

MATEMATICKÉ METÓDY PLÁNOVANIA A VYHODNOCOVANIA EXPERIMENTU

Janette Kotianová



SLOVENSKÁ TECHNICKÁ
UNIVERZITA V BRATISLAVE
MATERIÁLOVOTECHNOLOGICKÁ
FAKULTA SO SÍDLOM V TRNAVE

ALUMNIPRESS

2025

© Materiálovotechnologická fakulta STU so sídlom v Trnave

PaedDr. Janette Kotianová, PhD.

Recenzenti: prof. Mgr. Róbert Vrábel, PhD.
doc. RNDr. Marta Urbaníková, CSc.

Jazyková korektúra: Mgr. Milan Bošák

Schválila Vedecká rada Materiálovotechnologickej fakulty STU ako vysokoškolské skriptá dňa 5. decembra 2024 pre študijné programy: Materiálové inžinierstvo, Priemyselné manažérstvo, Výrobné technológie a výrobný manažment, Počítačová podpora návrhu a výroby, Automatizácia a informatizácia procesov v priemysle, Integrovaná bezpečnosť Materiálovotechnologickej fakulty STU v Trnave.

ISBN: 978-80-8096-310-1

EAN: 9788080963101

PREDHOVOR

Táto publikácia je určená študentom MTF STU v Trnave ako študijný text k predmetu MATEMATICKÉ METÓDY PLÁNOVANIA A VYHODNOCOVANIA EXPERIMENTU. Svojím obsahom nadväzuje na skriptá s rovnomenným názvom, ktoré boli publikované v rokoch 2009 a 2015. Kým prvá publikácia bola zameraná na ručné výpočty koeficientov regresných modelov a zisťovanie ich štatistickej významnosti, druhá ju dopĺňala o informácie potrebné na pochopenie pojmov z oblasti teórie pravdepodobnosti a štatistiky a regresnej analýzy a na výpočet používala softvér Excel. Predkladaná publikácia nadväzuje na kurikulum predchádzajúcich prác a sústreďuje sa predovšetkým na pojmy a princípy plánovania a vyhodnocovania experimentov. Poskytuje teoretické základy z oblasti Design of Experiments (DOE), pričom pri analýze dát využíva prácu so softvérom Minitab 20 a Excel. Obsahuje návody na postupy pri riešení úloh, kontrolné a pomocné výpočty v Exceli, ako aj popisy postupov a interpretácie oboch softvérových výstupov. Teoretickú časť úvodných siedmich kapitol dopĺňajú dva vzorové vyriešené príklady z úplného faktorového plánu experimentu a centrálneho kompozitného plánu experimentu. Keďže publikácia je určená študentom technických univerzít, bolo snahou poskytnúť výber úloh v kontexte ich študijného odboru a budúcich profesijných kariér. S cieľom uľahčiť pochopenie rozsiahleho učiva a podporiť porozumenie pojmov a súvislostí sú texty doplnené o komentáre, popisy a obrázky. Softvérové postupy a výstupy sú komentované a interpretované.

Touto cestou sa chcem poďakovať recenzentom doc. RNDr. Marte Urbaníkovej, CSc. a prof. Mgr. Róbertovi Vrábelovi, PhD. za pripomienky, ktoré pomohli k skvalitneniu odborného obsahu tejto publikácie.

Veľké ďakujem patrí aj kolegom s odbornými znalosťami z technológie procesov, ako aj študentom, ktorí zrealizovali merania či poskytli svoje nápady pri využití metodiky DOE v ich oblasti záujmu. Rovnaká vďaka patrí študentom, ktorí hľadali súvislosti a kládli otázky, ktoré ma nútili rozširovať moje vedomosti z oblasti DOE a tak nepriamo prispeli k obsahu predkladaného textu.

Nemôžem nespomenúť milé kolegyne Mgr. Zuzanu Červeňanskú, PhD. a RNDr. Ivetu Markechovú, CSc., ktoré boli ochotné diskutovať o problematike tejto publikácie a pomáhali hľadať riešenia problémov.

Janette Kotianová

Práca vznikala s podporou Slovenskej kultúrno-vzdelávacej grantovej agentúry KEGA v rámci projektu č. 009STU-4/2023.

OBSAH

PREDHOVOR	3
1 Plánovanie a vyhodnocovanie experimentov	8
1.1 Úvod	8
1.2 História, súčasnosť a budúcnosť štatisticky navrhnutých experimentov	9
1.2.1 História	9
1.2.2 Súčasnnosť	10
1.2.3 Očakávané budúce využitie DOE	10
2 Rozdiel medzi tradičným a štatisticky navrhnutým experimentom	11
2.1 Stratégia OFAT (One Factor At a Time)	11
2.2 Stratégia AFAT (All factors At a Time)	12
2.3 Štatisticky navrhnutý experiment (experiment DOE)	12
2.3.1 Základné pojmy používané v teórii DOE	13
2.3.2 Výhody prístupu DOE v porovnaní s tradičným experimentom	14
2.3.3 Ciele DOE	14
2.3.4. Základné prístupy plánovaného experimentu	15
2.3.5 Tri základné princípy DOE	16
2.3.6 Postupnosť krokov pri realizácii DOE	16
2.3.7 Typy experimentov podľa počtu bodov plánu experimentu	17
2.3.8 Typy experimentov podľa počtu meraní v naplánovaných bodoch	18
2.3.9 Typy experimentov podľa plánu experimentu	18
2.3.10 Významné body plánovaného experimentu	19
3 Úplný faktorový experiment (full factorial design)	20
3.1 Ortogonalita faktorových experimentov	21
3.2 Značenie faktorov a interakcií pri vyhodnocovaní experimentu	22
3.3 Konvencia zápisu odozvy vzhľadom na zvolené úrovne faktorov	23
3.4 Hierarchický model	25

4	Typy regresných modelov pre k faktorov	26
4.1	Regresný model pre 2 faktory	27
4.2	Postup pri hľadaní koeficientov regresnej funkcie lineárneho typu pre 2 faktory ...	30
4.3	Lineárna transformácia – kódovanie	30
4.4	Odhad koeficientov transformovanej regresnej funkcie lineárneho typu v úplnom experimente typu 2^2 metódou najmenších štvorcov (MNS).....	32
4.5	Vyhodnotenie experimentu typu 2^2 pomocou testovania hypotéz	39
4.5.1	Test štatistickej významnosti jednotlivých parametrov (faktorov a interakcií faktorov) vyjadrený testom štatistickej významnosti regresných koeficientov regresného modelu lineárneho typu pre experiment typu 2^2 s m replikáciami .	40
4.5.2	Test štatistickej významnosti regresného modelu ako celku	41
4.5.3	F test štatistickej významnosti prínosu k -tej vysvetľujúcej premennej na vysvetlenie variability závislej (vysvetľovanej) premennej	43
4.5.4	Test dostatočného prispôsobenie regresného modelu (Test Lack of Fit).....	45
4.5.5	Test krivosti (curvature)	48
4.5.6	Stupne voľnosti (Degrees of freedom)	52
4.5.7	Grafická analýza rezíduí – vizuálne posúdenie vhodnosti regresného modelu a testy normality rezíduí	53
4.6	Porovnanie rôznych regresných modelov.....	56
4.7	Faktor inflácie rozptylu VIF (Variance inflation factor)	57
4.8	Vyhodnotenie experimentu bez replikácií (Unreplicated Factorial Experiments)	58
4.9	Kvalita modelu vyjadrená pomocou koeficientov (indexov) determinácie.....	63
4.10	Dvojúrovňový plán experimentu pre $(k + 1)$ faktorov	65
4.10.1	Postup nájdania regresného modelu pre 3 faktory	66
4.10.2	Typy regresných modelov pre k faktorov	67
5	Efekt faktora a efekt interakcie faktorov	68
5.1	Hlavný efekt (main effect) faktora	68
5.2	Vplyv interakcie faktorov (Interaction effect)	69

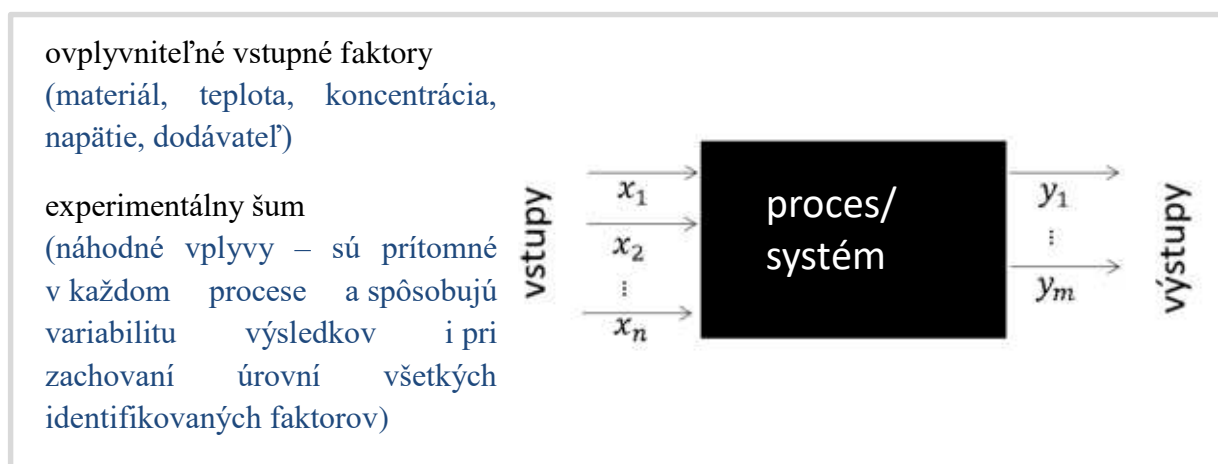
5.3	Pareto diagram (Pareto chart)	73
5.4	Normálny pravdepodobnostný graf (Normal probability plot)	74
6	Čiastočný faktorový dvojúrovňový experiment (Fractional factorial experiment at two levels)	75
6.1	Základné pojmy, operácie s faktormi a ich vlastnosti	75
6.2	Optimálne voľby generátorov	78
6.3	Význam použitia čiastočných faktorových experimentov	79
7	Metóda odozvovej plochy (response surface method and design).....	91
7.1	Centrálny kompozitný plán (Central Composite design CCD)	93
7.2	Box – Behnkenov dizajn (Box-Behnken design)	101
7.3	Úplný kvadratický model pre dva faktory – výpočet optimálneho riešenia.....	102
7.4	Optimalizácia v Minitabe	103
7.5	Optimalizácia v Exceli.....	106
8	Úplný faktoriálny dizajn s meraním v centrálnom bode – riešený vzorový príklad	107
9	Centrálny kompozitný plán (Central composite design – CCD) – riešený vzorový príklad	159
	Zoznam bibliografických odkazov	212
	Príloha A	214
	Príloha B.....	221
	Príloha C.....	223

1 PLÁNOVANIE A VYHODNOCOVANIE EXPERIMENTOV

1.1 ÚVOD

Úlohou experimentu je objasniť neznáme vzťahy medzi vstupmi a výstupmi v procese či systéme, obr. 1.

Ideálnym prípadom je nájdenie matematického modelu popisujúceho fyzikálne zákony, napr. Newtonov pohybový zákon na výpočet zrýchlenia, Ohmov zákon v oblasti elektriny a elektroniky, Coulombov zákon elektrickej sily, Planckov zákon žiarenia, rovnica kontinuity pre prúdenie tekutín, rovnice pre kinetickú a potenciálnu energiu, Maxwellove rovnice pre elektromagnetizmus a mnohé iné funkčné závislosti opisujúce rôzne javy od pohybu a sily až po elektromagnetizmus a kvantovú mechaniku.



Obr. 1 Do procesu/systému vstupujú premenné, ktoré voláme vstupy – rozdeľujeme ich na ovplyvniteľné faktory a neovplyvniteľný experimentálny šum. Z procesu/systému vystupujú premenné, ktoré nazývame výstupy – odozvy

V praxi však častokrát stačí nájsť jednoduchší matematický model, ktorý platí iba na obmedzenom intervale hodnôt vstupov a nie je odvodený zo všeobecných platných fyzikálnych zákonov, ale na základe štatistického spracovania nameraných údajov získaných experimentovaním, t. j. zasahovaním do samotného procesu menením hodnôt vstupov. Ak funkčnú závislosť medzi vstupmi a výstupmi vieme nájsť metódou založenou na vopred určenej špeciálnej zmene hodnôt vstupov a štatistickým vyhodnotením ich pôsobenia na výstupy, hovoríme o štatisticky navrhnutom experimente.

1.2 HISTÓRIA, SÚČASNOSŤ A BUDÚCNOSŤ ŠTATISTICKY NAVRHNUTÝCH EXPERIMENTOV

1.2.1 História

Koncept plánovania a vyhodnocovania experimentov (Design of Experiments - DOE) má svoje korene v začiatkoch 20. storočia, kedy anglický matematik Sir Ronald A. Fisher (1890–1962) od r.1919 spracovával 60-ročné výsledky Rothamsteadskej kráľovskej poľnohospodárskej výskumnej stanice a položil teoretické základy analýzy rozptylu a navrhovania experimentu. Fisher vyvinul princípy replikácie, náhodného usporiadania a blokovania, ktoré umožnili efektívnejšie a presnejšie vyhodnocovanie experimentov. Jeho práca, predovšetkým publikácie Štatistické metódy pre výskumných pracovníkov, *The Design of Experiments* (1935) poskytli rámec pre vedecké experimentovanie v poľnohospodárstve, biológii a neskôr aj v priemysle.

Na Fisherovu prácu nadviazali ďalší významní štatistickí, ako napríklad Plackett a Burman, ktorí v r. 1946 navrhli úsporné experimentálne návrhy, pri ktorých je počet pokusov násobkom 4. Ich návrhy experimentov boli použité pri testovaní leteckých púm vo Veľkej Británii počas vojny (22 faktorov).

George E. P. Box (1919–2013) v 70-tych rokoch rozšíril DOE do priemyselných aplikácií a pomohol popularizovať metódu odozvovej plochy (Response Surface Methodology - RSM). S jeho menom sa spája niekoľko modelov, napr. Box-Jenkins modely, Box-Behnken dizajny a Box-Cox transformácia.

Douglas C. Montgomery (nar. 1943), ktorý dodnes pôsobí na štátnej univerzite v Arizone, je autorom učebnice *Design and Analysis of Experiments* (r. 1976), ktorá je široko využívaná nielen v akademických kruhoch, ale aj mnohými praktikmi v priemysle i tvorcami rôznych štatistických softvérov.

K významným prispievateľom k rozvoju DOE patril tiež japonský inžinier Genichi Taguchi (1924–2012), ktorý vyvinul metódu Taguchiho dizajnov – robustný prístup k experimentálnemu návrhu zameraný na minimalizáciu variability a zlepšenie kvality výrobkov a výrobných procesov (sledovaním pomeru signál/šum). Jeho metóda predstavovala pre verejnosť bez znalosti štatistiky zrozumiteľnú formu vyhodnotenia experimentov. Pôsoobil v USA, u nás sa Taguchiho dizajny používali najmä v 90-tych rokoch v automobilovom priemysle.

1.2.2 Súčasnosť

Dnešné využitie DOE v rôznych technických, chemických, farmaceutických a priemyselných oblastiach zahŕňa predovšetkým optimalizáciu procesov, produktov a výrobných systémov, experimentovanie s rôznymi materiálmi, dizajnami a výrobnými postupmi pri vývoji nových produktov. DOE ako výkonný nástroj na zber a analýzu údajov, ktorý možno použiť v rôznych experimentálnych situáciách, využíva:

- a) výrobný priemysel a strojárstvo: optimalizácia výrobných procesov, znižovanie variability a zvyšovanie kvality produktov, redukcia variability a chýb;
- b) automobilový a letecký priemysel: testovanie a zlepšovanie odolnosti a kvality materiálov, bezpečnosti a výkonnosti komponentov pri vývoji motorov a rôznych automobilových častí;
- c) biomedicína - farmaceutický a medicínsky výskum: efektívne plánovanie klinických skúšok na určenie účinnosti a bezpečnosti liekov;
- d) chemický priemysel: optimalizácia chemických procesov, reakčných podmienok a znižovanie odpadov.

Inžinierske disciplíny zahŕňajú predovšetkým testovanie a zlepšovanie nových technológií a materiálov, dizajnov, vývoj robustných systémov. Vďaka DOE výskumníci a inžinieri rýchlejšie a efektívnejšie môžu porozumieť a identifikovať optimálne podmienky komplexných systémov a procesov, čím sa znižujú náklady a zvyšuje spoľahlivosť.

1.2.3 Očakávané budúce využitie DOE

S rastúcou komplexnosťou technológií a narastajúcou potrebou efektívneho rozhodovania sa očakáva, že DOE bude mať čoraz širšie uplatnenie v:

- a) integrácii s umelou inteligenciou a strojovým učením: automatizovaná optimalizácia experimentov a adaptívne plánovanie testov na základe aktuálneho vyhodnotenia veľkých dát;
- b) IoT a Industry 4.0: využitie DOE na adaptívne riadenie a optimalizáciu procesov v inteligentných podnikoch;
- c) nano a biotechnológiach: precíznejšie riadenie experimentov v oblastiach, ako sú génové inžinierstvo či vývoj nanomateriálov.

- d) udržateľnosti a ekológii: efektívnejšie návrhy experimentov nájdu uplatnenie pri vývoji ekologických materiálov a znižovaní environmentálnej stopy priemyselných procesov.

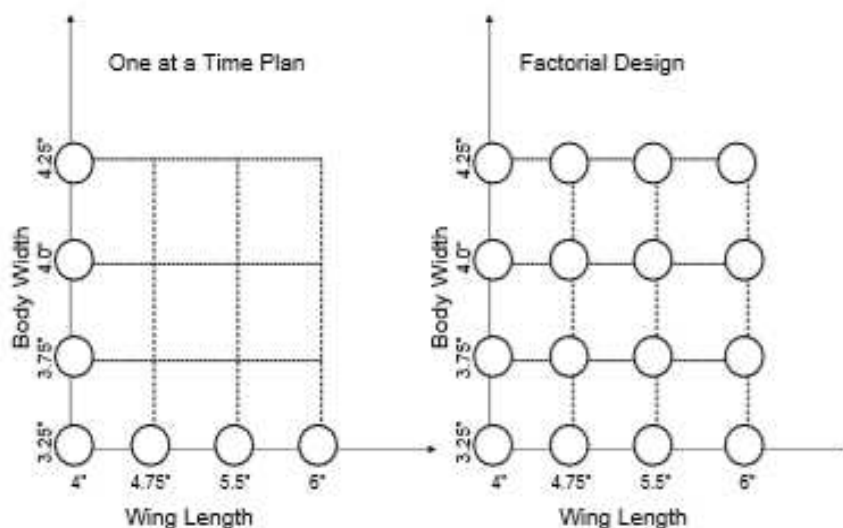
Celkovo je DOE neoddeliteľnou súčasťou moderného experimentovania realizovaného budovaním metamodelov (surrogate modelling), pričom jeho význam bude vďaka digitalizácii, automatizácii a využitiu neurónových sietí a umelej inteligencie stále rásť. Tento metodologický prístup umožňuje v širokom spektre priemyselných a vedeckých oblastí rýchlejšie inovácie a presnejšie analýzy. V oblasti rozhodovania je a bude výkonným nástrojom v Six Sigma.

2 ROZDIEL MEDZI TRADIČNÝM A ŠTATISTICKY NAVRHNUTÝM EXPERIMENTOM

2.1 STRATÉGIA OFAT (ONE FACTOR AT A TIME)

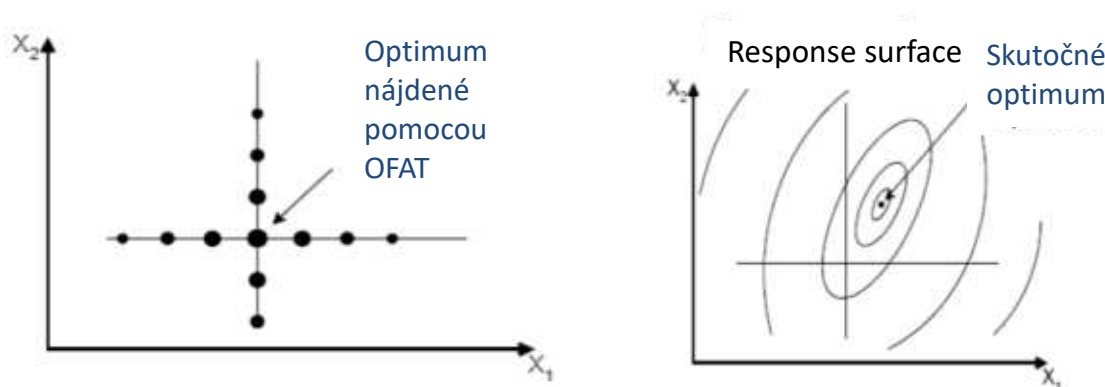
Tradičným prístupom je zmena jedného faktora - jednofaktorová analýza One factor at a Time (OFAT). Pri tomto prístupe volíme postupnosť faktorov. Meníme postupne vždy jeden faktor. Ak vedie zmena úrovne faktora k „pozitívnej zmene“ odozvy, ponecháme ju a meníme ďalší faktor. Ak výsledky nie sú lepšie, vrátime sa a meníme iný faktor. Nevýhodou tohto prístupu je, že analýza sa zjednodušuje na „výber víťaza“ a nie je možné zistiť interakcie medzi faktormi.

