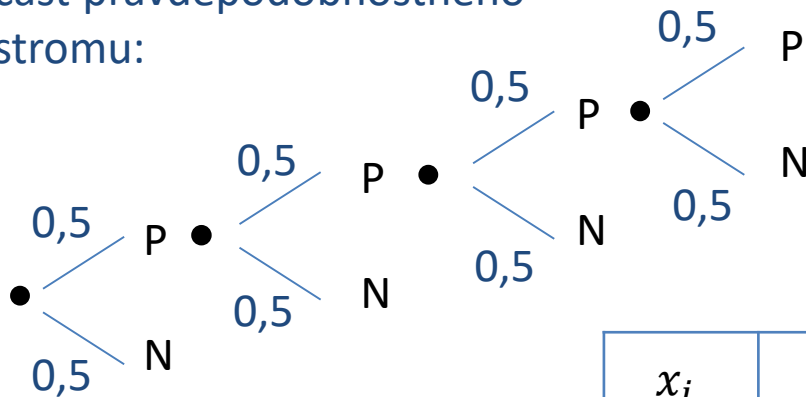
Príklad

Auto musí prejsť 4 križovatky riadené nezávislými semaformi. Na každom zo semaforov svieti s rovnakou pravdepodobnosťou zelená alebo červená (oranžovú neuvažujeme). Náhodná premenná udáva počet prejdených križovatiek do prvej križovatky, kedy auto musí zastaviť. Nájdite zákon rozdelenia pravdepodobnosti takto definovanej náhodnej premennej X .

Riešenie:

X - počet prejdených križovatiek do prvej križovatky, kedy auto musí zastaviť;

časť pravdepodobnostného stromu:



$$M = \{0; 1; 2; 3; 4\}$$

x_i	0	1	2	3	4	Σ
p_i	0,5	$0,5^2$	$0,5^3$	$0,5^4$	$0,5^4$	1

Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej definujeme:

1. distribučnou funkciou
2. pravdepodobnostnou funkciou (pre diskretnú náhodnú premennú)
funkciou hustoty rozdelenia pravdepodobnosti (pre spojitú náhodnú premennú)

Distribučná funkcia náhodnej premennej X - je pravdepodobnosť, že náhodná veličina X bude menšia alebo rovná ako dané reálne číslo x , t.j. funkcia $F: R \rightarrow R : \forall x \in R: F(x) = P(X \leq x)$, kde $P(X \leq x)$ je kumulatívna pravdepodobnosť.

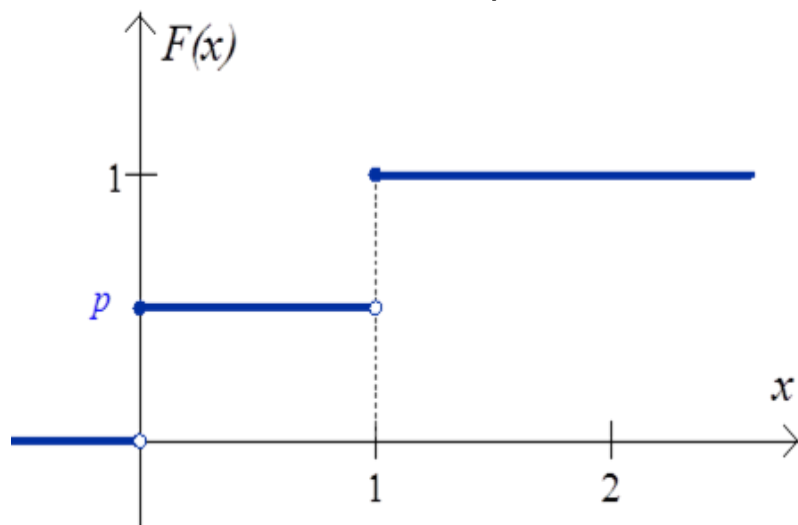
Poznámka: V niektorej literatúre je definovaná vzťahom $F(x) = P(X < x)$.

Vlastnosti distribučnej funkcie:

1. pre $\forall x \in R: 0 \leq F(x) \leq 1$;
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \wedge \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$;
3. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = F(x_0)$;
4. Pre $\forall x_1, x_2 \in R: x_1 < x_2 \implies P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$;
5. $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$