Porovnanie plánu experimentu pre metódu One Factor at a Time (OFAT) a faktorový experiment je vidieť na nasledujúcom obr. 2.



Obr. 2 Porovnanie plánu experimentu pre OFAT a faktorový experiment [9]

Optimum nájdené metódou OFAT sa nemusí zhodovať so skutočným optimom, vid' obr. 3.



Obr. 3 Porovnanie optima nájdeného metódou OFAT a skutočného optima [9]

2.2 STRATÉGIA AFAT (ALL FACTORS AT A TIME)

Opačným prístupom je zmena všetkých faktorov naraz. Problémom pri tomto prístupe je, že nevieme ktoré konkrétne zmeny spôsobili požadovanú zmenu výstupu a nevieme určiť prínos (efekt) jednotlivých faktorov. Nedokážeme zistiť interakcie medzi faktormi.

2.3 ŠTATISTICKY NAVRHNUTÝ EXPERIMENT (EXPERIMENT DOE)

Pri štatisticky navrhnutom experimente (experiment DOE – špeciálne hovorme o faktorovom dizajne – factorial design) meníme niekoľko faktorov súčasne, pričom uvažujeme všetky možné kombinácie úrovní faktorov:

- Väčšinou začíname s dvoma úrovňami každého faktora (screening).
- Je možné vyskúšať všetky možné kombinácie úrovní faktorov (úplný experiment – full factorial design), alebo vyberieme ich špeciálne podmnožiny (čiastočný experiment – fractional factorial design).

Skúmame zmenu na výstupe, ktorú spôsobila zmena kombinácií úrovní faktorov.

Faktorový experiment je navrhnutý tak, aby umožňoval posúdiť nezávisle vplyv každého faktora. Využíva poznatky štatistiky a teórie pravdepodobnosti.

Vybrané príklady použitia experimentu DOE sú uvedené v prílohe B.

2.3.1 Základné pojmy používané v teórii DOE

Design of Experiments (DOE) – štatisticky navrhnutý experiment – je systematický prístup k plánovaniu, realizácii a analýze experimentov s cieľom získať relevantné dáta a pomocou štatistického vyhodnotenia (testovania hypotéz) skúmať vzťahy medzi premennými na vstupe a výstupe procesu. Hlavným cieľom DOE je identifikovať vplyv jednotlivých premenných – faktorov a ich interakcií na sledované procesy prostredníctvom kvantitatívnych premenných – odoziev. Cieľom môže byť okrem nájdenia funkčného vzťahu medzi sledovanými premennými (faktormi a odozvou) optimalizovať procesy, dizajn či vlastnosti produktov alebo systémov prostredníctvom systematického testovania vopred naplánovaných zmien úrovni faktorov.

Faktory (factors) – nezávislé premenné, prediktory – vstupy, ktorých vplyv bude predmetom experimentálneho skúmania

Odozva (response) – závislá premenná – hodnota výstupu pri nastavených hodnotách faktorov

Úrovne faktorov (factor levels) – vopred naplánované konkrétne hodnoty faktorov, ktoré sú počas realizácie experimentu nastavené podľa zvoleného typu experimentu

Pokusy – merania (runs, observations) – meranie odozvy za určitých dopredu naplánovaných úrovniach faktorov

Experiment – súbor všetkých pokusov

Cplot (cube plot) – grafické znázornenie plánu experimentu

Efekt faktora – zmena odozvy (veľkosť vplyvu), ak faktor zmeníme z dolnej na hornú úroveň

Interakcia – vzájomné pôsobenie dvoch a viac faktorov v skúmanom procese; interakcia medzi faktormi A a B znamená, že efekt faktora A na závislú premennú závisí od úrovne faktora B

Interakcia n -tého rádu – vzájomné pôsobenie n faktorov (do regresného modelu zahrňujeme súčiny týchto n premenných)

Regresor – ľubovoľná funkcia vytvorená z nezávislých premenných zakomponovaná do regresného modelu

Rozlíšenie (resolution) – schopnosť daného návrhu rozlíšiť efekty faktorov od efektov interakcií

2.3.2 Výhody prístupu DOE v porovnaní s tradičným experimentom

- Dokážeme identifikovať skutočné zmeny odozvy spôsobené zmenou úrovne faktora – faktorov, vďaka čomu vieme kvantifikovať prínos (efekt) každého faktora a interakcie faktorov.
- Tento prístup je efektívny, pretože maximalizuje informácie z minimálneho celkového počtu meraní.
- Výstup je možné jednoducho analyzovať.
- Dokážeme rozlíšiť dôležité a nedôležité faktory (signifikantné vs. nesignifikantné faktory).
- Dokážeme zistiť prítomnosť interakcie medzi faktormi.
- Opakované merania umožňujú zistiť veľkosť náhodných vplyvov, t.j. experimentálneho šumu.
- Výstupom je matematický model – funkcia, ktorá umožňuje predikovať zmeny sledovanej premennej (odozvy) na základe zmien úrovni faktov, resp. nájsť optimálne alebo robustné riešenie.

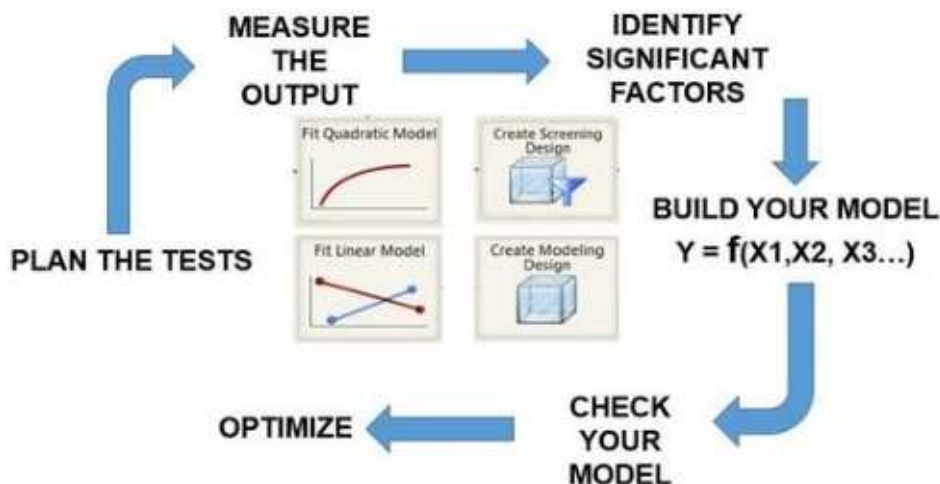
2.3.3 Ciele DOE

Cieľom DOE môže byť:

- Screening (preosievanie faktorov): Hľadáme, ktoré faktory majú najväčší vplyv, t. j. kvantifikujeme mieru štatistickej významnosti každého z faktorov, teda rozhodujeme, ktoré z faktorov X_1 , X_2 , X_3 , (A, B, C)... rozhodujúcim spôsobom ovplyvňujú úroveň odozvy Y;
- Predikcia: Vzťah medzi dôležitými faktormi a odozvou vyjadrujeme analyticky.
- Optimalizácia: Vyberáme také nastavenie, ktoré by bolo najlepšie zo všetkých testovaných (optimálne nastavenie). Podľa ďalšieho cieľa:
 - maximalizujeme alebo minimalizujeme odozvu (maximalizácia pevnosti zliatiny, minimalizácia počtu vlasových trhliniek);
 - znižujeme variabilitu (čo najmenšia premenlivosť hrúbky výlisku);
 - dosiahnutie odolnosti voči vplyvom, ktoré nedokážeme riadiť (nájdenie prac. postupu, ktorý nebude závislý na tvrdosti vody);
 - hľadáme pracovný bod procesu, ktorý je prijateľný z viacerých hľadísk (malá nasiakavosť a zároveň nízka cena).

Zvláštnou úlohou je optimalizácia zmesí – faktory nie sú nezávislé (čím viac cementu, tým menej vápna a piesku).

Postupnosť krokov pri optimalizácii podľa softvéru Minitab je načrtnutá na obr. 4.



Obr. 4 Postupnosť krokov pri DOE pri hľadaní optimálneho riešenia [17]

2.3.4 Základné prístupy plánovaného experimentu

- **Replikácia** – opakovanie základného experimentu alebo jeho časti. Znovurealizácia merania za podmienky, že boli znovu nastavené hodnoty faktorov po realizácii predchádzajúcich meraní, umožňuje získať odhad chyby experimentu – tento odhad náhodnej zložky (experimentálneho šumu) umožňuje zvýšiť spoľahlivosť záveru použitím napr. testu adekvátnosti. Replikácia nie je totožná s opakovaným meraním. Počet replikácií by mal byť najmenej 2, aby bolo možné odhadnúť čistú chybu (Purre Error PE); správne by mal byť počet replikácií určený na základe analýzy sily testu a veľkosti vzorky.
- **Randomizácia** (znáhodnenie) – jednotlivé merania experimentu robíme v náhodnom poradí, čím eliminujeme systematickú chybu experimentu (únava operátora, kolísanie teploty alebo vlhkosti vo výrobnnej hale).
- **Blokovanie** – rozdelenie experimentu do blokov sa používa na redukovanie variability faktorov, ktoré nie je možné znáhodniť (môžu to byť používané materiály, rôzni dodávatelia). Blok je postupnosť pozorovaní, ktoré boli vykonané za rovnakých podmienok, napr. počas jedného dňa....

2.3.5 Tri základné princípy DOE

- **Hierarchický princíp:** Efekty interakcií nižších rádov budú dôležitejšie ako efekty interakcií vyšších rádov.
- **Princíp úspornosti (Occamova britva):** Počet dôležitých efektov vo faktoriálnom experimente bude relatívne malý.
- **Princíp dedičnosti:** Aby mohol byť významný efekt interakcie, musí byť významný aspoň jeden z jeho „rodičovských“ faktorov.

2.3.6 Postupnosť krokov pri realizácii DOE

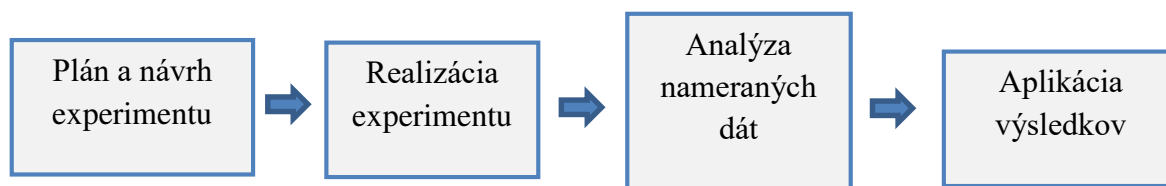
Design of Experiments (DOE) v sebe zahŕňa nasledujúce činnosti, obr. 5:

1. **Plán (príprava) a návrh experimentu:** Identifikácia a špecifikácia faktorov, ktoré ovplyvňujú študovaný systém alebo proces. Identifikácia odozvy, pomocou ktorej budeme charakterizovať veľkosť zmeny odozvy vzhľadom na nastavené úrovne vstupných faktorov. Vzhľadom na zvolený cieľ výber vhodného experimentálneho dizajnu, ktorý určuje, ako budú tieto faktory manipulované a k nim budú merané hodnoty odozvy.

2. **Realizácia experimentu:** Vykonávanie experimentov podľa naplánovaného plánu experimentu. To zahŕňa kontrolu a manipuláciu s úrovňami faktorov podľa stanoveného plánu experimentu (a prípadne aj randomizácie). Súčasťou realizácie experimentu je aj zber dát, kedy zaznamenávame relevantné údaje z meraní, ktoré sa v priebehu experimentu získavajú.

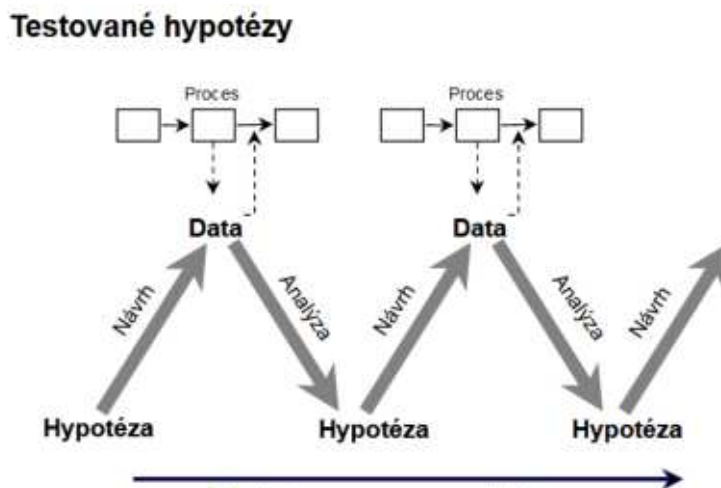
4. **Analýza nameraných dát:** Použitie štatistických metód na analýzu zozbieraných údajov (hodnôt odozvy) s cieľom identifikovať vplyv jednotlivých faktorov, ich interakcií a vyhodnotiť ich význam v kontexte stanovených cieľov.

5. **Aplikácia výsledkov:** Na základe analýzy výsledkov sa vyvádzajú závery a formulujú sa odporúčania, ktoré môžu viesť k zlepšeniu procesov, produkcie alebo systémov.



Obr. 5 Postupnosť krokov pri realizácii DOE

Pri realizácii DOE sa uplatňuje princíp postupného experimentovania, vid' obr. 6. Experiment realizujeme v etapách, preto do 1. kola by sme mali vložiť maximálne $\frac{1}{4}$ až $\frac{1}{3}$ dostupných zdrojov.



Obr. 6 Znalosť o procese sa pri opakovanej realizácii DOE postupne zvyšuje [21]

Pri experimente sa vyžaduje spoluprácu ľudí v tíme:

- odborníci na samotný proces (technológovia, procesní inžinieri, analytici);
- ľudia, ktorí sa zaoberajú kvalitou;
- zástupcovia zákazníka;
- ľudia, ktorí s procesom alebo produktom prichádzajú do styku (predajcovia, servis);
- ľudia, ktorí majú nejakú skúsenosť s vyhodnocovaním dát

Plánovanie zdrojov pre experiment zahŕňa kapacitu strojov a zariadení, financie, ľudí, čas, software (Excel, Minitab, Design Expert, JMP, SPSS, Statgraphics, Statistica, Matlab, R, Python, MODDE Pro....)

2.3.7 Typy experimentov podľa počtu bodov plánu experimentu

Úplný faktorový experiment (full factorial design) – experiment typu „každý s každým“ – plán zostavujeme pre každý faktor, t. j. zahŕňa všetky možné kombinácie úrovní faktorov

Čiastočný faktorový experiment (fractional factorial design) – úsporný návrh experimentu, kedy uskutočňujeme iba polovicu, štvrtinu, osminu počtu krokov experimentu „každý s každým“ – plán zostavujeme iba pre hlavné faktory, vedľajšie faktory vyjadríme pomocou hlavných, čím znížime počet meraní

2.3.8 Typy experimentov podľa počtu meraní v naplánovaných bodoch

Vyvážený model – v každom bode realizujeme rovnaký počet meraní (uprednostňujeme)

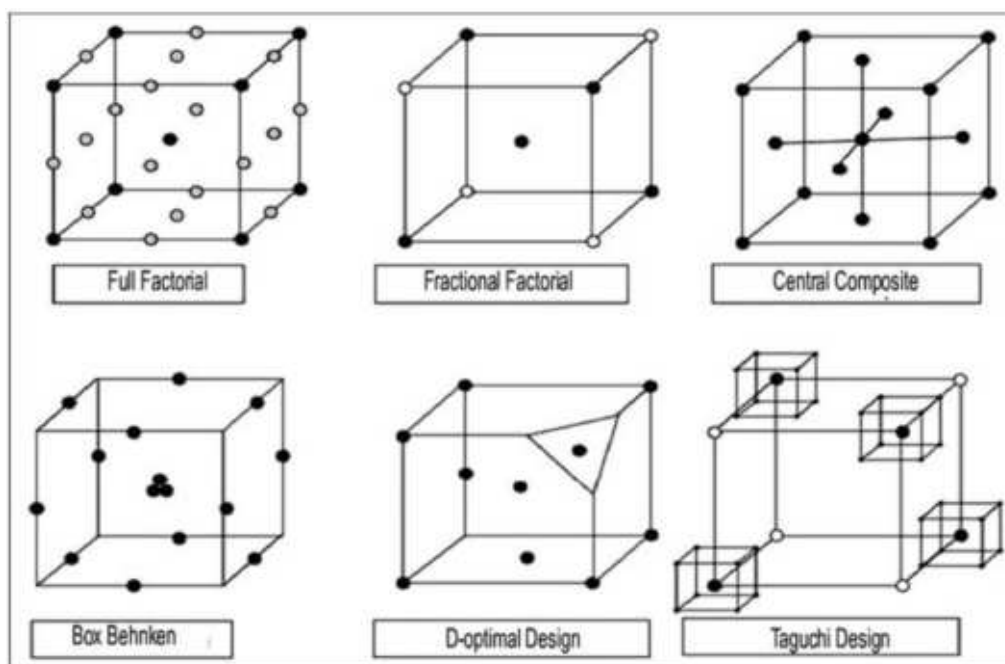
Nevyvážený model – v rôznych bodoch rôzny počet meraní

2.3.9 Typy experimentov podľa plánu experimentu

Podľa použitého plánu experimentu rozlišujeme experimenty:

- úplný faktorový (Full Factorial) – dvojúrovňový experiment 2^k , experimentu typu n^k
- čiastočný (Fractional Factorial)
- centrálny kompozitný
- Box-Behnken dizajn
- D-optimal dizajn
- Split plot dizajn
- Taguchiho dizajn
- iné

Na obr. 7 sú Cploty niektorých z uvedených.



Obr. 7 Typy experimentov podľa plánu experimentu [21]

2.3.10 Významné body plánovaného experimentu

Vrcholové body – faktorové, faktoriálne body (factorial points) – sú umiestnené v „rohoch“ experimentálneho priestoru – predstavujú kombinácie minimálnych a maximálnych hodnôt (úrovní) faktorov – po kódovaní ich súradnice zapisujeme pomocou ± 1 ; slúžia na výpočet efektov faktorov a interakcií faktorov;

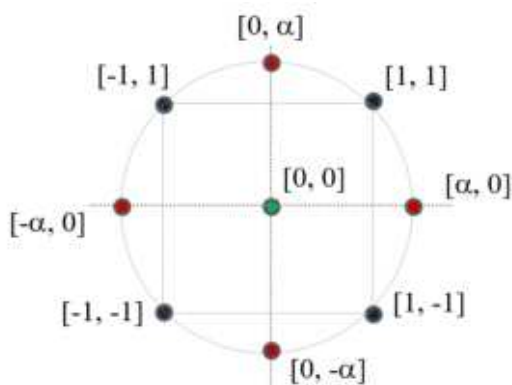
Centrálny body (central points) – nachádzajú sa v strede experimentálneho priestoru – ich kódované súradnice zapisujeme pomocou 0; ich doporučený počet pre úplný faktorový experiment je 3 až 5; môžu byť pridané do modelu, iba ak sú faktory kvantitatívne premenné; v prípade použitia kvalitatívnej premennej volíme centrálny bod pre každú úroveň kvalitatívnej premennej zvlášť. Centrálny body nemajú vplyv na výpočet efektov faktorov. Merania v centrálnych bodoch sa využívajú pri teste krivosti, pretože umožňujú odhadnúť prítomnosť zakrivenia nameranej odozvy. Z meraní Y_i v centrálnych bodoch sa dá vypočítať odhad rozptylu ako náhrada za rozptyl z opakovaných meraní (z rezíduí e_i v centrálnych bodoch sa počíta čistá chyba merania Pure Error). Sú vhodné na kontrolu stability systému.

Hviezdicové body (axial = star points) – pri dvoch faktoroch ležia na kružnici so stredom (0,0), ktorá prechádza vrcholmi štvorca; pri troch faktoroch tam, kde guľová plocha prechádzajúca vrcholovými bodmi plánu prechádza súradnicovými osami. Vždy ležia na osiach faktorového priestoru vo vzdialenosti α od stredu experimentu. Umožňujú výpočet koeficientov v úplnom kvadratickom modeli (quadratic terms) a spresňujú výpočet regresných koeficientov.

Na nasledujúcom obr. 8 sú zobrazené významné body experimentu s dvoma faktormi:

- modrou farbou faktorové (vrcholové) body;
- červenou farbou axiálne body;
- zelenou farbou centrálny bod.

V tomto prípade je $\alpha = \sqrt{2}$.



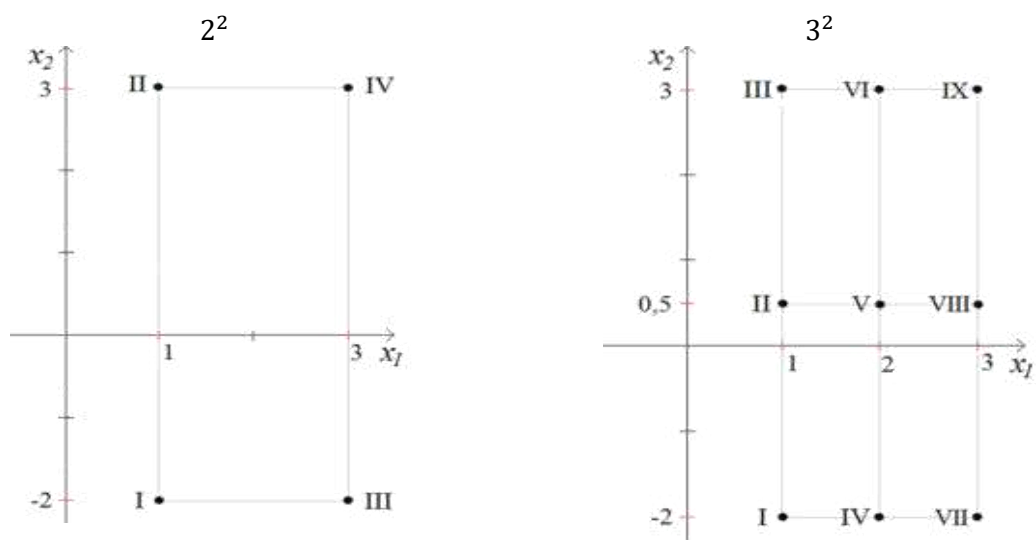
Obr. 8 Príklad rôznych typov bodov v dvojfaktovom experimente DOE

3 ÚPLNÝ FAKTOROVÝ EXPERIMENT (FULL FACTORIAL DESIGN)

Definícia:

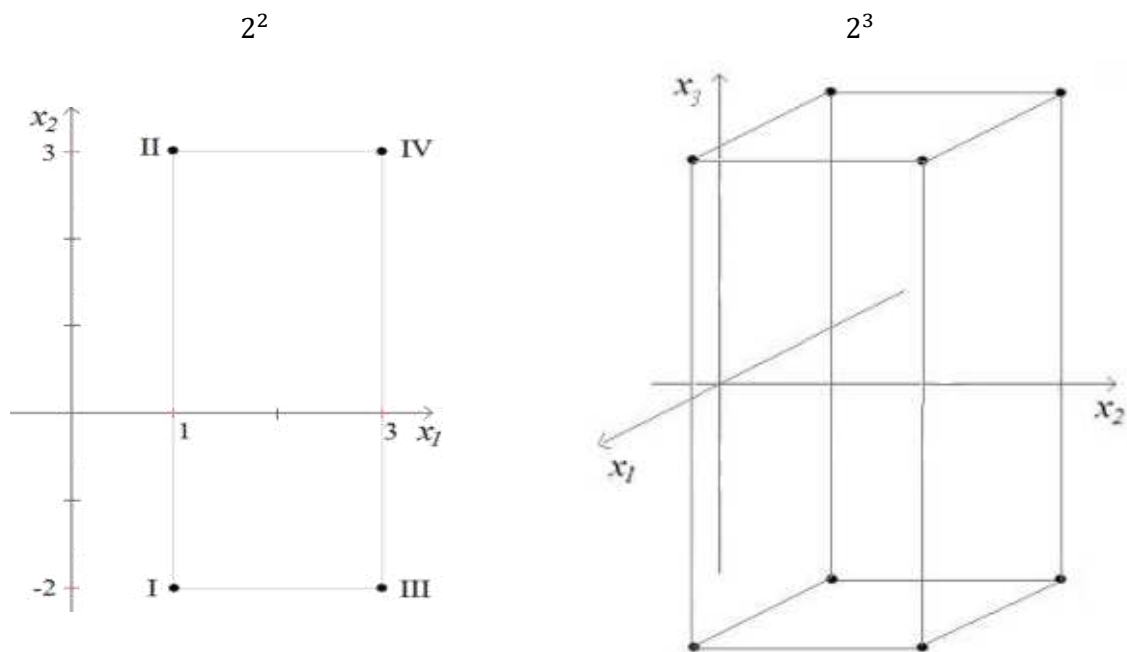
Naplánovať úplný faktorový experiment typu n^k , znamená určiť n^k rôznych bodov, v ktorých budeme realizovať merania, pričom n je počet úrovní (kvantitatívnych) faktorov, t. j. počet bodov, ktorými delíme interval hodnôt, ktoré faktor nadobúda, na $n - 1$ podintervalov rovnakej dĺžky, k je počet kvantitatívnych faktorov, m počet meraní v každom naplánovanom bode. Po samotnej realizácii plánovaného experimentu získame celkový počet meraní $m \cdot n^k$.

Na obr. 9 je porovnanie rozloženia bodov v experimentálnom priestore, v ktorých realizujeme merania pre úplný faktorový experiment s dvoma faktormi vzhľadom na počet zvolených úrovní. Vľavo je dvojúrovňový experiment pri 2 faktoroch, t. j. experiment typu 2^2 . Vpravo sú dva faktory merané na 3 úrovniach, t. j. bol zvolený experiment typu 3^2 . Experimentálny priestor je zobrazený v pôvodných (nekódovaných) jednotkách.



Obr. 9 Porovnanie rozloženia bodov v experimentálnom priestore pre 2 faktory pri úplnom faktorovom experimente v závislosti od počtu zvolených úrovní faktorov

Na obr. 10 je porovnanie rozloženia bodov v experimentálnom priestore, v ktorých realizujeme merania pre úplný faktorový experiment na dvoch úrovniach (dvojúrovňový experiment) vzhľadom na počet zvolených faktorov. Vľavo je zobrazený dvojúrovňový experimentu pre 2 faktory, t. j. experiment typu 2^2 . Vpravo je zobrazený dvojúrovňový experimentu pre 3 faktory, t. j. experiment typu 2^3 . Experimentálny priestor je zobrazený v pôvodných (nekódovaných) jednotkách.



Obr. 10 Porovnanie rozloženia bodov v experimentálnom priestore pri dvojúrovňovom úplnom faktorovom experimente v závislosti od počtu zvolených faktorov

3.1 ORTOGONALITA FAKTOROVÝCH EXPERIMENTOV

Takto navrhnuté experimenty spĺňajú podmienku ortogonality. Ortogonalita vo faktorových/faktoriálnych dizajnoch znamená, že faktory (nezávislé premenné) sú navzájom nezávislé a nekorelované. Má to niekoľko dôležitých výhod:

- **Jednoduchšia interpretácia efektov** – Vďaka ortogonalite možno hlavné účinky faktorov a účinky interakcie faktorov odhadnúť nezávisle od seba, čo vedie k čistejším a jednoznačnejším výsledkom. Efekty faktorov a ich interakcie možno odhadnúť samostatne bez vzájomného ovplyvnenia.
- **Efektívne štatistické analýzy** – Ortogonálne dizajny umožňujú presné a neskreslené odhady efektov s menšou variabilitou, čo zvyšuje spoľahlivosť výsledkov.
- **Minimalizácia multikolinearity** – Keď sú faktory ortogonálne, regresné modely netrpia problémami multikolinearity, čím sa zlepšuje stabilita odhadov parametrov.
- **Optimálne využitie experimentálnych zdrojov** – Ortogonálne faktoriálne dizajny zabezpečujú maximálnu informačnú hodnotu s minimálnym počtom pokusov, čím sa šetria čas a náklady na experimenty.

3.2 ZNAČENIE FAKTOROV A INTERAKCIÍ PRI VYHODNOCOVANÍ EXPERIMENTU

Názvom nezávislých premenných (faktorom) sa v praxi priradujú veľké písmená A, B, C...

Interakciu (vzájomné pôsobenie) medzi faktormi A, B zapisujeme súčinom: A*B alebo AxB alebo AB

Pre 2 faktory je možná jediná interakcia: AB

Pre 3 faktory uvažujeme o 4 možných interakciách:

- tri interakcie 2. rádu (ich počet počítame ako kombináciu 2. triedy z 3 faktorov, t. j. $C_2(3) = \binom{3}{2}$): AB, AC, BC
- jedna interakcia 3. rádu ($C_3(3) = \binom{3}{3}$): ABC

Pre 4 faktory existuje 11 možných interakcií:

- šesť interakcií 2. rádu (kombinácia 2. triedy zo 4 faktorov - $C_2(4) = \binom{4}{2}$): AB, AC, AD, BC, BD, CD
- štyri interakcie 3. rádu (kombinácia 3. triedy zo 4 faktorov - $C_3(4) = \binom{4}{3}$): ABC, ABD, ACD, BCD
- jedna interakcia 4. rádu ($C_4(4) = \binom{4}{4}$): ABCD

Pre n faktorov existuje spolu $\sum_{k=2}^n C_k(n) = 2^n - n - 1$ možných interakcií:

$C_2(n) = \binom{n}{2}$ interakcií 2. rádu, $C_3(n) = \binom{n}{3}$ interakcií 3. rádu, $C_4(n) = \binom{n}{4}$ interakcií 4. rádu, $C_n(n) = \binom{n}{n}$ interakcií n . rádu

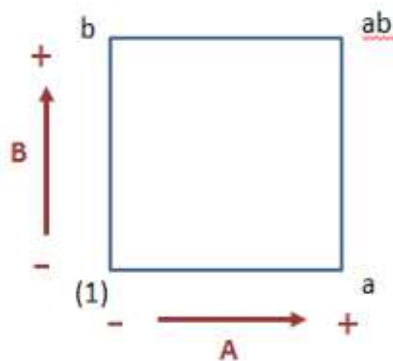
Faktorový experiment n^k sa spája so súčasným variováním všetkých úrovní k faktorov.

Faktory môžu mať vo všeobecnosti ľubovoľný počet úrovní – v praxi $n = 2$ (je to najčastejšie používaný dvojúrovňový experiment pri skríningu), pre $n = 3$ (Box-Behnkenov dizajn, Face Centered dizajn) alebo $n = 5$ (centrálny kompozitný plán) hovoríme o návrhoch odozvovej plochy.

3.3 KONVENCIA ZÁPISU ODOZVY VZHLADOM NA ZVOLENÉ ÚROVNE FAKTOROV

Dohodnuté značenia pre zrealizované meranie v jednotlivých bodoch experimentálneho priestoru je také, že malým písmenom sa označuje ten bod experimentu (experimentálneho priestoru), v ktorom je počas merania odozvy faktor označený rovnakým (veľkým) písmenom nastavený na hornú úroveň a súčasne všetky ostatné faktory sú nastavené na dolnú úroveň. Značenie (1) hovorí, že všetky faktory sú počas realizácie merania nastavené na dolnej úrovni. Namerané hodnoty bývajú častokrát prezentované formou tabuľky s takto dohodnutým značením, čo zjednodušuje zápis kombinácie úrovní faktorov, pri ktorých bolo meranie urobené. Cplot tiež umožňuje zobrazovať priemery nameraných hodnôt odozvy alebo hodnoty predikované podľa získaného regresného modelu v jednotlivých experimentálnych bodoch, a tým poskytuje vizuálnu predstavu o rozložení hodnôt odozvy v rámci experimentálneho priestoru.

Najjednoduchší dvojúrovňový experiment 2^2 a jeho dohodnuté značenie bodov, v ktorých realizujeme merania zobrazuje obr. 11.



Obr. 11 Cplot pre experiment 2^2

Význam značenia je nasledovný:

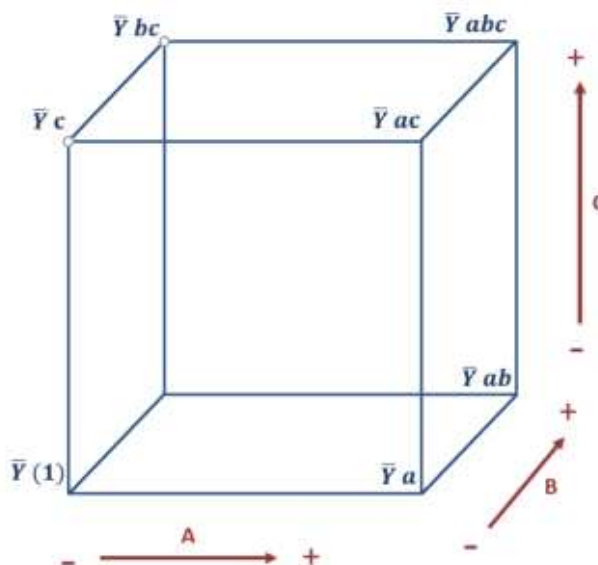
(1) oba faktory na dolnej úrovni

a predstavuje hornú úroveň faktora A a dolnú úroveň faktora B

b predstavuje hornú úroveň faktora B a dolnú úroveň faktora A

ab reprezentuje oba faktory na hornej úrovni

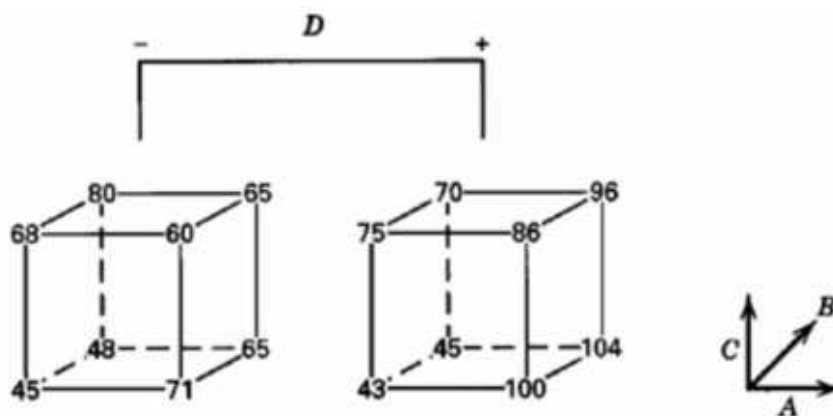
Kockový diagram (Cplot) pre tri faktory na obr. 12 zobrazuje priemerné hodnoty výstupnej premennej (odozvy) namerané v jednotlivých bodoch experimentálneho priestoru. Dohodnuté značenie, spomenuté v predchádzajúcej časti, zodpovedá jednotlivým bodom experimentálneho priestoru.



Obr. 12 Cplot pre experiment 2^3 s naznačeným značením jednotlivých experimentálnych bodov v experimentálnom priestore

Poznámka:

Príklad Cplotu pre štyri faktory s nameranými hodnotami odozvy pri experimente typu 2^4 je na obr. 13. Takýmto spôsobom možno vizuálne rozšíriť zobrazenie odozvy aj pre viac ako tri faktory, v zápise v tabuľke použiť dohodnuté značenie (1), a,... .



Obr. 13 Ukážka Cplotu pre experiment typu 2^4 [9]

3.4 HIERARCHICKÝ MODEL

Hierarchický model by mal zahŕňať všetky členy nižšieho rádu (lower-order terms), ktoré obsahujú členy vyššieho rádu (higher-order terms), ktoré sa v modeli nachádzajú.

Napríklad:

- 1) Ak je interakcia BD štatisticky významná, potom by mal model zahŕňať aj lineárny vplyv faktorov B a D, aj keď ich hlavné účinky nie sú signifikantné.
- 2) Model, ktorý obsahuje interakciu ABC je hierarchický, ak obsahuje aj členy A, B, C, AB, AC a BC.

Poznámka: Nehierarchický model nemusí zostať stabilný, ak sa zmení spôsob kódovania. Regresné modely vyjadrené v pôvodných nekódovaných jednotkách nebudú správne, ak boli odvodené z nehierarchických kódovaných modelov.

4 TYPY REGRESNÝCH MODELOV PRE K FAKTOROV

Cieľom viacnásobnej regresnej analýzy je modelovať funkčnú závislosť medzi jednou závislou premennou Y a viacerými nezávislými premennými $X_1, X_2, \dots, X_n$. Existuje niekoľko typov regresných modelov v DOE, ktoré sa používajú v závislosti od povahy vzťahov medzi skúmanými premennými:

a) **Lineárny regresný model (First-Order Model)** – predpokladá lineárny vzťah medzi závislou premennou Y a viacerými nezávislými premennými $X_1, X_2, \dots, X_n$. Predpis lineárneho regresného modelu je:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n) = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + \dots + b_nX_n + \varepsilon; \text{ kde } \varepsilon \text{ je experimentálna chyba.}$$

$$\text{Skrátený zápis: } Y = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i X_i + \varepsilon$$

Lineárny regresný model používame v lineárnej viacnásobnej regresii, keď medzi premennými existuje priamy a aditívny vzťah, napr. výšky platu (Y) je možné predikovať na základe rokov praxe (X_1) a úrovne vzdelania (X_2).

Vzťah medzi premennými však môže byť aj nelineárny (napr. polynomiálna, exponenciálna, logaritmická, logistická, Poissonova regresia,...). Výber správneho regresného modelu závisí od charakteru dát a vzťahov medzi premennými. Pri DOE sa používajú:

b) **Kvadratický neúplný model – regresný model lineárneho typu (First-Order Model with Interaction)** – neobsahuje kvadratické členy, avšak uvažujeme interakcie medzi nezávislými premennými:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n) = b_0 + b_1X_1 + \dots + b_nX_n + b_{12}X_1X_2 + \dots + b_{(n-1)n}X_{n-1}X_n + \varepsilon;$$

$$\text{Skrátený zápis: } Y = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i X_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n b_{ij}X_iX_j + \varepsilon$$

c) **Kvadratický úplný model (Second-Order Model)** – zahŕňa druhé mocniny nezávislých premenných a môže obsahovať aj interakčné členy medzi premennými, je opísaný kvadratickou funkciou:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n) = b_0 + b_1X_1 + \dots + b_nX_n + b_{12}X_1X_2 + \dots + b_{(n-1)n}X_{n-1}X_n + b_{11}X_1^2 + \dots + b_{nn}X_n^2 + \varepsilon;$$

$$\text{Skrátený zápis: } Y = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i X_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n b_{ij}X_iX_j + \sum_{i=1}^n b_{ii}X_i^2 + \varepsilon$$

Nasledujúca tabuľka 1 ukazuje rozdiely v zastúpení lineárnych, kvadratických a tzv. interakčných členov v regresnom modeli. V úvodnej fáze pri hľadaní koeficientov zvoleného regresného modelu členy označené v tabuľke vo zvolenom regresnom modeli uvažujeme. To však nevylučuje, že pri ďalšom skúmaní môžu byť z modelu vylúčené ako nevýznamné.