Porovnanie grafu distribučnej funkcie $F(x)$ pre:

diskrétnu náhodnú premennú X

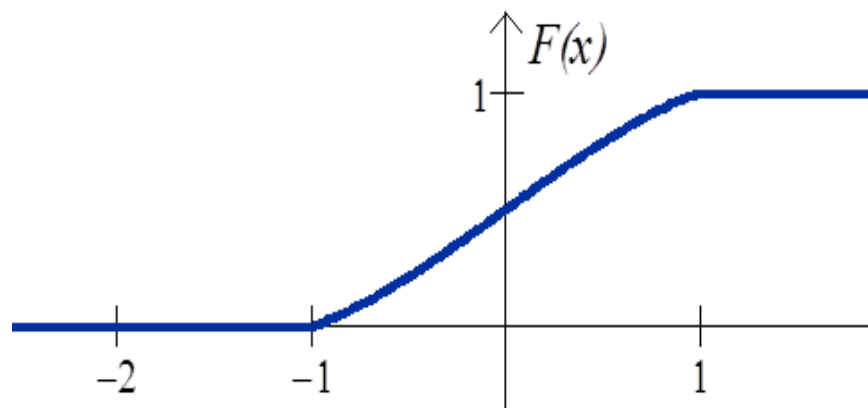


Pre diskétnu náhodnú premennú X je distribučná funkcia F schodovitá neklesajúca funkcia.

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \in (-\infty, x) \cap M} p(t)$$

$p(x)$ je pravdepodobnostná funkcia

spojitú náhodnú premennú X



Pre spojitú náhodnú premennú X je distribučná funkcia F vždy neklesajúca spojitá funkcia.

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$f(x)$ je hustota pravdepodobnosti

Príklad

Nech X je diskrétna náhodná premenná s oborom hodnôt $M = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Vyjadrite distribučnú funkciu náhodnej premennej X , ktorej zákon rozdelenia pravdepodobnosti je daný tabuľkou:

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	Σ
p_i	p_1	p_2	p_3	p_4	1

Pre kumulatívnu pravdepodobnosť $P(X \leq x)$ platí:

$$x < x_1 \quad F(x) = P(X \leq x) = P(\emptyset) = 0$$

$$x_1 \leq x < x_2 \quad F(x) = P(X \leq x) = P(X = x_1) = p_1$$

$$x_2 \leq x < x_3 \quad F(x) = P(X \leq x) = P((X = x_1) \vee (X = x_2)) = P(X = x_1) + P(X = x_2) = p_1 + p_2$$

$$x_3 \leq x < x_4 \quad F(x) = P(X \leq x) = P((X = x_1) \vee (X = x_2) \vee (X = x_3)) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) = p_1 + p_2 + p_3$$

$$x_4 \leq x \quad F(x) = P(X \leq x) = P((X = x_1) \vee (X = x_2) \vee (X = x_3) \vee (X = x_4)) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) + P(X = x_4) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = P(1) = 1$$

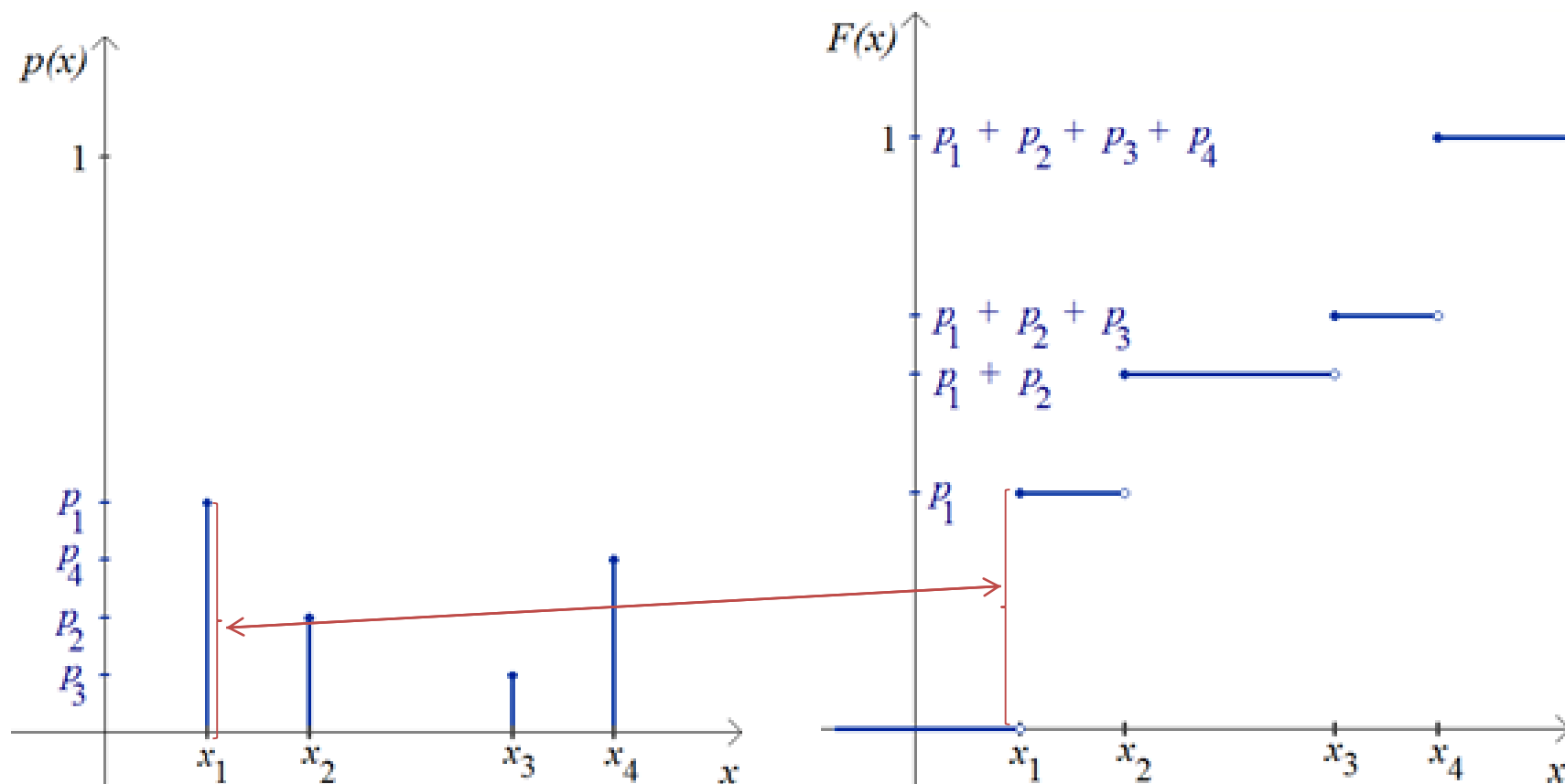
Distribučnú funkciu F (kumulatívnu pravdepodobnosť) diskkrétnej náhodnej premennej X možno zapísať:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x < x_1; \\ p_1 & \text{pre } x_1 \leq x < x_2; \\ p_1 + p_2 & \text{pre } x_2 \leq x < x_3; \\ p_1 + p_2 + p_3 & \text{pre } x_3 \leq x < x_4; \\ 1 & \text{pre } x_4 \leq x \end{cases}$$

Pre diskkrétnu náhodnú premennú X je distribučná funkcia F vždy:

- neklesajúca „schodovitá“ funkcia;
- nespojitá vo všetkých bodoch, v ktorých je jej pravdepodobnostná funkcia nenulová;
- sprava spojitá

Vyjadrenie vzťahu medzi pravdepodobnostnou funkciou $p(x)$ a distribučnou funkciou $F(x)$ pre **diskrétnu** náhodnú premennú:



Skok v bode x_i sa rovná hodnote $p_i = P(X = x_i)$.

Pravdepodobnostná funkcia $p(x)$ diskrétnej náhodnej premennej X

Pravdepodobnostná funkcia $p(x)$ náhodnej premennej X priradzuje každému reálnemu číslu x pravdepodobnosť, že náhodná premenná nadobudne túto hodnotu, t.j. pre $\forall x \in R$ platí: $p(x) = P(X = x)$.

Jej vlastnosti sú:

1. Pre $\forall x \in R$ platí $0 \leq p(x) \leq 1$.
2. Súčet pravdepodobností cez celý obor hodnôt náhodnej premennej je rovný 1: $\sum_{x \in M} p(x) = 1$.
3. Pre $\forall x \in R$ platí $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$
4. $\forall x_1, x_2 \in R$, ak $x_1 \leq x_2$ platí $P(x_1 \leq X \leq x_2) = \sum_{x_i=x_1}^{x_2} p(x_i)$
5. Pravdepodobnostnú funkciu $p(x)$ môžeme vyjadriť tabuľkou, grafom, matematickou formulou.

Príklad

Nech X je náhodná premenná, ktorej zákon rozdelenia pravdepodobnosti je daný matematickou formulou

$$p(x) = \begin{cases} c \cdot \frac{x}{2} & x = 2, 4, 6, 8 \\ 0 & \text{inak} \end{cases} . \text{ Určte hodnotu konštanty } c.$$

Riešenie:

x_i	2	4	6	8	Σ
p_i	c	$2c$	$3c$	$4c$	1

$$c + 2c + 3c + 4c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{10}$$

Príklad

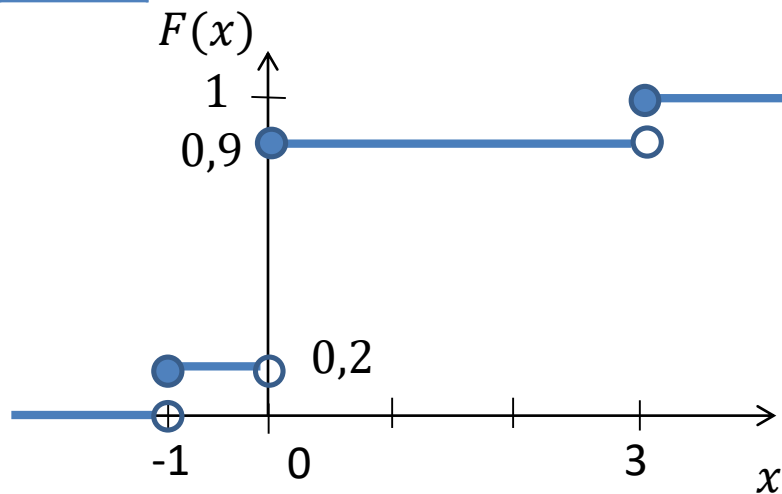
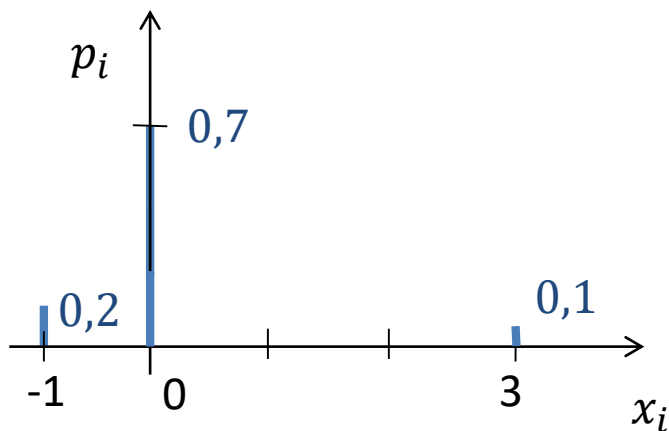
Pravdepodobnostná funkcia náhodnej premennej X nadobúda hodnoty $p(x) = 0,2; 0,7; 0,1$ pre $x = -1, 0, 3$ a $p(x) = 0$ inak.

Nakreslite jej graf. Určte distribučnú funkciu a nakreslite jej graf.

Vypočítajte pravdepodobnosť $P(X < 3)$, $P(X \geq 0)$, $P(0 \leq X < 4)$.

x_i	-1	0	3	Σ
p_i	0,2	0,7	0,1	1
kumul p_i	0,2	0,9	1	

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$$



$$P(X < 3) = 0,9; P(X \geq 0) = 0,8; P(0 \leq X < 4) = 0,8$$

Príklad

Pre distribučnú funkciu náhodnej premennej X platí:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0,2 & 0 \leq x < 1 \\ 0,7 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

Určte pravdepodobnostnú funkciu. Vypočítajte pravdepodobnosť $P(X < 1)$, $P(X \leq 1)$, $P(X = 1)$, $P(X = 1,2)$, $P(0 \leq X < 2)$.

Riešenie:

x_i	0	1	2	Σ
p_i	0,2	0,5	0,3	1

$$P(X < 1) = P(X = 0) = 0,2;$$

$$P(X \leq 1) = P((X = 0) \vee (X = 1)) = 0,7;$$

$$P(X = 1) = 0,5;$$

$$P(X = 1,2) = 0;$$

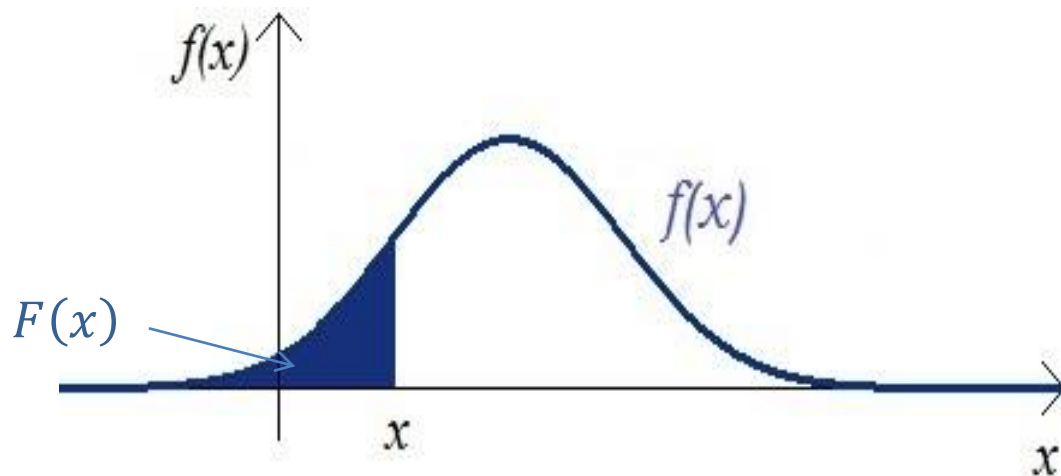
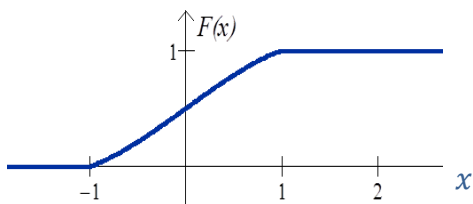
$$P(0 \leq X < 2) = P(X = 0) \vee (X = 1) = 0,7.$$