Tabuľka 1 Rozdiel v zastúpení členov v regresných modeloch			
Model	Obsahuje lineárne členy?	Obsahuje interakčné členy?	Obsahuje kvadratické členy?
Lineárny	 áno	 nie	 nie
Kvadratický neúplný (Lineárneho typu)	 áno	 áno	 nie
Kvadratický úplný	 áno	 áno	 áno

4.1 REGRESNÝ MODEL PRE 2 FAKTORY

Regresný model pre 2 faktory na základe uvedeného môže byť:

a) **Lineárny** – uvažujeme iba o lineárnom vplyve dvoch faktorov a neuvažuje o interakcii týchto faktorov, závislosť Y od faktorov X_1, X_2 je popísaná lineárnou funkciou

$$Y = f(X_1, X_2) = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + \varepsilon;$$

kde koeficienty b_1, b_2 je možné nájsť ako polovičné odhady efektov alebo MNŠ; b_0 je celkový priemer nameraných dát, ε je experimentálna chyba

b) **Kvadratický neúplný model – regresný model lineárneho typu** – neobsahuje kvadratické členy, avšak uvažujeme interakcie medzi oboma faktormi

$$Y = f(X_1, X_2) = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_{12}X_1X_2 + \varepsilon;$$

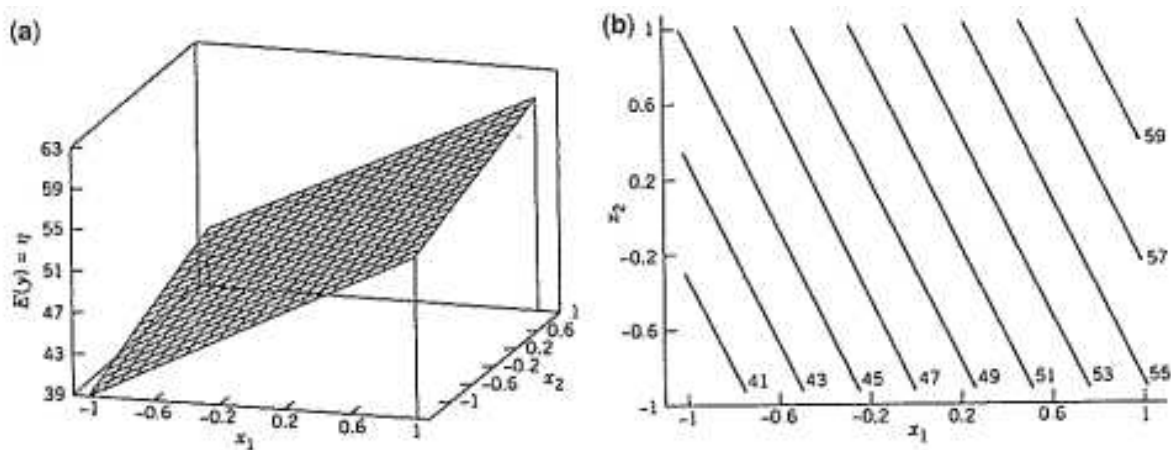
koeficienty b_1, b_2, b_{12} je možné nájsť ako polovičné odhady efektov alebo MNŠ; b_0 je celkový priemer nameraných dát, ε je experimentálna chyba.

c) **Kvadratický úplný model** – je popísaný kvadratickou funkciou

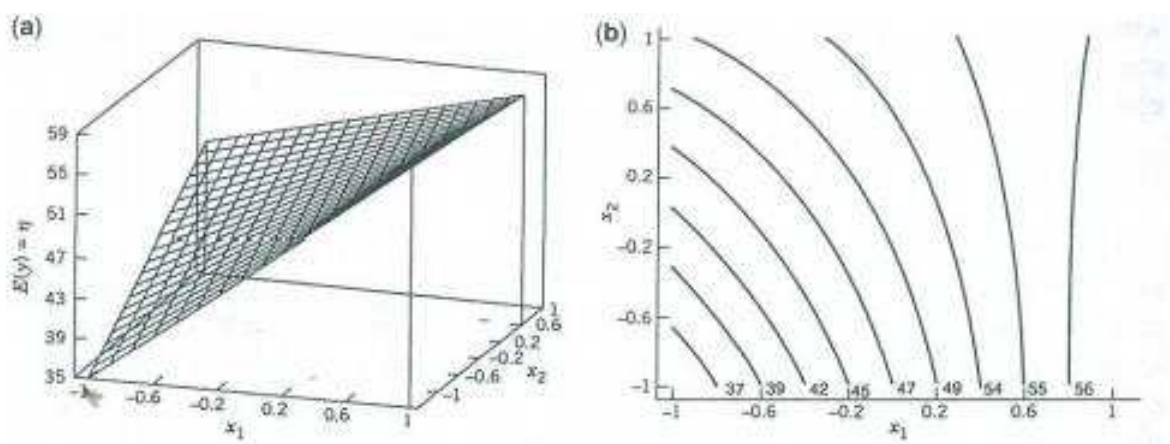
$$Y = f(X_1, X_2) = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_{11}X_1^2 + b_{22}X_2^2 + b_{12}X_1X_2 + \varepsilon;$$

koeficienty nie je možné nájsť pomocou efektov alebo MNŠ; vyžaduje zložitejšie plány experimentu (kombinovaný, viacúrovňový...). Kvadratický regresný model slúži na výpočet optimálnych hodnôt faktorov, na výpočet hodnôt Y pre ľubovoľnú úroveň faktorov.

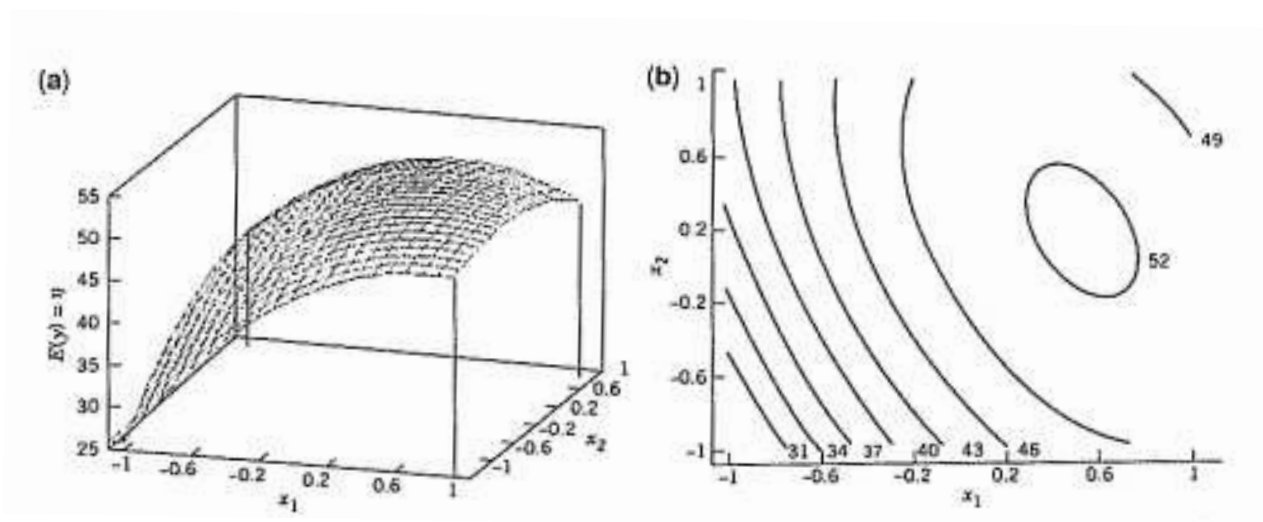
Na nasledujúcich obr. 14 až 16 sú zobrazené príklady jednotlivých typov regresných modelov pre 2 faktory od lineárneho, ktorý je v 3D priestore zobrazený rovinou a jeho vrstevnicový graf sa zobrazuje ako rovnobežné priamky, cez neúplný kvadratický regresný model, kedy sa interakčný člen prejaví v zakrivení izočiari, po úplný kvadratický regresný model, kedy je kvadratické zakrivenie odozvovej plochy vyjadrené kvadratickým členmi a izočiary sú zobrazené ako sústredné kružnice, resp. elipsy so spoločnou hlavnou a vedľajšou osou.



Obr. 14 Lineárny regresný model $\eta = 50 + 8x_1 + 3x_2$ pre dva faktory zobrazený ako rovina, vrstevnice sú rovnobežné priamky [10]

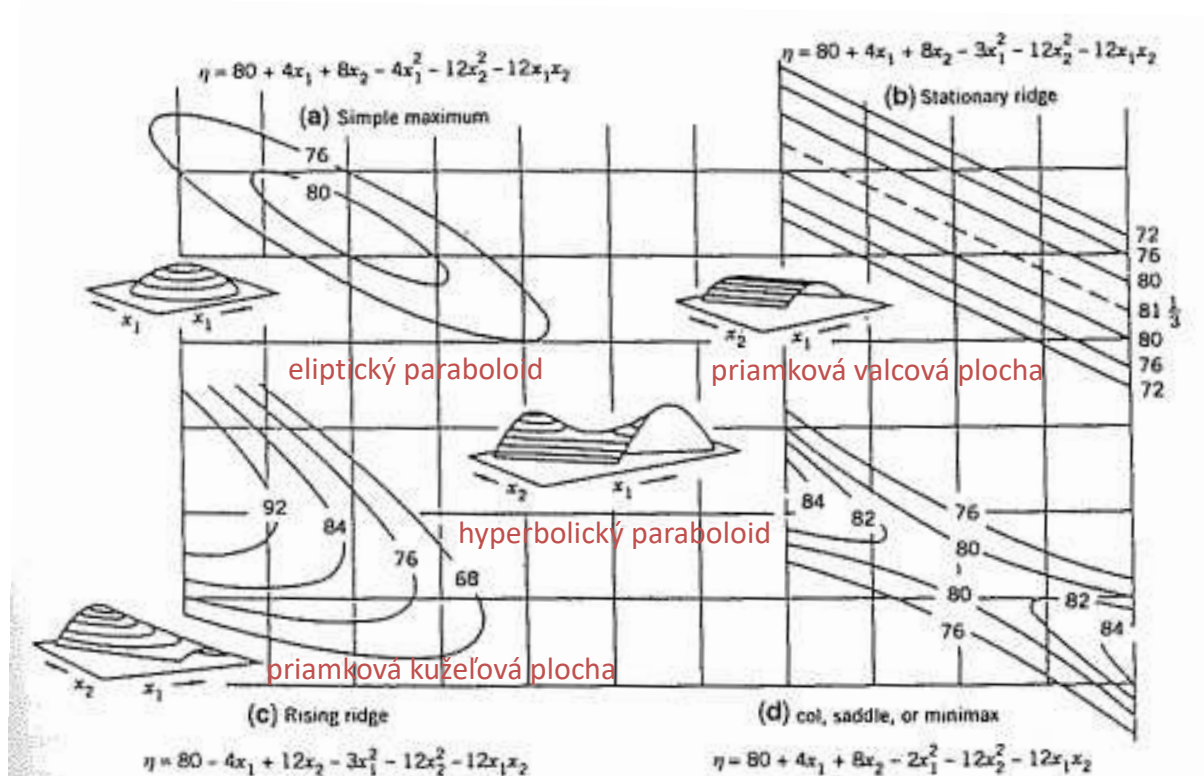


Obr. 15 Neúplný kvadratický model $\eta = 50 + 8x_1 + 3x_2 - 4x_1x_2$ pre dva faktory s interakčným členom prejavujúcim sa zakrivením odozvovej plochy, vrstevnice naznačujú zakrivenie [10]



Obr. 16 Úplný kvadratický regresný model $\eta = 50 + 8x_1 + 3x_2 - 7x_1^2 - 3x_2^2 - 4x_1x_2$ s kvadratickými členmi, kde sa vrstevnice zobrazujú ako elipsy so spoločným stredom, spoločnou hlavnou a vedľajšou osou [10]

Na obr. 17 je porovnanie rôznych kvadratických regresných modelov pre 2 faktory v závislosti od regresných koeficientov získaných preložením regresného modelu cez namerané hodnoty závislej premennej – odozvy Y .



Obr. 17 Porovnanie rôznych úplných kvadratických regresných modelov v závislosti od hodnôt regresných koeficientov [10]

4.2 POSTUP PRI HĽADANÍ KOEFICIENTOV REGRESNEJ FUNKCIE LINEÁRNEHO TYPU PRE 2 FAKTORY

Pri vyhodnocovaní nameraných hodnôt pri experimente typu 2^2 nerobíme bodové odhady regresných koeficientov v pôvodnom regresnom modeli, ale použijeme transformovaný regresný model. Až následne po vyhodnotení sa môžeme vrátiť k pôvodným jednotkám faktorov. Postup je nasledovný:

1. Voľba funkcie lineárneho typu (uvažujeme o interakcii faktorov):

$$y = f_L(x_1, x_2) = B_0 + B_1x_1 + B_2x_2 + B_{12}x_1x_2$$

2. Transformácia zvolenej funkcie v pôvodných jednotkách na transformovanú (kódovanú) funkciu lineárneho typu:

$$y_t = (f_L)_t(t_1, t_2) = b_0 + b_1t_1 + b_2t_2 + b_{12}t_1t_2$$

3. Odhad transformovanej funkcie metódou najmenších štvorcov (MNS) – transformovaná regresná funkcia lineárneho typu je:

$$\hat{y}_t = (\hat{f}_L)_t(t_1, t_2) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1t_1 + \hat{b}_2t_2 + \hat{b}_{12}t_1t_2$$

4. Odhad pôvodnej regresnej funkcie lineárneho typu (v pôvodných jednotkách):

$$\hat{y} = \hat{f}_L(x_1, x_2) = \hat{B}_0 + \hat{B}_1x_1 + \hat{B}_2x_2 + \hat{B}_{12}x_1x_2$$

Uvedený postup naznačuje, že pri bodových odhadoch regresných koeficientov robíme transformáciu pôvodných hodnôt faktorov do kódovaných hodnôt. Význam, princíp a spôsob kódovania sú uvedené v ďalšej časti.

4.3 LINEÁRNA TRANSFORMÁCIA – KÓDOVANIE

Kódovanie v DOE umožňuje jednoduchšiu a efektívnejšiu analýzu experimentálnych dát, zlepšuje interpretáciu výsledkov a uľahčuje identifikáciu optimálnych podmienok pre daný proces alebo systém. Kódovanie spočíva v niekoľkých kľúčových aspektoch:

Štandardizácia údajov: Kódovanie umožňuje premeniť rôzne meracie jednotky faktorov na bezrozmerné, normované hodnoty. To je užitočné, keďže faktory môžu mať rôzne rozsahy a meracie jednotky, čo môže komplikovať analýzu.

Zjednodušenie matematických výpočtov: Prevod hodnôt faktorov na kódované úrovne uľahčuje štatistické výpočty. Kódovanie vedie k efektívnejšiemu spracovaniu modelov.

Zlepšenie interpretácie výsledkov: Kódovanie umožňuje identifikovať „čisté“ hlavné efekty a interakcie medzi faktormi. Kódované hodnoty ± 1 a 0 sú intuitívnejšie a prehľadnejšie, čo uľahčuje interpretáciu grafov a tabuliek.

Zníženie multikolinearity: Pri použití kódovaných hodnôt sa znižuje riziko multikolinearity medzi faktormi v regresných modeloch, čo vedie k spoľahlivejším a stabilnejším odhadom koeficientov.

Univerzálnosť a prenosnosť: Kódované modely sú univerzálnejšie a ľahšie prenositeľné medzi rôznymi štúdiami a aplikáciami. Modely vytvorené na základe kódovaných hodnôt sú všeobecnejšie použiteľné a adaptabilné, majú numerickú stabilitu.

Vizualizácia a optimalizácia: Použitie kódovaných hodnôt uľahčuje tvorbu a interpretáciu grafických reprezentácií, ako sú vrstevnicové grafy a 3D grafy odozvovej plochy pre dva faktory, čo je kľúčové pre vizualizáciu závislosti odozvy od faktorov a hľadanie optimálnych hodnôt úrovní faktorov.

Výsledkom regresnej analýzy kódovaných premenných sú kódované, t. j. bezrozmerné koeficienty – vyjadrujú účinok zmeny každého faktora na rovnakom „jednotkovom“ intervale. Pomocou relatívnej veľkosti efektov kódovaných faktorov, tzv. štandardizovaných efektov, dokážeme porovnávať ich veľkosti, t. j. „dôležitosť vplyvu“ na odozvu, medzi sebou.

Bodový odhad všetkých koeficientov robíme s rovnakou presnosťou, štandardná chyba odhadov regresných koeficientov je konštantná, napr. na obr.18 je rovná 11,865.

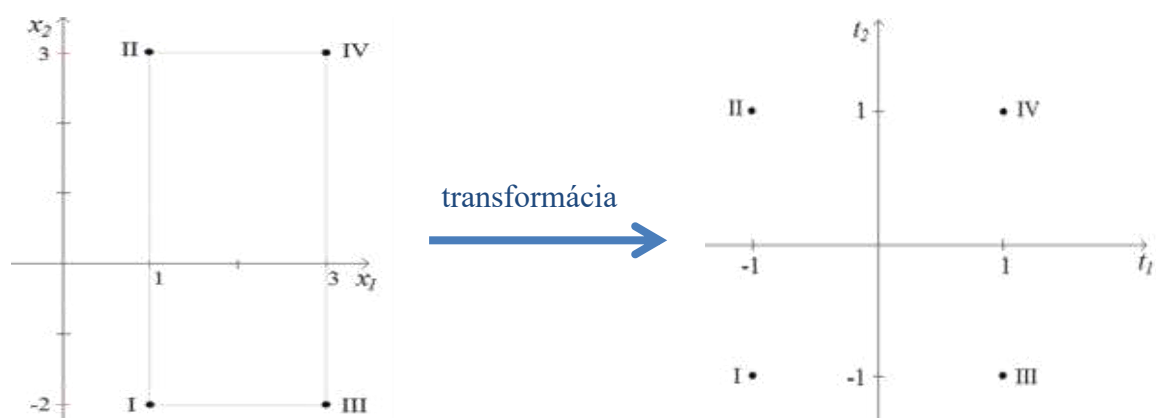
	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%
Intercept	776,0625	11,86529208	65,4061	3,32E-12	748,701087	803,423913
t1	-50,8125	11,86529208	-4,28245	0,002679	-78,173913	-23,451087
t2	3,6875	11,86529208	0,31078	0,763911	-23,673913	31,0489126
t3	153,0625	11,86529208	12,90002	1,23E-06	125,701087	180,423913
t1*t2	-12,4375	11,86529208	-1,04823	0,325168	-39,798913	14,9239126
t1*t3	-76,8125	11,86529208	-6,47371	0,000193	-104,17391	-49,451087
t2*t3	-1,0625	11,86529208	-0,08955	0,930849	-28,423913	26,2989126
t1*t2*t3	2,8125	11,86529208	0,237036	0,818586	-24,548913	30,1739126

Obr. 18 Pri bodových odhadoch regresných koeficientov sa dopúšťame rovnakej chyby, koeficienty sú štandardizované, veľkosť vplyvu faktorov na odozvu je možné vzhľadom na štandardizáciu porovnávať a získaný regresný model má numerickú stabilitu

Definícia: Lineárna transformácia je zobrazenie, ktoré transformuje interval faktora vyjadrený v pôvodných jednotkách na interval vyjadrený v kódovaných jednotkách:

$$x \in \langle a, b \rangle \xrightarrow{t(x)} t \in \langle -1, 1 \rangle$$

Ak faktor nadobúda hodnoty z intervalu $\langle a, b \rangle$: $x \in \langle a, b \rangle$, kde $s = \frac{a+b}{2}$ je stred intervalu $\langle a, b \rangle$ a $\lambda = \frac{b-a}{2}$ je polovica dĺžky (variačné rozpätie) intervalu $\langle a, b \rangle$, potom lineárna transformácia $t(x) = \frac{x-s}{\lambda}$ zobrazí interval $\langle a, b \rangle$ na interval $\langle -1, 1 \rangle$. Transformácia „posunie a zmení tvar“ experimentálnej oblasti, ako je vidieť na obr. 19.



Obr. 19 Transformácia experimentálneho priestoru vyjadreného v pôvodných jednotkách do experimentálneho priestoru vyjadreného v kódovaných jednotkách

4.4 ODHAD KOEFICIENTOV TRANSFORMOVANEJ REGRESNEJ FUNKCIE LINEÁRNEHO TYPU V ÚPLNOM EXPERIMENTE TYPU 2^2 METÓDOU NAJMENŠÍCH ŠTVORCOV (MNŠ)

Bodový odhad koeficientov regresného modelu lineárneho typu po transformácii robíme pomocou rovnice regresného modelu lineárneho typu vyjadreného pomocou faktorov v transformovaných jednotkách:

$$\hat{y}_t = (\hat{f}_L)_t(t_1, t_2) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 t_1 + \hat{b}_2 t_2 + \hat{b}_{12} t_1 t_2$$

Nastavenia úrovní faktorov v naplánovaných 4 bodoch úplného faktorového experimentu typu 2^2 bez replikácií po transformácii tvoria plán experimentu:

$$I: \hat{y}_t = (\hat{f}_L)_t(-1; -1) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1(-1) + \hat{b}_2(-1) + \hat{b}_{12}(-1)(-1)$$

$$II: \hat{y}_t = (\hat{f}_L)_t(-1; 1) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1(-1) + \hat{b}_2(1) + \hat{b}_{12}(-1)(1)$$

$$III: \hat{y}_t = (\hat{f}_L)_t(1; -1) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1(1) + \hat{b}_2(-1) + \hat{b}_{12}(1)(-1)$$

$$IV: \hat{y}_t = (\hat{f}_L)_t(1; 1) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1(1) + \hat{b}_2(1) + \hat{b}_{12}(1)(1)$$

Tejto sústave priradíme matice.

Transformovaná matica plánu experimentu:

$$X_t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vo všeobecnosti transformovaná matica plánu experimentu nemusí byť štvorcová (pri replikáciách). Transponovaná matica k transformovanej matici plánu experiment X_t je:

$$X_t^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Stĺpec meraní označíme ako maticu nameraných hodnôt:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

A vektor odhadov koeficientov:

$$\hat{b} = \begin{pmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_{12} \end{pmatrix}$$

Zápis $(\hat{f}_L)_t(t_1, t_2) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 t_1 + \hat{b}_2 t_2 + \hat{b}_{12} t_1 t_2 = \hat{y}_t$ je možno vyjadriť pomocou maticovej rovnice v tvare:

$$X_t \cdot \hat{b} = Y,$$

kde X_t je transformovaná matica plánu experimentu, $\hat{b}$ je stĺpcový vektor odhadov koeficientov a Y je matica nameraných hodnôt.

Výpočet maticovej rovnice je nasledovný:

$$X_t \cdot \hat{b} = Y \quad / \cdot X_t^T \text{ zľava; } X_t^T \text{ je transponovaná matica k transformovanej matici } X_t$$

$$X_t^T \cdot X_t \cdot \hat{b} = X_t^T \cdot Y \quad X_t^T \cdot X_t \text{ je štvorcová matica; ak } \exists \text{ k nej inverzná matica}$$

$$(X_t^T \cdot X_t)^{-1} \cdot (X_t^T \cdot X_t) \cdot \hat{b} = (X_t^T \cdot X_t)^{-1} \cdot X_t^T \cdot Y$$

$$E \cdot \hat{b} = (X_t^T \cdot X_t)^{-1} \cdot X_t^T \cdot Y$$

$$\hat{b} = (X_t^T \cdot X_t)^{-1} \cdot X_t^T \cdot Y$$

Po rozpísaní súčinu

$$\begin{aligned} X_t^T \cdot X_t &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 \cdot E = 2^2 \cdot E \end{aligned}$$

Bodový odhad koeficientov v experimente typu 2^2 bez replikácií je:

$$\hat{b} = \begin{pmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_{12} \end{pmatrix} = (X_t^T \cdot X_t)^{-1} \cdot X_t^T \cdot Y = \frac{1}{2^2} \cdot X_t^T \cdot Y$$

Ak by sme robili m meraní v každom bode, v matici X_t by sa každý riadok opakoval m -krát, t. j. $X_t^T \cdot X_t = m \cdot 2^2 E$. Všeobecne pre experiment 2^k dostaneme $X_t^T \cdot X_t = m \cdot 2^k E$.

Vzťah na výpočet matice bodových odhadov koeficientov $\hat{b} = (X_t^T \cdot X_t)^{-1} \cdot X_t^T \cdot Y$ by mal tvar $\hat{b} = (m \cdot 2^k E)^{-1} \cdot X_t^T \cdot Y$, odkiaľ dostaneme odhad koeficientov transformovanej regresnej funkcie lineárneho typu pre experiment typu 2^2 s m replikáciami

$$\hat{b} = \begin{pmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{m \cdot 2^k} \cdot X_t^T Y,$$

m je počet meraní v každom bode a k je počet faktorov v experimente typu 2^k , $\cdot X_t^T$ je transponovaná matica plánu experimentu X_t , Y je stĺpec nameraných hodnôt prislúchajúci daným úrovniam faktorov, vyjadrených v kódovaných hodnotách.

Skrátená metóda výpočtu

Stĺpcový vektor nameraných hodnôt $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{m \cdot 2^k} \end{pmatrix}$ nahradíme stĺpcom ich aritmetických priemerov v každom bode experimentu $Y = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 \\ \bar{y}_4 \end{pmatrix}$ a počet meraní uvažujeme $m = 1$.

Výpočet koeficientov pomocou rozšírenej matice plánu

matice plánu experimentu X

aditívna
konštanta

stĺpce
samostatného
pôsobenia
faktorov t_1, t_2

stĺpec
spoločného
pôsobenia
faktorov t_1, t_2

namerané
hodnoty y

$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$

y_1
 y_2
 y_3
 y_4

$\sum$

4

0

0

0

Súčet prvkov v 1. stĺpci označíme N .

Súčet prvkov v 2., 3., 4. stĺpci je rovný nule – plán je vyvážený.

Skalárny súčin dvojíc vektorov v stĺpcoch je rovný nule – plán je ortogonálny.

Vzorec pre odhad (výpočet) koeficientov: $\hat{b}_i = \frac{1}{N} \sum_j t_{ji} y_j$.

Príklad: Sleduje sa kvalita používaných pružín na základe toho, koľko "stlačení" (Y) vydržia až do zničenia v závislosti od dĺžky pružiny ($x_1 \in \langle 10 \text{ cm}, 15 \text{ cm} \rangle$) a od hrúbky použitého drôtu ($x_2 \in \langle 5 \text{ mm}, 7 \text{ mm} \rangle$).

1. Naplánujte experiment typu 2^2 a určte lineárne transformácie, ktoré zobrazia intervaly $\langle 10, 15 \rangle$ a $\langle 5, 7 \rangle$ na interval $\langle -1, 1 \rangle$.

2. Metódou najmenších štvorcov odhadnite koeficienty transformovanej regresnej funkcie lineárneho typu, ak v naplánovaných bodoch boli namerané nasledovné hodnoty:

$$y_1 = f(10, 5) = 77; \quad y_3 = f(10, 7) = 98; \quad y_5 = f(15, 5) = 76; \quad y_7 = f(15, 7) = 90;$$

$$y_2 = f(10, 5) = 63; \quad y_4 = f(10, 7) = 82; \quad y_6 = f(15, 5) = 72; \quad y_8 = f(15, 7) = 92.$$

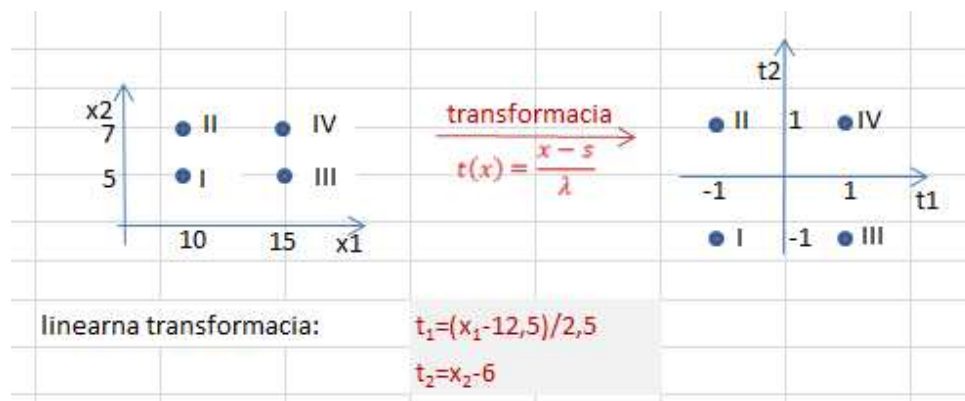
Riešenie. Príklad možno vyriešiť v Exceli využitím funkcie násobenia matic MMULT, funkcie TRANSPOSE, ktorou získame transponovanú maticu X^T k transformovanej matici plánu experimentu X a využitím nami definovaných funkcií. Celé riešenie príkladu je zobrazené v Exceli na nasledujúcich obr. 20 až 22.

	A	B	C	D	E	F	G
10							
11	x_1 :	10	15	stred=	= (B11+C11)/2	lambda=	= (C11-B11)/2
12	x_2 :	5	7		= (B12+C12)/2		= (C12-B12)/2

	A	B	C	D	E	F	G
10							
11	x_1 :	10	15	stred=	12,5	lambda=	2,5
12	x_2 :	5	7		6		1

Obr. 20 Výpočet stredy a variačného rozpätia intervalov faktorov x_1 a x_2

Vzťah, ktorý popisuje použité transformačné vzťahy a transformácia naplánovaných bodov I až IV do nových súradníc t_1, t_2 , sú na obr. 21.



Obr. 21 Grafické zobrazenie bodov I, II, III a IV pred a po transformácii.

Pred začatím výpočtu odhadov koeficientov $\hat{b}_i$ je potrebné napísať transformovanú maticu plánu experimentu X (pole buniek B32:E39), ktorú vytvoríme opísaním koeficientov t_{ij} , ktoré sa nachádzajú pri jednotlivých premenných b_{ij} .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
25	MNS odhadneme koeficienty transformovanej regresnej funkcie lineárneho typu								$\hat{y}_T = \hat{f}_T(t_1, t_2) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 t_1 + \hat{b}_2 t_2 + \hat{b}_{12} t_1 t_2$				
26													
27		m= 2				$\hat{b} = \begin{pmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{m \cdot 2^k} X^T Y$			I: $f(-1,-1) = b_0 + b_1 \cdot (-1) + b_2 \cdot (-1) + b_{12} \cdot (-1) \cdot (-1)$				
28		2^k= 4							II: $f(-1,1) = b_0 + b_1 \cdot (-1) + b_2 \cdot (1) + b_{12} \cdot (-1) \cdot (1)$				
29		m \cdot 2^k= 8							III: $f(1,-1) = b_0 + b_1 \cdot (1) + b_2 \cdot (-1) + b_{12} \cdot (1) \cdot (-1)$				
30									IV: $f(1,1) = b_0 + b_1 \cdot (1) + b_2 \cdot (1) + b_{12} \cdot (1) \cdot (1)$				
31			b ₀	b ₁	b ₂	b ₁₂							
32	X=	1	-1	-1	1		Y=	77					
33		1	-1	-1	1			63					
34		1	-1	1	-1			98					
35		1	-1	1	-1			82					
36		1	1	-1	-1			76					
37		1	1	-1	-1			72					
38		1	1	1	1			90					
39		1	1	1	1			92					
40													
41	XT= =TRANSPOSE(B32:E39)												
42													
43													
44													
45													
46	XT*Y=	=MMULT(B41:I44;G32:G39)				b=	=B46/8		b ₀ =	=B46/8			
47							=B47/8		b ₁ =	=B47/8			
48							=B48/8		b ₂ =	=B48/8			
49							=B49/8		b ₁₂ =	=B49/8			
50	odhad transformovanej regresnej funkcie lineárneho typu												
51	f(t ₁ ,t ₂)=	=H46	+	=H47	*t ₁	+	=H48	*t ₂	+	=H49	*t ₁ *t ₂		

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
25	MNS odhadneme koeficienty transformovanej regresnej funkcie lineárneho typu								$\hat{y}_T = \hat{f}_T(t_1, t_2) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 t_1 + \hat{b}_2 t_2 + \hat{b}_{12} t_1 t_2$				
26													
27		m= 2				$\hat{b} = \begin{pmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{m \cdot 2^k} X^T Y$			I: $f(-1,-1) = b_0 + b_1 \cdot (-1) + b_2 \cdot (-1) + b_{12} \cdot (-1) \cdot (-1)$				
28		2^k= 4							II: $f(-1,1) = b_0 + b_1 \cdot (-1) + b_2 \cdot (1) + b_{12} \cdot (-1) \cdot (1)$				
29		m \cdot 2^k= 8							III: $f(1,-1) = b_0 + b_1 \cdot (1) + b_2 \cdot (-1) + b_{12} \cdot (1) \cdot (-1)$				
30									IV: $f(1,1) = b_0 + b_1 \cdot (1) + b_2 \cdot (1) + b_{12} \cdot (1) \cdot (1)$				
31			b ₀	b ₁	b ₂	b ₁₂							
32	X=	1	-1	-1	1		Y=	77					
33		1	-1	-1	1			63					
34		1	-1	1	-1			98					
35		1	-1	1	-1			82					
36		1	1	-1	-1			76					
37		1	1	-1	-1			72					
38		1	1	1	1			90					
39		1	1	1	1			92					
40													
41	XT=	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
42		-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	
43		-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	
44		1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	
45													
46	XT*Y=	650				b=	81,25		b ₀ =	81,25			
47		10					1,25		b ₁ =	1,25			
48		74					9,25		b ₂ =	9,25			
49		-6					-0,75		b ₁₂ =	-0,75			
50	odhad transformovanej regresnej funkcie lineárneho typu												
51	f(t ₁ ,t ₂)=	81,25	+	1,25	*t ₁	+	9,25	*t ₂	+	-0,75	*t ₁ *t ₂		

Obr. 22 Výpočet bodových odhadov regresných koeficientov MNS v Exceli

Bodový odhad koeficientov $\hat{b}_i$ môžeme v Exceli nájsť aj pomocou rozšírenej matice plánu. Výpočet je zobrazený na nasledujúcom obr. 23.

	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
13		b_0	b_1	b_2	b_{12}					
14		1	t_1	t_2	t_1*t_2	y_i	$1*y_i$	t_1*y_i	t_2*y_i	$t_1*t_2*y_i$
15		1	-1	-1	=I15*J15	77	=H15*\$L15	=I15*\$L15	=J15*\$L15	=K15*\$L15
16		1	-1	-1	=I16*J16	63	=H16*\$L16	=I16*\$L16	=J16*\$L16	=K16*\$L16
17		1	-1	1	=I17*J17	98	=H17*\$L17	=I17*\$L17	=J17*\$L17	=K17*\$L17
18		1	-1	1	=I18*J18	82	=H18*\$L18	=I18*\$L18	=J18*\$L18	=K18*\$L18
19		1	1	-1	=I19*J19	76	=H19*\$L19	=I19*\$L19	=J19*\$L19	=K19*\$L19
20		1	1	-1	=I20*J20	72	=H20*\$L20	=I20*\$L20	=J20*\$L20	=K20*\$L20
21		1	1	1	=I21*J21	90	=H21*\$L21	=I21*\$L21	=J21*\$L21	=K21*\$L21
22		1	1	1	=I22*J22	92	=H22*\$L22	=I22*\$L22	=J22*\$L22	=K22*\$L22
23	Σ :	=SUM(H15:H22)	=SUM(I15:I22)	=SUM(J15:J22)	=SUM(K15:K22)		=SUM(M15:M22)	=SUM(N15:N22)	=SUM(O15:O22)	=SUM(P15:P22)
24							$b_0=$	$b_1=$	$b_2=$	$b_{12}=$
25							=M23/\$H\$23	=N23/\$H\$23	=O23/\$H\$23	=P23/\$H\$23

	b_0	b_1	b_2	b_{12}					
	1	t_1	t_2	t_1*t_2	y_i	$1*y_i$	t_1*y_i	t_2*y_i	$t_1*t_2*y_i$
	1	-1	-1	1	77	77	-77	-77	77
	1	-1	-1	1	63	63	-63	-63	63
	1	-1	1	-1	98	98	-98	98	-98
	1	-1	1	-1	82	82	-82	82	-82
	1	1	-1	-1	76	76	76	-76	-76
	1	1	-1	-1	72	72	72	-72	-72
	1	1	1	1	90	90	90	90	90
	1	1	1	1	92	92	92	92	92
Σ :	8	0	0	0		650	10	74	-6
						$b_0=$	$b_1=$	$b_2=$	$b_{12}=$
						81,25	1,25	9,25	-0,75

Obr. 23 Výpočet koeficientov pomocou rozšírenej matice plánu

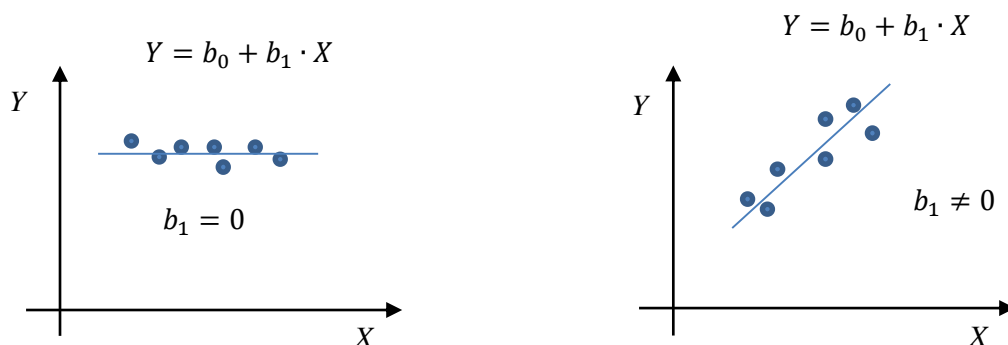
4.5 VYHODNOTENIE EXPERIMENTU TYPU 2² POMOCOU TESTOVANIA HYPOTÉZ

Štatistické vyhodnotenie je potrebné robiť na transformovaných (kódovaných) hodnotách. Uvažujme preto transformovanú regresnú funkciu lineárneho typu

$$(f_L)_t(t_1, t_2) = b_0 + b_1 t_1 + b_2 t_2 + b_{12} t_1 t_2.$$

Ak je b_i v absolútnej hodnote malé číslo (zapisujeme $b_i = 0$), potom faktor t_i nemá významný vplyv na hodnotu transformovanej funkcie $(f_L)_t(t_1, t_2)$, ak b_i je v absolútnej hodnote veľké číslo (zapišeme $b_i \neq 0$), potom faktor t_i má veľký vplyv na hodnotu transformovanej funkcie $(f_L)_t(t_1, t_2)$. Rovnaké úvahy platia aj pre koeficient b_{ij} , ktorým popisujeme veľkosť vzájomného pôsobenia faktorov t_i a t_j .

Obr. 24 vysvetľuje, prečo je možné lineárnu závislosť medzi dvoma premennými X a Y vyjadriť pomocou nenulového regresného koeficientu b_1 . Vľavo, keď sa smernica preloženej priamky b_1 rovná nule, vidieť, že premenná X sa mení, ale premenná Y napriek tomu zostáva konštantná – nemôžeme tvrdiť, že medzi X a Y existuje závislosť. Naopak vpravo hodnoty premennej X narastajú súčasne s hodnotami premennej Y . V tomto prípade stojí nenulový koeficient b_1 pri lineárnom člene X , preto môžeme povedať, že závislosť je lineárna.



Obr. 24 Zdôvodnenie k testovaniu nulovosti regresného koeficientu b_i pri testovaní závislosti medzi dvoma premennými

Tvrdenia $b_i = 0$, resp. $b_i \neq 0$ sú pre nás hypotézami, ktorých platnosť testujeme. V praxi hodnoty b -koeficientov nepoznáme, poznáme iba ich odhady $\hat{b}$, ktoré použijeme pri výpočte testovacej štatistiky.

4.5.1 Test štatistickej významnosti jednotlivých parametrov (faktorov a interakcií faktorov) vyjadrený testom štatistickej významnosti regresných koeficientov regresného modelu lineárneho typu pre experiment typu 2^2 s m replikáciami

Realizujeme individuálny t-test štatistickej významnosti vzťahu Y (závislej premennej) s určitou nezávislou premennou x_i v danom regresnom modeli. O všeobecnom princípe testovania hypotéz viac v [16]. Testujeme na hladine významnosti α . Testované hypotézy sú:

$$H_0: b_i = 0 \leq H_1: b_i \neq 0 \text{ pre } i = 1, 2, 12$$

Pod uvedeným zápisom rozumieme hypotézy, ktoré je možné vyjadriť slovami:

H_0 : Regresný koeficient b_i nie je štatisticky významný ($b_i = 0, i = 1, 2, 12$), t. j. faktor t_i nemá veľký vplyv na funkciu $(f_L)_t$, t. j. x_i nemá veľký vplyv na funkciu f_L – vplyv nie je štatisticky významný.

H_1 : Regresný koeficient b_i je štatisticky významný ($b_i \neq 0, i = 1, 2, 12$), t. j. faktor t_i má veľký vplyv na funkciu $(f_L)_t$, t. j. x_i má veľký vplyv na funkciu f_L – vplyv je štatisticky významný.

Použijeme testovaciu charakteristiku (štatistiku) s predpisom:

$$t(b_i) = \frac{\hat{b}_i \cdot 2^k \cdot \sqrt{m(m-1)}}{R_0} = \frac{\hat{b}_i}{SE(\hat{b}_i)} \sim t((m-1) \cdot 2^k),$$

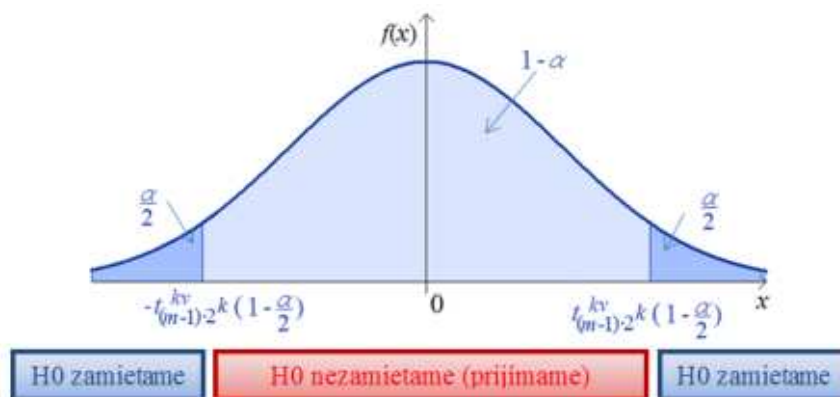
kde $R_0^2 = \sum_{i=1}^{m \cdot 2^k} (y_i - \hat{y}_i)^2$ je súčet reziduálnych štvorcov, y_i sú namerané hodnoty, $\hat{y}_i$ sú predikované (vyrovnané teoretické) hodnoty; $\hat{b}_i$ je bodový odhad regresného koeficientu b_i , $SE(\hat{b}_i)$ je štandardná chyba bodového odhadu $\hat{b}_i$, m je počet replikácií v každom bode plánu experimentu, 2^k je typ experimentu. Testovacia štatistika t má Studentovo rozdelenie so stupňom voľnosti $(m-1) \cdot 2^k$.

Poznámka: Hodnota $R_0^2 = SSE$ je v tabuľke ANOVA, ktorá je súčasťou výstupu regresnej analýzy v Exceli: *Data analysis* $\rightarrow$ *Regression*.