Funkcia hustoty pravdepodobnosti spojitej náhodnej premennej X

Náhodná premenná X s distribučnou funkciou F sa nazýva spojité, ak existuje taká integrovateľná funkcia $f(x)$, že pre $\forall x \in \mathbb{R}$ platí:

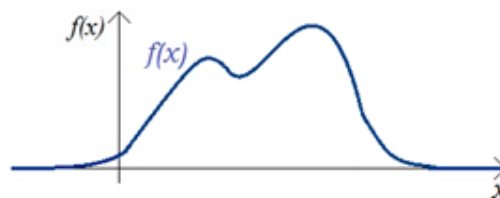
$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Funkciu $f(x)$ nazývame hustota rozdelenia pravdepodobnosti spojitej náhodnej premennej X .

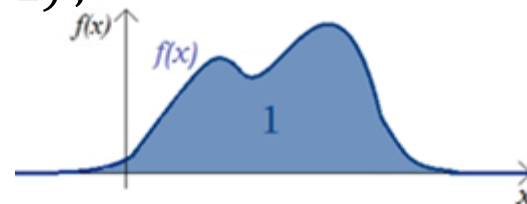


Nech X je spojitá náhodná premenná s distribučnou funkciou F . Jej hustota rozdelenia pravdepodobnosti f má vlastnosti:

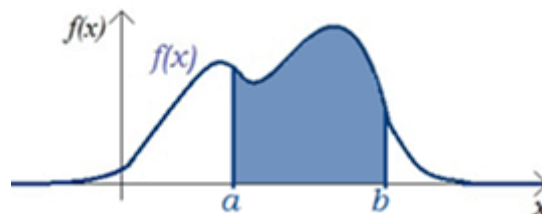
- $f(x) = F'(x)$ (okrem bodov nespojitosti funkcie f);
- $f(x) \geq 0$ (je nezáporná);



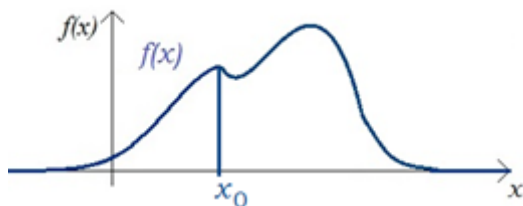
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ (plocha pod krivkou hustoty je 1);



- $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a); a, b \in R$ (možno ľubovoľne zamieňať znak ostrej a neostrej nerovnosti)

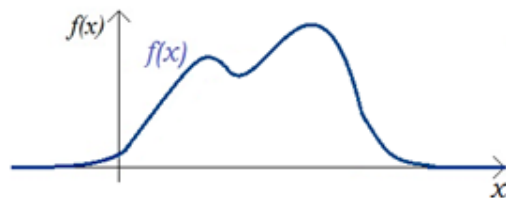


- $P(X = x_0) = 0$ ak $x_0 \in \mathbb{R}$;



Pre $\forall x_i \in \mathbb{R}$: $P(X = x_i) = 0$!!!

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ (začína v nule);
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ (končí v nule).