Rozhodovanie o výsledku testu robíme pomocou:

a) kritického oboru:

Ak pre realizáciu testovacej štatistiky platí $|t_0| > t_{(m-1) \cdot 2^k}^{kv} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ alebo ak t_0 patrí do kritickej oblasti $W = \left(-\infty; -t_{(m-1) \cdot 2^k}^{kv} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right) \cup \left(t_{(m-1) \cdot 2^k}^{kv} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right), \infty\right)$ zamietame H_0 .



b) intervalu spoľahlivosti pre b - koeficienty

Testujeme platnosť hypotézy $H_0: b_i = 0$, preto v prípade, že číslo 0 leží v $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ -nom intervale spoľahlivosti, na hladine významnosti α hypotézu H_0 prijímame.

v Exceli: *Data analysis* $\rightarrow$ *Regression* – automaticky hľadá 95% interval spoľahlivosti (podľa zvolenej hladiny významnosti je možno zadať aj inú spoľahlivosť konfidenčného intervalu)

c) p-hodnoty: ak $p \leq \alpha$ zamietame H_0 , ak $p > \alpha$ nezamietame H_0

v Exceli: *Data analysis* $\rightarrow$ *Regression*

4.5.2 Test štatistickej významnosti regresného modelu ako celku

Celkový F test štatistickej významnosti regresného vzťahu Y (závislej premennej) a x_1, x_2 (nezávislých premenných). Testujeme na hladine významnosti α . Testujeme hypotézy:

$H_0: b_1 = b_2 = b_{12} = 0 \leq H_1: \exists$ aspoň jedno $i: b_i \neq 0$

Hypotézy vyjadrené slovami sú:

H_0 : Regresný model nie je štatisticky významný (t. j. všetky regresné koeficienty $b_i = 0, i = 1, 2, 12$),

H_1 : Regresný model je štatisticky významný (aspoň jeden regresný koeficient $b_i \neq 0$)

Zamietnutie H_0 znamená, že aspoň jedna z nezávislých premenných vplyva významne na Y .

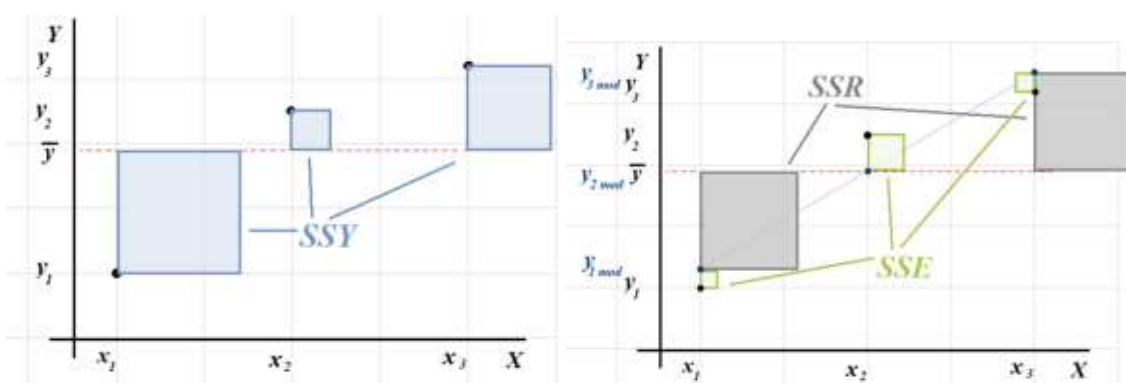
Testovacia charakteristika (štatistika):

$$F = \frac{\frac{SSR}{k}}{\frac{SSE}{n-k-1}} = \frac{(n-k-1) \cdot \sum_{i=1}^{m \cdot 2^k} (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{k \sum_{i=1}^{m \cdot 2^k} (y_i - \hat{y}_i)^2} \sim F(k, n-k-1),$$

kde n je rozsah výberového súboru ($n = m \cdot 2^k$), k je počet faktorov resp. aditívnych členov v regresnom modeli, $\bar{y}$ je priemer nameraných hodnôt, y_i je i -ta nameraná hodnota, $\hat{y}_i$ je i -ta modelovaná hodnota, SSR je variabilita vysvetlená regresným modelom (sum of squares due to regression); SSE je reziduálny súčet štvorcov – variabilita nevysvetlená regresným modelom (sum of squares due to error); SSY je celková variabilita premennej Y – celkový súčet štvorcov (sum of squares total), obr.25.

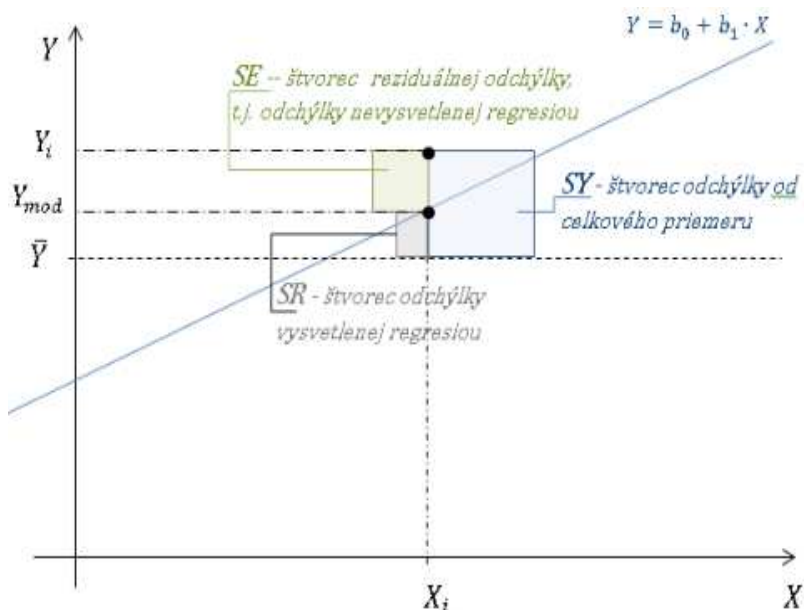
Pre dané súčty štvorcov platí: $SSY = SSE + SSR$,

$$\sum_i (y_i - \bar{y})^2 = \sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_i (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$



Obr. 25 K vysvetleniu SSY , SSE a SSR , ktoré bývajú súčasťou tabuľky ANOVA

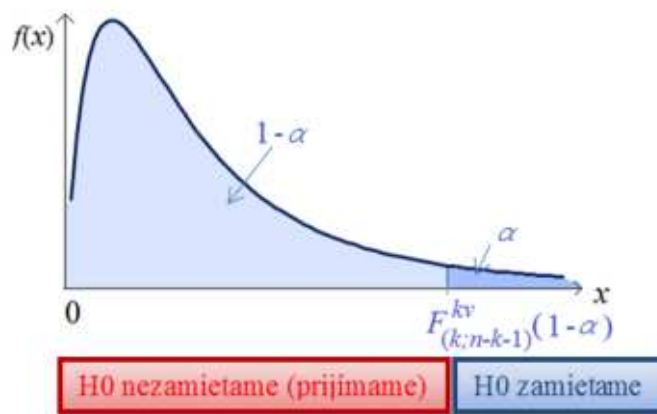
Na obr. 26 je rozklad štvorca odchýlky od celkového priemeru SY na štvorec reziduálnej odchýlky SE a štvorec odchýlky vysvetlenej regresiou SR pre prípad i -teho pozorovania.



Obr. 26 Rozklad SY na SE a SR pre prípad i -teho pozorovania

Testovacia štatistika F má Fisherovo rozdelenie so stupňami voľnosti $k, n - k - 1$. Test je pravostranný – čím je SSR v porovnaní s SSE väčšie, tým lepšie regresný model vystihuje dáta. Rozhodovanie o výsledku testu robíme pomocou

a) kritického oboru: Ak je realizácia testovacej štatistiky $F_0 > F_{(k, n-k-1)}^{kv}(1 - \alpha)$, potom hypotézu H_0 zamietame.



b) p-hodnoty: $p \leq \alpha$ zamietame H_0 .

Excel: *Data analysis* → *Regression* → *tabuľka ANOVA*

4.5.3 F test štatistickej významnosti prínosu k -tej vysvetľujúcej premennej na vysvetlenie variability závislej (vysvetľovanej) premennej

Súčasťou ANOVY v štatistických softvéroch sú štandardne aj F testy štatistickej významnosti prínosu k -tych vysvetľujúcich premenných (nie je súčasťou výstupu v Exceli).

Uvedeným testom testujeme prínos, ktorým dodatočne prispieva k -ta vysvetľujúca premenná (alebo celková lineárna, kvadratická zložka modelu) k vysvetleniu variability závislej premennej Y . Význam tohto testu spočíva v tom, že v prípade zamietnutia nulovej hypotézy pri F-teste štatistickej významnosti regresného modelu chceme vedieť, ktorá zo vstupných premenných má štatisticky významný a nevýznamný vplyv na závislú premennú Y , resp. chceme vedieť, ktoré konkrétne zložky modelu štatisticky významne prispievajú k celkovému modelu. Označením dodatočný príspevok k -tej vysvetľujúcej premennej rozumieme prínos tejto premennej za predpokladu, že sa už prv uvažovalo s $(k - 1)$ nezávislými (vysvetľujúcimi) premennými.

Testujeme na hladine významnosti α . Testované hypotézy sú:

H_0 : Dodatočný príspevok k -tej vysvetľujúcej premennej na vysvetlenie variability vysvetľovanej premennej nie je štatisticky významný.

H_1 : Dodatočný príspevok k -tej vysvetľujúcej premennej na vysvetlenie variability vysvetľovanej premennej je štatisticky významný.

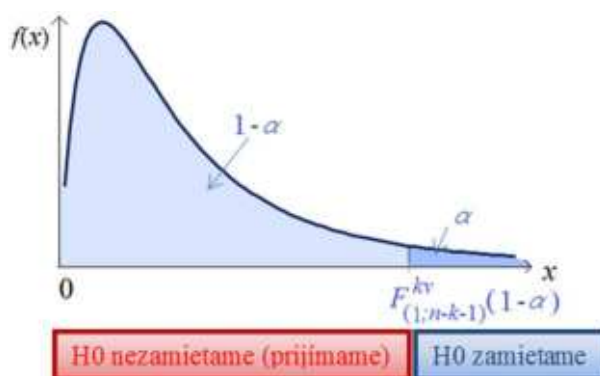
Testovacia štatistika:

$$F = \frac{\frac{SSR_{\text{úplný model}} - SSR_{\text{redukovaný model}}}{1}}{\frac{SSE_{\text{úplný model}}}{n - k - 1}} \sim F(1; n - k - 1),$$

Platí $SSE_{\text{úplný model}} = SS_{\text{Total}} - SSR_{\text{úplný model}}$, kde $SS_{\text{Total}} = SSY$ je celková suma štvorcov odchýlok od priemeru, $SSR_{\text{úplný model}}$ je suma štvorcov odchýlok od celkového priemeru vysvetlená úplným regresným modelom s k prediktormi (členmi) a $SSR_{\text{redukovaný model}}$ je suma štvorcov odchýlok od celkového priemeru vysvetlená redukovaným regresným modelom s $k - 1$ prediktormi (členmi). Testovacia štatistika F má Fisherovo rozdelenie so stupňami voľnosti 1, $n - k - 1$, kde n je rozsah výberového súboru, k je počet faktorov, resp. aditívnych členov v regresnom modeli. Test je opäť pravostranný.

Rozhodovanie o výsledku testu robíme pomocou

a) kritického oboru: Ak realizácia testovacej štatistiky $F_0 > F_{(1, n-k-1)}^{kv}(1 - \alpha)$, potom hypotézu H_0 zamietame.



b) p-hodnoty: Ak $p \leq \alpha$ zamietame H_0 .

Poznámka:

Ak je člen regresného modelu v tabuľke ANOVA signifikantný (štatisticky významný), interpretácia závisí od typu daného člena regresného modelu. Interpretácie sú nasledovné:

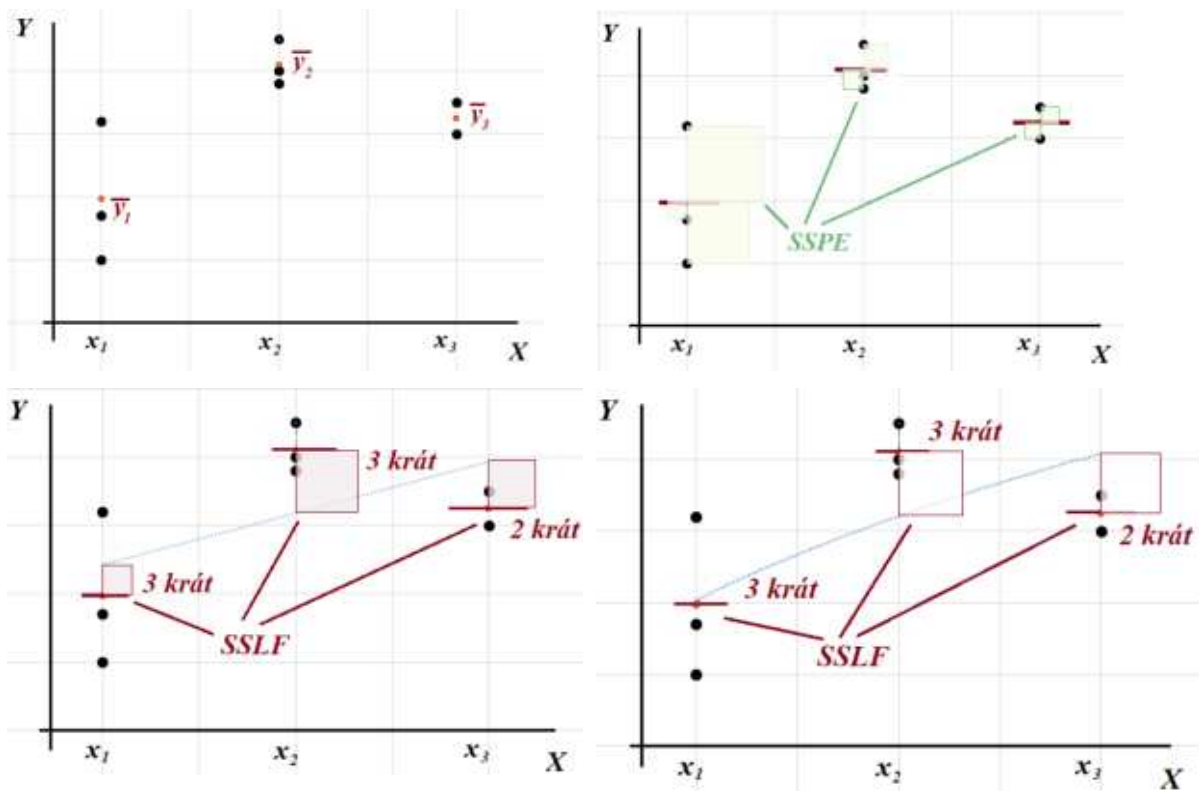
- Ak je spojitý faktor signifikantný, je možné prijať záver, že regresný koeficient pre daný faktor sa líši od nuly.
- Ak je kategorický (kvalitatívny) faktor signifikantný, je možné prijať záver, že pravdepodobnosť nastania udalosti nie je rovnaká pre všetky úrovne faktora.
- Ak je interakčný výraz signifikantný, je možné prijať záver, že vzťah medzi faktorom a pravdepodobnosťou nastania udalosti závisí od ostatných faktorov v člene.
- Ak je kvadratický člen signifikantný, je možné prijať záver, že odozovová plocha (viď kap. 7 Response surface methodology) má zakrivenie.

4.5.4 Test dostatočného prispôsobenie regresného modelu (Test Lack of Fit)

Test adekvátnosti regresného modelu (Test Lack of Fit) možno použiť, ak máme pre každé nastavenie faktora skupinu nameraných hodnôt, z ktorej počítame tzv. čistú chybu (Pure Error). Regresný model dobre popisuje závislosť Y od faktorov, ak je variabilita rezíduí modelu približne rovnaká ako variabilita vo vnútri skupín. Nadbytočnému rozptylu rezíduí v dôsledku zlého prispôsobenia modelu hovoríme chyba nedostatočného prispôsobenia (lack of fit).

Rozložíme $SSE = SSLF + SSPE$, t. j. sumu reziduálnych štvorcov SSE rozdelíme na sumu štvorcov odchýlok $SSLF$ (sum of squares due to lack of fit), ktorá vznikla v dôsledku nedostatočnosti modelu, a $SSPE$ ((sum of squares due to pure error), ktorá vyjadruje sumu štvorcov odchýlok, ktorá vznikla v dôsledku chyby merania.

Rozklad súčtu reziduálnych štvorcov na zložku Pure Error a Lack of Fit pre dve premenné X a Y vidíme na obr.27. Hodnota $SSPE$ je ovplyvnená naším meraním, naopak hodnota $SSLF$ je ovplyvnená regresným modelom. Pri teste Lack of Fit tieto zložky prepočítané na zodpovedajúce rozptyly navzájom porovnávame, obr. 28.



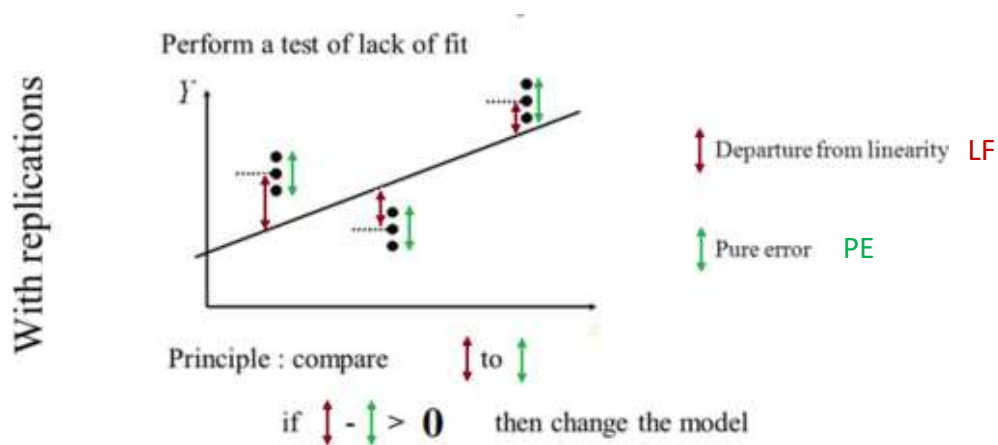
Obr. 27 Zobrazenie významu SSPE a porovnanie SSLF pre lineárny regresný model vľavo dole a kvadratický regresný model vpravo dole

Pre dve premenné X a Y bude pre rozklad súčtu reziduálnych štvorcov platiť:

$$SSE = \text{SSLF} + \text{SSPE}$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$$

kde y_{ij} označuje j-te pozorovanie pre x_i kde $i = 1, 2, \dots, m$ a $j = 1, 2, \dots, n_i$ pričom n_i je počet opakovaní x_i a m je počet úrovní premennej X (jej rôznych hodnôt);



Obr. 28 Princíp testu LOF pre dve premenné X a Y [26]

Regresný model považujeme za adekvátny (dostatočný), ak sa hodnoty SSPE a SSLF štatisticky významne nelíšia. Ak je rozdiel medzi SSLF a SSPE významný, považujeme model za nedostatočný.

Na základe uvedeného testujeme aj v prípade viacnásobnej regresie hypotézy:

$H_0: SSLF - SSPE = 0$ (Regresný model nie je nedostatočný – je dostatočný. No Lack of Fit.)

$H_1: SSLF - SSPE > 0$ (Regresný model je nedostatočný. Lack of Fit.)

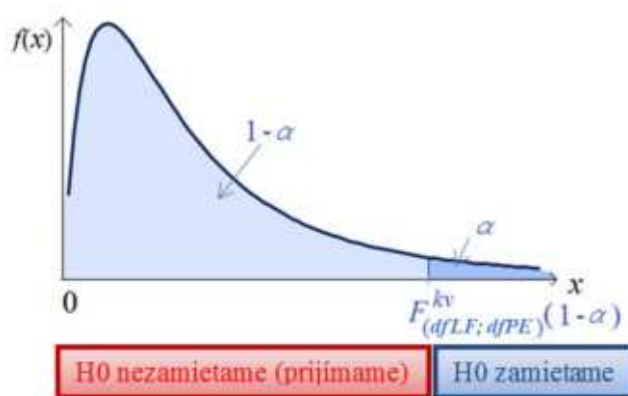
Použijeme jednostranný (pravostranný) F test – v tomto prípade nám v prípade dostatočného prispôsobenia postačuje, aby bola zložka $SSLF$ porovnateľná so zložkou $SSPE$.

Testovacia štatistika $F = \frac{\frac{SSLF}{df_{LF}}}{\frac{SSPE}{df_{PE}}} = \frac{MS_{LF}}{MS_{PE}} \sim F(df_{LF}; df_{PE})$.

Testovacia štatistika F má Fisherovo rozdelenie so stupňami voľnosti df_{LF} , df_{PE} , kde $df_E = df_{LF} + df_{PE}$. Stupne voľnosti pre čistú chybu počítame ako súčet z počtu replikácií v každom bode merania mínus jeden.

Testujeme na zvolenej hladine významnosti α . Rozhodovanie o výsledku testu robíme pomocou

a) kritického oboru: Ak realizácia testovacej štatistiky $F_0 > F_{(df_{LF}; df_{PE})}^{kv}(1 - \alpha)$, potom hypotézu H_0 zamietame.



b) p-hodnoty: ak $p \leq \alpha$ zamietame H_0 .