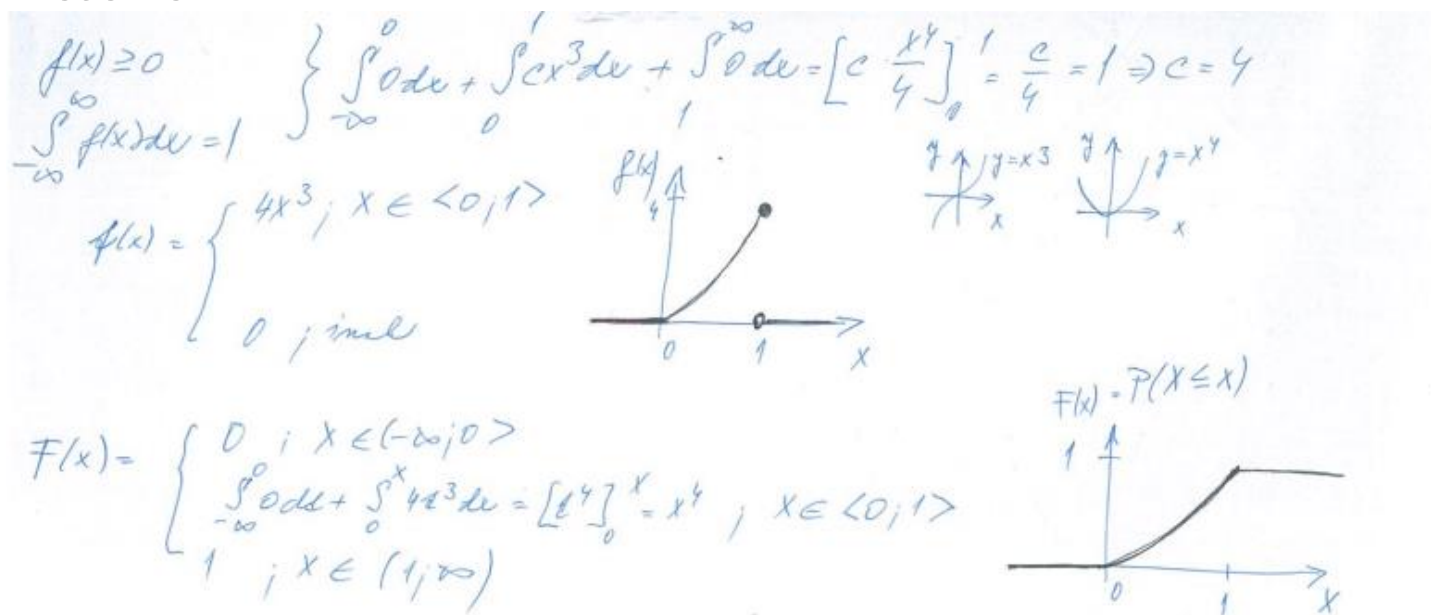


- $f(x)$ môže nadobúdať aj hodnoty väčšie ako 1;

Príklad

Určte konštantu c tak, aby dvojpredpisová funkcia $f(x) = \begin{cases} cx^3; & x \in \langle 0,1 \rangle; \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$ bola hustotou rozdelenia pravdepodobnosti spojitkej náhodnej premennej X . Vypočítajte jej distribučnú funkciu. Zobraďte graficky. Vypočítajte pravdepodobnosť $P(X < -3)$, $P(X = 1)$, $P(-2 \leq X < 1)$.

Riešenie:

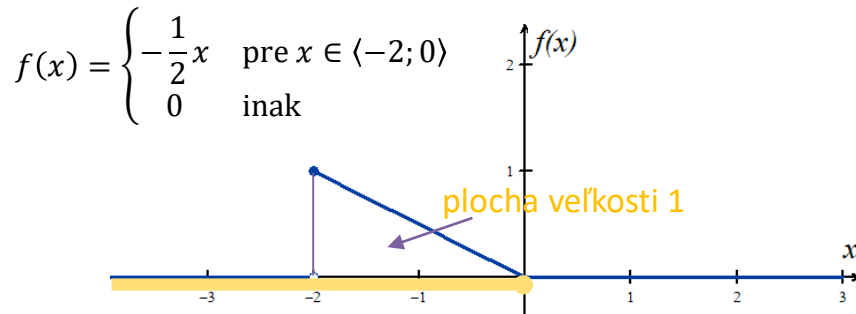


$$P(X < -3) = 0; P(X = 1) = 0; P(-2 \leq X < 1) = 1$$

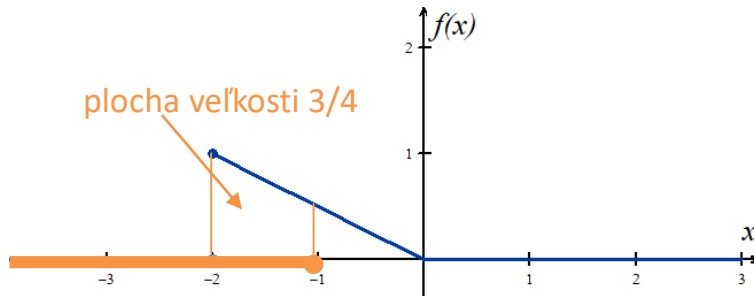
Výpočet pravděpodobnosti spojité náhodné proměnné

Výpočet pravdepodobnosti pomocou

- grafu funkcie hustoty rozdelenia pravdepodobnosti



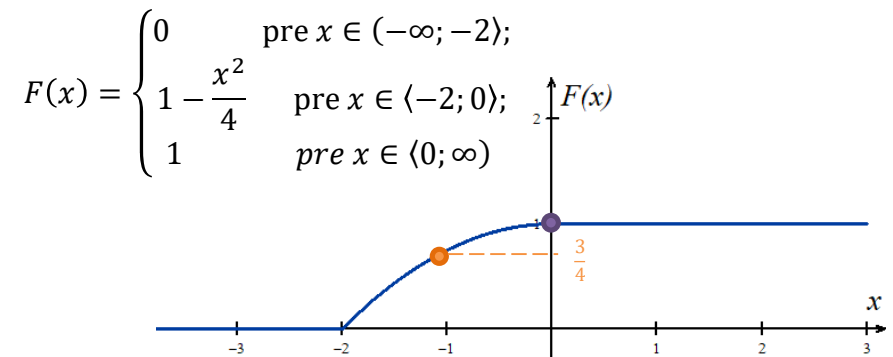
$$P(X \leq 0) = \int_{-\infty}^0 f(x) dx = \int_{-2}^0 \left(-\frac{1}{2}x\right) dx = 1$$



$$P(X \leq -1) = \int_{-\infty}^{-1} f(x) dx = \int_{-2}^{-1} \left(-\frac{1}{2}x\right) dx = \frac{3}{4}$$