Zamietnutie H_0 znamená štatisticky významnú chybu neprispôsobenia, a teda nedostatočný model.

4.5.5 Test krivosti (curvature)

Test krivosti (curvature) – vyžaduje meranie v centrálnych bodoch – overujeme, či je potrebný úplný kvadratický model $f_L = b_0 + \sum_{j=1}^k b_j t_j + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k b_{ij} t_i t_j + \sum_{j=1}^k b_{jj} t_j^2$.

Testované hypotézy zapíšeme:

$$H_0: \sum_{j=1}^k b_{jj} = 0 \leq H_1: \sum_{j=1}^k b_{jj} \neq 0$$

Nulová hypotéza hovorí, že súčet všetkých kvadratických členov je nulový – kvadratické členy v regresnom modeli nie sú potrebné. Alternatívna hypotéza hovorí, že súčet všetkých kvadratických členov je nenulový – aspoň jeden kvadratický člen je potrebný do regresného modelu zaradiť. Testujeme na hladine významnosti α .

$$\text{Testovacie kritérium } F = \frac{\frac{SS_{CPQ}}{1}}{\frac{SSE}{df_E}} \sim F(1; df_E),$$

kde $SS_{CPQ} = \frac{n_F n_C (\bar{y}_F - \bar{y}_C)^2}{n_C + n_F}$ a n_C je počet replikácií v centrálnych bodoch; n_F je počet faktoriálnych bodov; $\bar{y}_C$ je priemerné y v centrálnych bodoch; $\bar{y}_F$ je priemerné y vo faktoriálnych bodoch; SS_{CPQ} je súčet štvorcov odchýlok kvadratického zakrivenia (sum of square for pure quadratic curvature); SSE je suma štvorcov odchýlok reziduálnej chyby Error (označovanej ako rezíduum ε) a df_E sú stupne voľnosti reziduálnej chyby. Testovacie kritérium má Fisherovo rozdelenie s 1 a df_E stupňami voľnosti. Test krivosti je pravostranným testom.

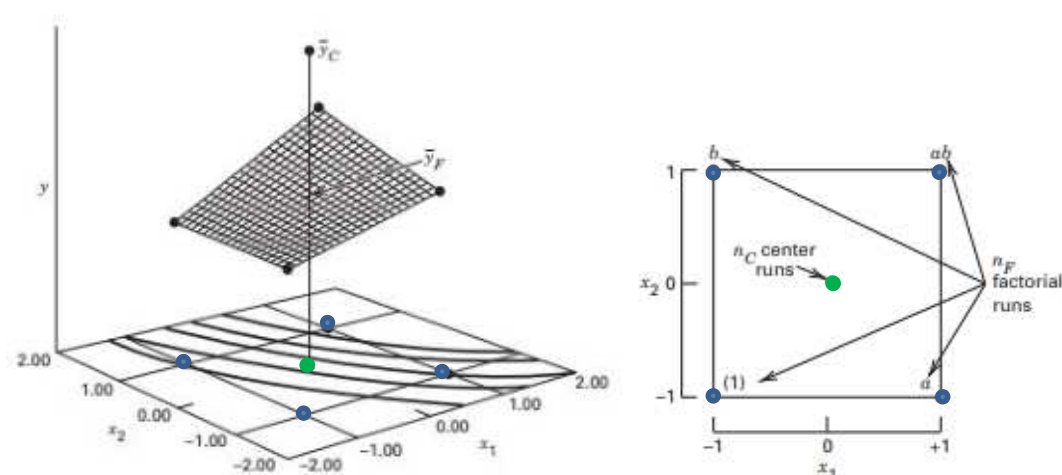
Ak faktoriálne body v návrhu nie sú replikované (čo znamená, že štatistické vyhodnotenie by pre $df_{PE} = 0$ nebolo možné), je možné využiť počet replikácií n_C v centrálnych bodoch na vytvorenie odhadu chyby Error ε s $(n_C - 1)$ stupňami voľnosti. Testovacie kritérium pre experiment bez replikácií vo faktoriálnych bodoch s pridaným opakovaným meraním v centrálnom bode možno vtedy zapísať vzt'ahom

$$F = \frac{\frac{SS_{CPQ}}{1}}{\frac{\sum (y_i - \bar{y}_C)^2}{n_C - 1}} \sim F(1; n_C - 1).$$

Testovacie kritérium má Fisherovo-Snedecorovo rozdelenie s 1 a $(n_C - 1)$ stupňami voľnosti.

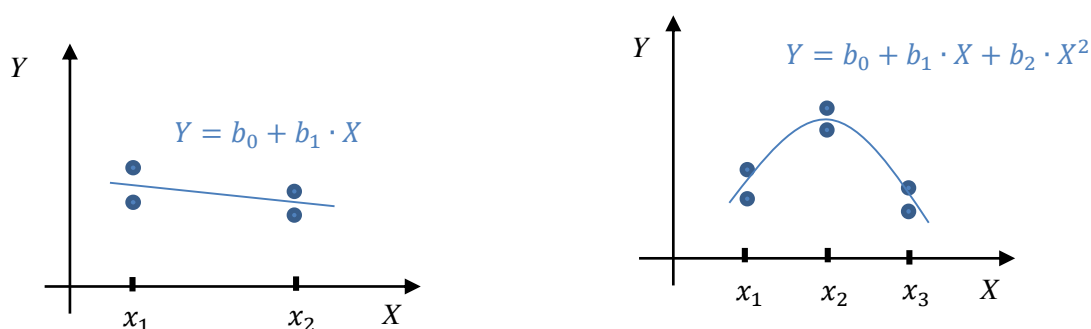
Pridanie centrálnych bodov (opakovaných meraní v centrálnom bode) do faktorového návrhu poskytuje dostatočnú informáciu o prítomnosti zakrivenia v odozvovej ploche pretože,

ak zakrivenie existuje, potom je odozva v centrálnom bode väčšia alebo menšia ako v krajných bodoch experimentálneho priestoru (faktorových - faktoriálnych bodoch), vid' obr. 29.



Obr. 29 Experiment 2^2 s pridaným centrálnym bodom [9]

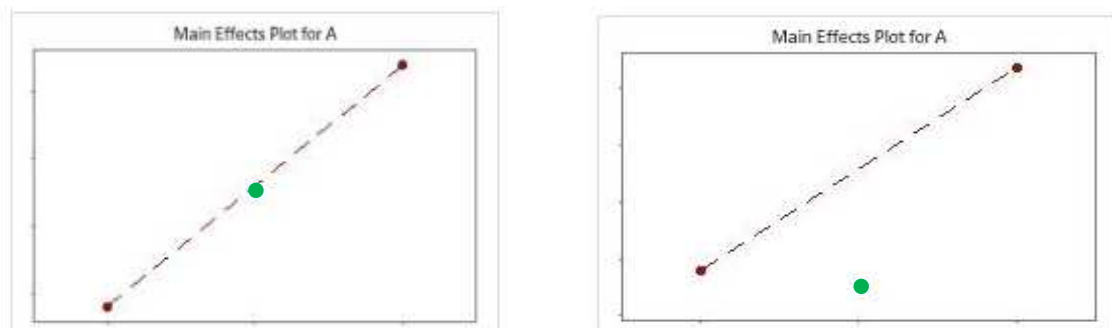
Význam pridania tretej úrovne nezávislej premennej X pri hľadaní regresného modelu s kvadratickým členom pre dve premenné X a Y ukazuje nasledujúci obr. 30. Pri určovaní lineárnej závislosti Y od X postačuje namerať hodnoty závislej premennej Y v 2 úrovniach nezávislej premennej X . Ak chceme dátami preložiť regresný model s kvadratickým členom, merania v 2 úrovniach nezávislej premennej X nám nebudú stačiť.



Obr. 30 Minimálny počet úrovní nezávislej premennej (na vodorovnej osi) je určený typom regresného modelu

Minitab testuje zakrivenie iba vtedy, keď návrh obsahuje stredové body. Test sa zameriava na prispôbený priemer odozvy v stredových bodoch vzhľadom na očakávaný priemer, ak sú vzťahy medzi členmi modelu a odozvou lineárne. Na vizualizáciu zakrivenia používa grafy hlavných efektov. Na obr. 31 vľavo je priemer odozvy v stredovom bode blízko úsečky, ktorá spája priemery odoziev vo faktorových bodoch. Zakrivenie pravdepodobne nie je štatisticky

významné. Na obr.31 vpravo je priemer odozvy v stredovom bode ďaleko od čiary, ktorá spája priemery odoziev vo faktorových bodov, čo naznačuje zakrivenie. Testom (pomocou hodnoty p-hodnoty) overujeme, či je zakrivenie štatisticky významné.

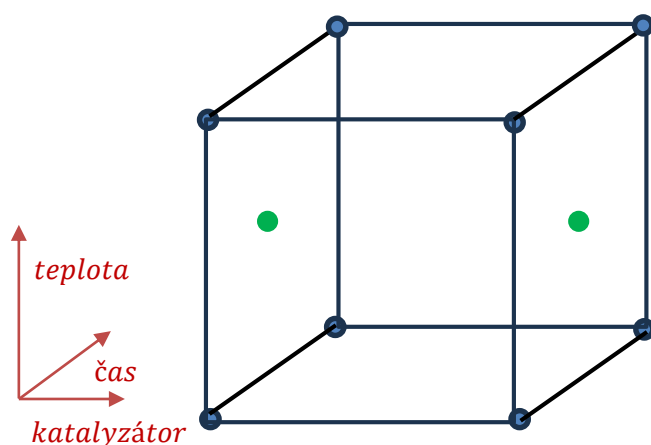


Obr. 31 Minitab na vizualizáciu otázky zakrivenia používa grafy hlavných efektov - na obr. vľavo neočakávame, že odozgová plocha bude mať zakrivenie, vpravo áno [9]

Poznámky:

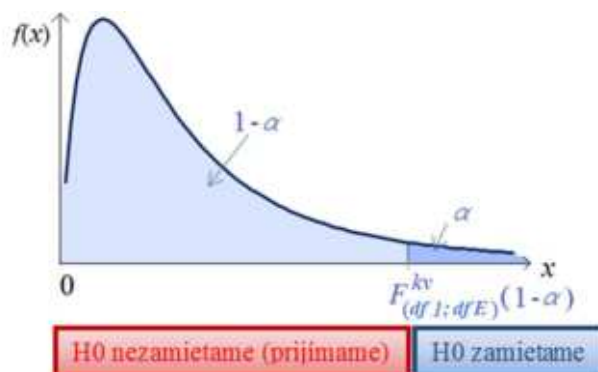
1. Jedným z dôležitých dôvodov pre pridanie opakovaných meraní práve v centrálnom bode experimentálneho priestoru je, že stredové body neovplyvňujú odhady efektov v experimente typu 2^k . Keď pridávame stredové body do stredu experimentálneho priestoru, predpokladáme, že faktory sú kvantitatívne.
2. Pridanie centrálného bodu do plánu experimentu nepostačuje na nájdenie koeficientov kvadratického regresného modelu b_{jj} (nemáme dostatočný počet stupňov voľnosti). Za týmto účelom je potrebné pridať merania v axiálnych bodoch (viď Centrálny kompozitný dizajn), ktoré zvýšia počet nezávislých meraní. Meranie v centrálnom bode slúži iba na výpočet testovacej štatistiky pri teste krivosti – dáva informáciu o zakrivení odozvovej plochy.
3. Minitab v tabuľke ANOVA rozdeľuje sumu štvorcov reziduálnych chýb SSE na sumu štvorcov odchýlok v dôsledku kvadratického zakrivenia SS_{CPQ} , sumu štvorcov odchýlok v dôsledku nedostatočného prispôsobenia regresného modelu – Lack of Fit SS_{LOF} a sumu štvorcov odchýlok v dôsledku čistej chyby SS_{PE} . Platí $SSE = SS_{CPQ} + SS_{LOF} + SS_{PE}$. To isté platí aj pre stupne voľnosti $df_E = df_{CPQ} + df_{LOF} + df_{PE}$. Ak je krivosť zahrnutá do regresného modelu, potom krivosť vyjadrená cez SS_{CPQ} nie je súčasťou chyby Error, resp. SSE .
4. Ak sa krivosť ukáže ako nevýznamná, potom je vhodné meranie v centrálnom bode v ďalšom štatistickom spracovávaní neuvažovať.

5. Rozdelením meraní v stredových bodoch v priebehu experimentu (jedno alebo dve merania v centrálnom bode na začiatku experimentu alebo blízko neho, jedno alebo dve merania v strede a jedno alebo dve merania blízko konca experimentu) poskytujú hrubú kontrolu stability procesu počas experimentu. Napríklad, ak sa v odozve vyskytol trend, kým sa experiment uskutočňoval, vykreslenie odoziev centrálného bodu v závislosti od času to môže odhaliť.
6. Niekedy sa experimenty musia vykonávať v podmienkach, keď je k dispozícii málo alebo žiadne predchádzajúce informácie o variabilite procesu. V takýchto prípadoch môže byť veľmi užitočné spustenie dvoch alebo troch meraní v centrálnych bodoch ako prvých pri spustení experimentu, pretože tieto merania môžu poskytnúť predbežný odhad variability.
7. Centrálny body sa zvyčajne používajú, keď sú všetky faktory kvantitatívne (vtedy ležia v strede experimentálneho priestoru). Niekedy existuje jeden alebo viac kvalitatívnych alebo kategorických premenných a niekoľko kvantitatívnych. Aj v týchto prípadoch je možné použiť centrálny body. Na ilustráciu uvažujme experiment s dvoma kvantitatívnymi faktormi: časom a teplotou, každý na dvoch úrovniach, a jedným kvalitatívnym faktorom: typom katalyzátora, tiež s dvoma úrovne (organický a neorganický). Obr. 32 ukazuje Cplot experimentu typu 2^3 pre takto zvolené faktory. Centrálny body sú umiestnené na protiľahlých stranách kocky, ktoré zahŕňajú kvantitatívne faktory. Inými slovami, merania v centrálnych bodoch môžu byť vykonávané na nízkej a vysokej úrovni kombinácií kvalitatívnych faktorov, pokiaľ tieto podpriestory následne zahŕňajú iba kvantitatívne faktory.



Obr. 32 Experiment 2^3 s jedným kvalitatívnym faktorom a dvoma centrálnymi bodmi

Pri teste krivosti testujeme hypotézy $H_0: \sum_{j=1}^k b_{jj} = 0 \leq H_1: \sum_{j=1}^k b_{jj} \neq 0$.



Hypotézy testujeme na zvolenej hladine významnosti α . Výsledné rozhodovanie robíme pomocou

a) kritického oboru: Ak realizácia testovacej štatistiky $F_0 > F_{(df_{LF}; df_{PE})}^{kv}(1 - \alpha)$, potom hypotézu H_0 zamietame.

b) p-hodnoty: ak $p \leq \alpha$ zamietame H_0 .

Zamietnutie H_0 znamená signifikantnú prítomnosť kvadratického zakrivenie (quadratic effects) v odozvovej ploche.

4.5.6 Stupne voľnosti (Degrees of freedom)

Pri výpočtoch testovacích štatistík pri testoch hypotéz a pri parametroch rozdelenia testovacích štatistík bývajú uvádzané stupne voľnosti df . V kontexte DOE je počet stupňov voľnosti df spojených s procesnou premennou o jeden menší ako počet úrovní pre daný faktor, teda $n - 1$. Napríklad pri testovaní efektu faktora, kedy porovnávame priemer odozvy na dvoch úrovniach každého faktora, bude $df = 2 - 1 = 1$. Počet stupňov voľnosti pre celý experiment je o jeden menší ako celkový počet meraní, napríklad pre úplný faktorový experiment s m replikáciami v n^k bodoch experimentu sú $df = m \cdot n^k - 1$. Stupeň voľnosti pre interakciu sa rovná súčinu stupňa voľnosti spojeného s každým faktorom zapojeným do tohto konkrétneho interakčného účinku. Pre experiment typu n^k je všetkých k faktorov meraných na n úrovniach. Stupne voľnosti pre každú interakciu $df = (n - 1)(n - 1)$. Stupne voľnosti vyjadrené pre všetky dvojfaktorové interakcie spolu $df = \binom{k}{2} (n - 1)(n - 1)$.

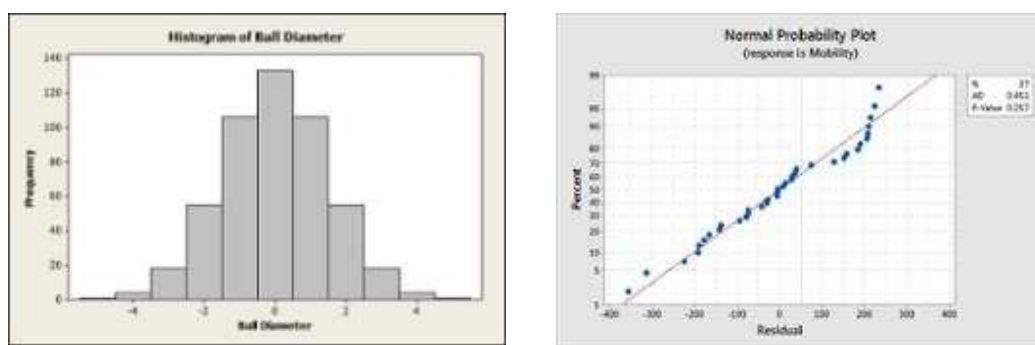
Stupne voľnosti pre chybu (Error) súvisiacu s rezíduami ε sa počítajú pomocou rozdielu stupňov voľnosti pre celý experiment a stupňov voľnosti všetkých členov použitého regresného modelu. Stupne voľnosti pre čistú chybu (Pure Error) súvisia s nepresnosťou samotného merania a počítajú sa ako súčet replikácií zmenšený o jeden v každom experimentálnom bode.

4.5.7 Grafická analýza rezíduí – vizuálne posúdenie vhodnosti regresného modelu a testy normality rezíduí

Grafická analýza rezíduí nie je priamo časťou týkajúcou sa testovania hypotéz, ale je súčasťou hodnotenia kvality získaného regresného modelu. Požiadavky na rezíduá, ktoré by mali byť splnené pre „dobrý“ regresný model sú:

1. $N(0; \sigma^2)$
2. homoskedasticita
3. nezávislosť

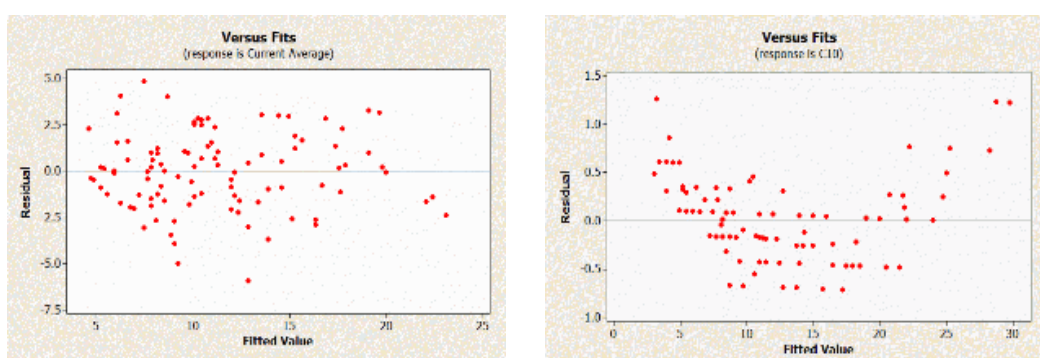
1. Kontrolujeme normalitu dopočítaných rezíduí $e_i = y_i - \hat{y}_i$, kde y_i je i -ta nameraná hodnota, $\hat{y}_i$ je predikovaná hodnota, ktorá prislúcha úrovniam faktorov pre i -te meranie. Histogram štandardizovaných rezíduí s rozdelením $N(0; \sigma^2)$ by mal byť umiestnený do nuly (os symetrie má prechádzať nulou) a nadobúdať nenulové početnosti v tvare Gaussovej krivky v rámci intervalu hodnôt rezíduí ± 3 . V prípade malej vzorky má väčšiu výpovednú hodnotu ako histogram normálny pravdepodobnostný graf. Rezíduá by mali ležať približne na (červenej) priamke, obr. 33.



Obr. 33 Histogramom štandardizovaných rezíduí a normálnym pravdepodobnostným grafom kontrolujeme splnenú normalitu štandardizovaných rezíduí [18]

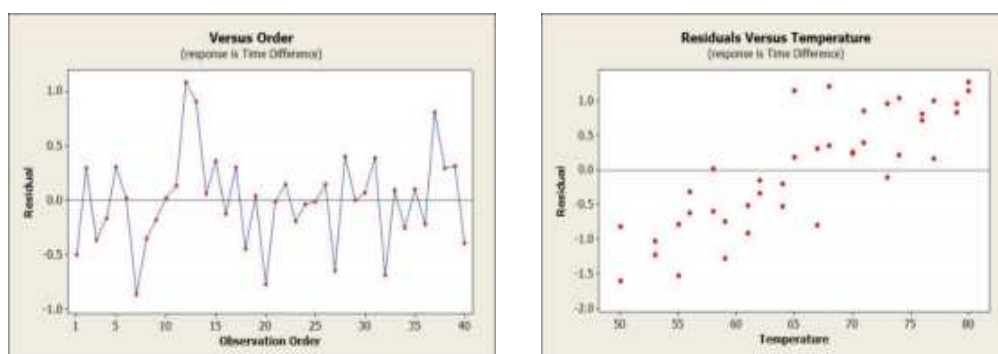
Poznámka: V prípade nejednoznačnosti grafického výstupu je možné normalitu overiť (potvrdiť) pomocou testov normality. Podľa podmienok volíme test nulovej šikmosti a nulovej špicatosti, kombinovaný test alebo je možné využiť v Minitabe ponuku Ryan-Joiner testu, ktorý je modifikáciou Shapiro-Wilk testu, Anderson-Darling test alebo Kolmogorov-Smirnov test.