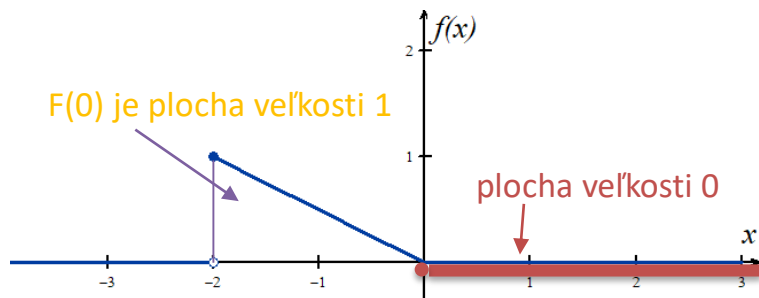
- grafu distribučnej funkcie

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

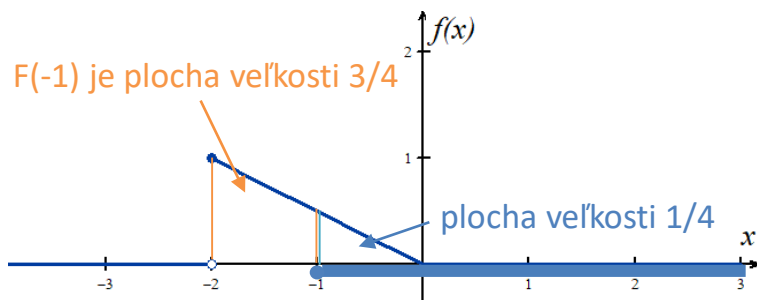


$$P(X \leq 0) = \int_{-\infty}^0 f(x) dx = F(0) = 1$$

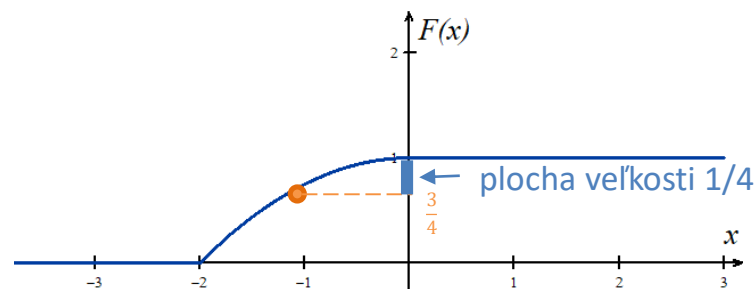
$$P(X \leq -1) = \int_{-\infty}^{-1} f(x) dx = F(-1) = 1 - \frac{(-1)^2}{4} = \frac{3}{4}$$



$$P(X \geq 0) = \int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} 0 dx = 0$$



$$P(X \geq -1) = \int_{-1}^{\infty} f(x) dx = \int_{-1}^0 \left(-\frac{1}{2}x\right) dx = \frac{1}{4}$$



$$\begin{aligned} P(X \geq 0) &= \int_0^{\infty} f(x) dx = \\ 1 - \int_{-\infty}^0 f(x) dx &= 1 - \left(\int_{-\infty}^{-2} 0 dx + \int_{-2}^0 \left(-\frac{1}{2}x\right) dx \right) = \\ 1 - F(0) &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X \geq -1) &= \int_{-1}^{\infty} f(x) dx = \\ 1 - \int_{-\infty}^{-1} f(x) dx &= 1 - \left(\int_{-\infty}^{-2} 0 dx + \int_{-2}^{-1} \left(-\frac{1}{2}x\right) dx \right) = \\ 1 - F(-1) &= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Príklad

- Náhodná premenná X má rozdelenie popísané distribučnou funkciou

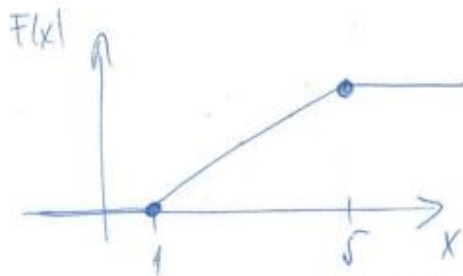
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \leq 1; \\ \frac{x-1}{4} & 1 < x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$

Určte jej funkciu hustoty rozdelenia pravdepodobnosti. Vypočítajte pravdepodobnosť $P(X < 3)$, $P(2 \leq X < 4)$, $P(0 \leq X < 2)$, $P(X = 3)$.

Riešenie:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \frac{x-1}{4} & 1 < x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$

→

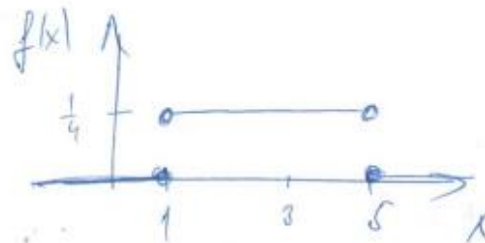


$$P(X < 3) = F(3) = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2} \dots (3-1) \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(2 \leq X < 4) = F(4) - F(2) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad (4-2) \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(0 \leq X < 2) = F(2) - F(0) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4} \quad (2-1) \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \frac{1}{4} & 1 < x < 5 \\ 0 & x \geq 5 \end{cases}$$



Príklad

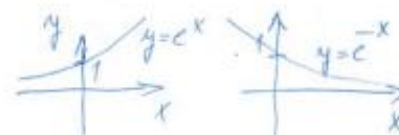
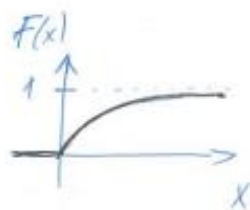
Náhodná premenná X má rozdelenie popísané distribučnou funkciou

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \leq 0; \\ 1 - e^{-x} & x > 0 \end{cases}.$$

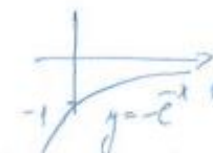
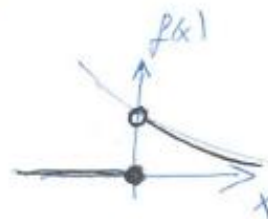
Určte jej funkciu hustoty rozdelenia pravdepodobnosti $f(x)$ a $P(X \leq 1)$.

Riešenie:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \leq 0, \\ 1 - e^{-x} & x > 0 \end{cases}$$



$$f(x) = F'(x) \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \leq 0 \\ e^{-x} & x > 0 \end{cases}$$



$$P(X \leq 1) = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} + e^0 = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}$$

$$P(X \leq 1) = F(1) = 1 - e^{-1} = \frac{e-1}{e}$$

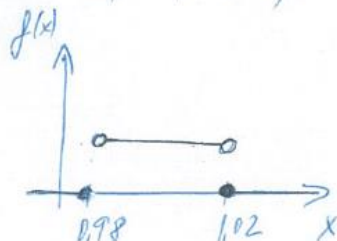


Príklad

Automatická linka plní do fliaš destilovanú vodu s objemom 1 liter. Vplyvom pôsobenia náhodných vplyvov kolíše množstvo vody v intervale $(0,98 \text{ l}; 1,02 \text{ l})$. Každé množstvo destilovanej vody v tomto intervale považujeme za rovnako možné. Náhodná premenná X udáva množstvo destilovanej vody v náhodne vybranej fľaši. Nájdite funkciu hustoty rozdelenia pravdepodobnosti $f(x)$, distribučnú funkciu $F(x)$, nakreslite grafy týchto funkcií a vypočítajte pravdepodobnosť, že $X > 0,99 \text{ l}$.

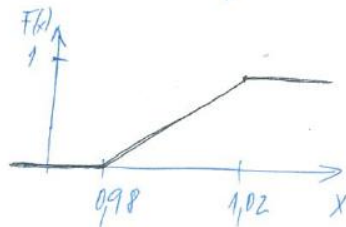
Riešenie:

$$M = (0,98; 1,02)$$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1,02 - 0,98} = 25 & ; x \in (0,98; 1,02) \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq 0,98 \\ \int_{0,98}^x 25 dx = 25 [x]_{0,98}^x = 25 \cdot (x - 0,98) & \text{pre } x \in (0,98; 1,02) \\ 1 & ; x \geq 1,02 \end{cases}$$



$$P(X > 0,99) =$$

$$P(0,99 \leq X < 1,02) =$$

$$F(1,02) - F(0,99) = 0,75$$

Rozhodnite, ktoré z tvrdení sú pravdivé:

1. Distribučná funkcia je rastúca funkcia.
2. Distribučná funkcia je neklesajúca funkcia.
3. Hodnota pravdepodobnostnej funkcie môže byť väčšia ako 1.
4. Hodnota funkcie hustoty pravdepodobnosti môže byť väčšia ako 1.
5. Hodnota distribučnej funkcie môže byť väčšia ako 1.
6. Pravdepodobnostná funkcia môže byť definovaná aj pre záporné hodnoty .
7. Funkcia hustoty pravdepodobnosti môže byť definovaná aj pre záporné hodnoty .
8. Hodnota pravdepodobnostnej funkcie môže byť záporná.
9. Hodnota funkcie hustoty pravdepodobnosti môže byť záporná.
10. Hodnota distribučnej funkcie môže byť záporná.