2. Homoskedasticitu – približnú konštantnosť variability rezíduí kontrolujeme na grafe zobrazujúcom vzťah rezíduí a vyrovnaných (fitovaných) hodnôt premennej Y (residuals versus fit), obr. 34. Rezíduá mali by byť približne rovnaké bez ohľadu na to, či je vypočítaná (predikovaná) hodnota veľká alebo malá (residuals versus fit).



Obr. 34 Graf residuals versus fit [17]- rozloženie rezíduí by malo byť sústredené okolo nuly, spĺňať zákon troch σ a bez prítomnosti vzoru. Vľavo sú tieto požiadavky približne splnené, vpravo nie.

3. Nezávislosť rezíduí kontrolujeme na grafe zobrazujúcom vzťah rezíduí a hodnôt premennej X (residuals versus order). Správanie sa rezíduí v čase vzhľadom na predikované hodnoty by tiež malo byť konštantné, obr. 35.

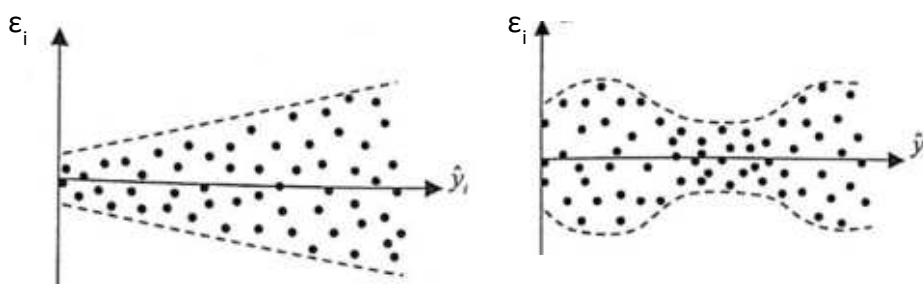


Obr. 35 Graf residuals versus order [17] – vľavo sú rezíduá náhodne rozdelené okolo nuly, vpravo vidíme, že závislosť rezíduí od teploty je približne lineárna

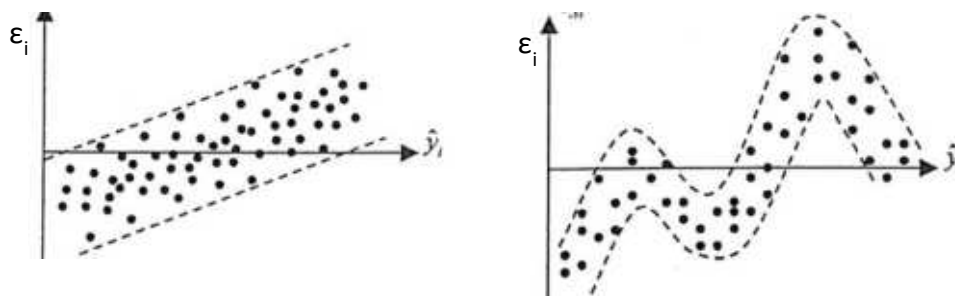
Rôzne prípady rozloženia štandardizovaných rezíduí vzhľadom na hodnoty regresnej funkcie sú zachytené na nasledujúcich obr. 36 až 38. [14]



Obr. 36 Rezíduá neprejavujú systematické tendencie a spadajú do horizontálneho pásu sústredeného okolo nuly [14]



Obr. 37 Na rôznych úrovniach odhadnutých hodnôt Y je rôzna rozptýlenosť rezíduí (porušenie homoskedasticity náhodnej zložky) [14]



Obr. 38 V správaní rezíduí pozorujeme systematické tendencie (porušenie nezávislosti náhodných chýb) [14]

4.6 POROVNANIE RÔZNYCH REGRESNÝCH MODELOV

Pri riešení regresnej úlohy vždy prichádza do úvahy viacero regresných funkcií, preto sa zisťuje, ktorý z týchto modelov najlepšie vystihuje závislosť medzi skúmanými premennými – medzi odozvou a faktormi.

To sa dá merať rôznymi charakteristikami (súvisiacimi s rezíduami):

- súčtom reziduálnych štvorcov $SSE = \sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2$ – cieľom MNŠ je minimalizovať hodnotu, t. j. minimalizovať variabilitu nevysvetlenú regresným modelom,
- reziduálnym rozptylom $s_{rez}^2 = \frac{SSE}{n-2}$,
- štandardnou odchýlkou rezíduí $s_{rez} = \sqrt{s_{rez}^2}$,
- koeficientom determinácie R^2 ,
- preveriť rôznymi testami (testy normality, testy heteroskedasticity, testy autokorelácie a nezávislosti rezíduí, atď.).

Z dvoch regresných modelov, ktoré by teoreticky prichádzali do úvahy, je lepší na základe analýzy rezíduí ten, ktorý má menšie hodnoty SSE , s_{rez}^2 a s_{rez} a ten, ktorý má väčšiu hodnotu koeficientu determinácie R^2 .

Okrem charakteristík súvisiacich s rezíduami, potenciálne vhodné regresné modely porovnávame aj z hľadiska komplexnosti a preparametrizovania (overfittingu):

- vždy sú preferované jednoduchšie modely (predchádzame overfittingu),
- Akaikovo informačné kritérium AIC (Akaike Information Criterion) je metrika používaná na výber najlepšieho modelu z viacerých kandidátov. Zohľadňuje presnosť modelu aj jeho zložitosť, pričom penalizuje modely s nadmerným počtom parametrov. Sama o sebe hodnota AIC nemá význam, slúži iba na porovnávanie rôznych modelov. Hodnotu AIC počítame podľa vzťahu $AIC = 2k - 2\ln(L)$, kde k je počet parametrov, L je funkcia maximálnej vierohodnosti (meria, ako dobre model vysvetľuje dáta, viac v [12]). Model s nižším AIC sa považuje za lepší.
- Bayesovské informačné kritérium BIC (Bayesian Information Criterion) je podobné ako kritérium AIC, ale silnejšie penalizuje zložité modely. Hodnotu kritéria BIC počítame vzťahom $BIC = k\ln(n) - 2\ln(L)$, kde k je počet parametrov, n je počet pozorovaní, L je funkcia maximálnej vierohodnosti. Nižšie BIC znamená lepší model. BIC je konzervatívnejší ako AIC, pretože silnejšie penalizuje zložité modely, čím znižuje riziko overfittingu.

4.7 FAKTOR INFLÁCIE ROZPTYLU VIF (VARIANCE INFLATION FACTOR)

Inflačný faktor rozptylu (VIF) detekuje v regresných analýzach multikolinearitu. Multikolinearita je definovaná ako viacnásobná korelácia medzi prediktormi. VIF nadobúda hodnoty 1 a viac. Vzťah na výpočet faktora VIF pre i -tu nezávislú premennú je:

$$VIF_i = \frac{1}{1-R_i^2},$$

kde R_i^2 je koeficient determinácie vo viacnásobnom regresnom modeli pre i -tu nezávislú premennú.

Interpretácia regresného koeficientu b_i hovorí, že hodnota b_i predstavuje strednú zmenu závislej premennej Y pre každú jednotkovú zmenu v nezávislej premennej $\Delta x_i = 1$, keď udržíme všetky ostatné nezávislé premenné konštantné. Ak existuje multikolinearita medzi prediktormi, nezávislé premenné majú tendenciu sa meniť súbežne. Preto multikolinearita sťažuje interpretáciu koeficientov, pretože môže byť ťažké rozlišovať ich individuálny vplyv na závislú premennú. Multikolinearita znižuje silu modelu identifikovať nezávislé premenné, ktoré sú štatisticky významné (ovplyvňuje bodové odhady koeficientov aj k nim vypočítané p-hodnoty) pretože môže spôsobiť veľké fluktuácie v hodnotách odhadnutých koeficientov. Multikolinearita je tak príčinou nízkej spoľahlivosti modelu.

Poznámka:

V prípade existujúcej multikolinearity je $\det(X^T X)^{-1}$ veľmi blízky nule, čo znamená, že maticu $(X^T X)^{-1}$ odhadujeme za cenu veľkých štatistických chýb v odhadoch parametrov v regresnom modeli.

Faktor VIF hovorí, o koľko je navýšený rozptyl pre každý koeficient v porovnaní s tým, ak by neexistovala jeho korelácia s inými prediktormi. Napríklad hodnota VIF 1,9 vám hovorí, že rozptyl konkrétneho koeficientu je o 90% väčší, ako by ste očakávali, keby neexistovala žiadna multikolinearita medzi prediktormi.

Pravidlo pre interpretáciu VIF:

- VIF = 1 hovorí, že prediktor nekoreluje s ostatnými prediktormi;
- VIF medzi 1 a 5 hovorí, že i -ta nezávislá premenná stredne koreluje s ostatnými prediktormi;
- VIF viac ako 5 hovorí, že prediktory sú vysoko korelované.

4.8 VYHODNOTENIE EXPERIMENTU BEZ REPLIKÁCIÍ (UNREPLICATED FACTORIAL EXPERIMENTS)

Štatistické vyhodnotenie výsledkov experimentu (pri nulovej chybe merania) nie je možné. Na odhad efektov a interakcií a posúdenie toho, ktoré faktory a interakcie sú „významné“ používame:

- **Normálny pravdepodobnostný graf** – identifikujeme v ňom efekty a interakcie, ktoré sa odchyľili od linearity v značnej vzdialenosti od referenčnej priamky.
- **Pareto graf** – absolútne hodnoty efektov faktorov a interakcií sú v ňom zoradené podľa veľkosti – vychádzame z toho, že väčšie efekty budú prislúchať tým faktorom, ktoré majú v procese skutočný vplyv.

Príklad:

Pri úplnom faktorovom experimente typu 2^4 bez replikácií boli skúmané účinky zmeny štyroch vstupných premenných procesu (faktorov): A – katalyzátorovej náplne: [lb]; B – teploty 200 a 230 [°C]; C – koncentrácia reaktantu [%]; D – tlaku [psi] na výťažok procesu [%]. Príklad je prevzatý z [8].

Uvažované hranice experimentálneho priestoru, resp. zvolené úrovne zvolených štyroch faktorov sú v tabuľke 2.

Tabuľka 2 Vstupné nezávislé premenné (faktory) a ich zvolené úrovne				
Faktory	v pôvodných jednotkách		v kódovaných jednotkách	
	dolná úroveň	horná úroveň	dolná úroveň	horná úroveň
A_ katalyzátorová náplň	10 lb	15lb	-1	1
B_teplota	200 °C	230 °C	-1	1
C_koncentrácia reaktantu	10 %	12 %	-1	1
D_tlak	50 psi	80 psi	-1	1

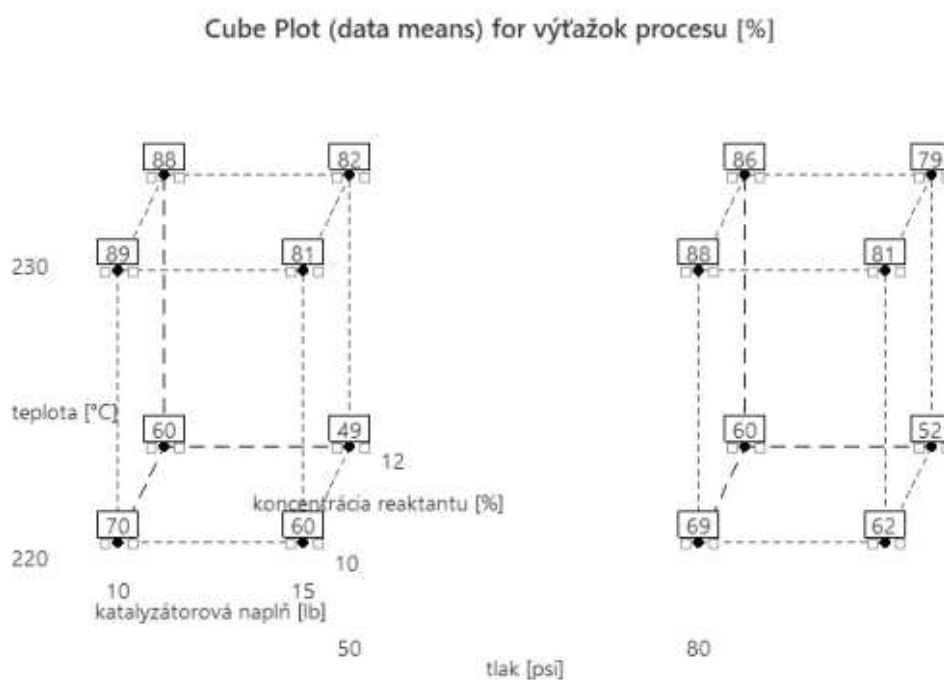
Poznámka: Libra (lb) je jednotka hmotnosti. Používa sa najmä v anglosaských krajinách, ako sú USA a Veľká Británia. Platí, že 1 libra (lb) = 0,45359237 kilogramu (kg).

Nasledujúci obr. 39 ukazuje plán experimentu vygenerovaný Minitabom pre zvolené 4 faktory a ich hraničné úrovne, kde boli do stĺpca C9 doplnené namerané hodnoty odozvy (výťažku procesu).

#	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
	RunOrder	CenterPt	Blocks	katalyzátorová naplň [lb]	teplota [°C]	koncentrácia reaktantu [%]	tlak [psi]	výťažok procesu [%]
1	1	1	1	10	220	10	50	70
2	2	1	1	15	220	10	50	60
3	3	1	1	10	230	10	50	89
4	4	1	1	15	230	10	50	81
5	5	1	1	10	220	12	50	60
6	6	1	1	15	220	12	50	49
7	7	1	1	10	230	12	50	88
8	8	1	1	15	230	12	50	82
9	9	1	1	10	220	10	80	69
10	10	1	1	15	220	10	80	62
11	11	1	1	10	230	10	80	88
12	12	1	1	15	230	10	80	81
13	13	1	1	10	220	12	80	60
14	14	1	1	15	220	12	80	52
15	15	1	1	10	230	12	80	86
16	16	1	1	15	230	12	80	79

Obr. 39 Plán experimentu s vygenerovanými kombináciami úrovní faktorov a zodpovedajúcimi nameranými hodnotami odozvy pri spracovaní v Minitabe

Na obr. 40 je zobrazený Cplot nameraných hodnôt ako výstup Minitabu.

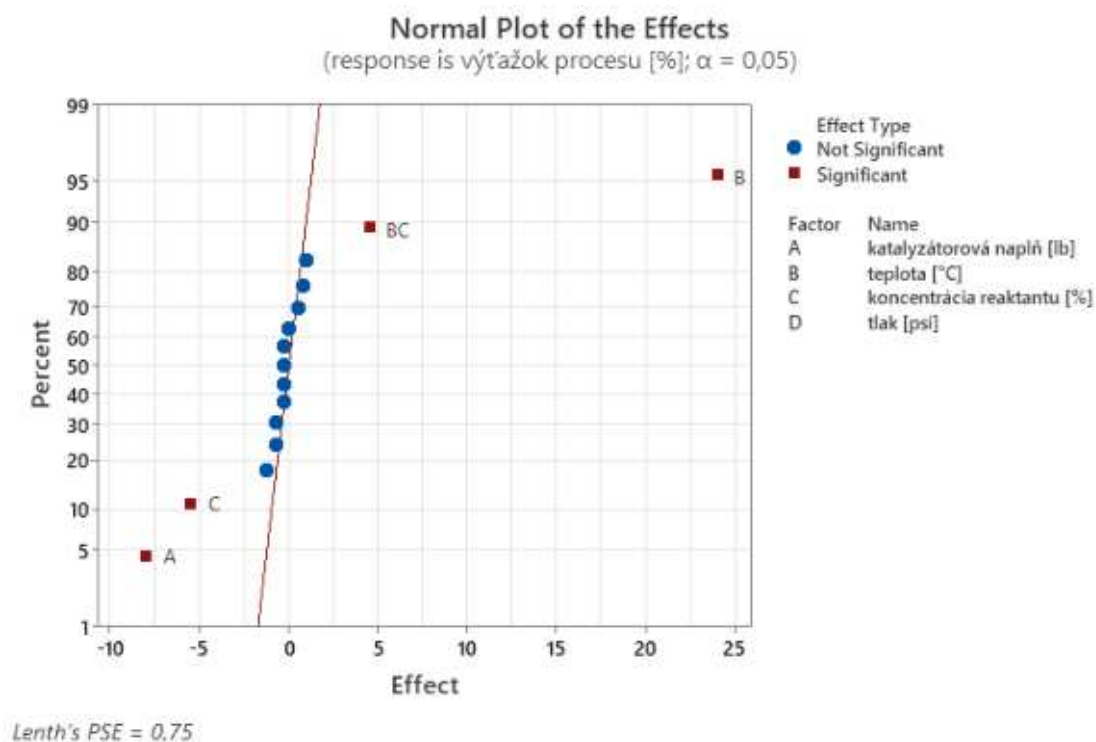


Obr. 40 Cplot nameraných hodnôt – výstup Minitabu

Vypočítané veľkosti vplyvu členov regresného modelu lineárneho typu na odozvu, to znamená, ak uvažujeme regresný model so všetkými lineárnymi členmi a so všetkými možnými interakčnými členmi, budú:

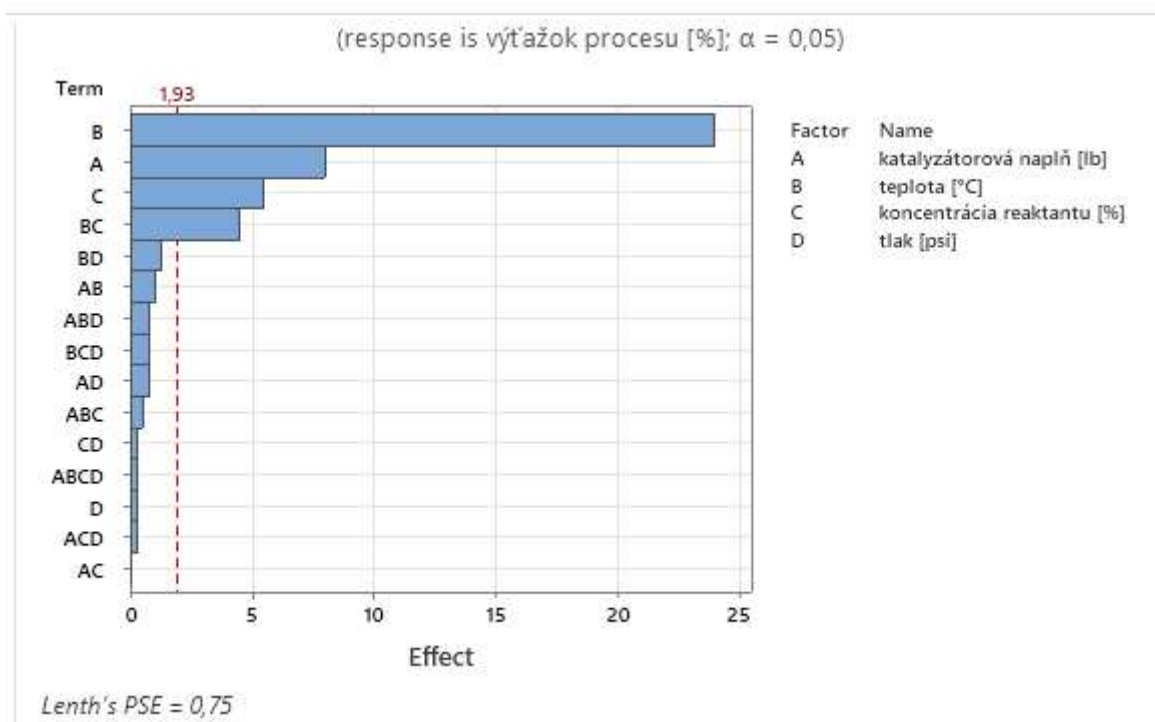
Term	Effect
A	-8.00
B	24.00
C	-5.50
D	-0.25
A*B	1.00
A*C	-0.00
A*D	0.75
B*C	4.50
B*D	-1.25
C*D	-0.25
A*B*C	0.50
A*B*D	-0.75
A*C*D	-0.25
B*C*D	-0.75
A*B*C*D	-0.25

Ak by boli všetky účinky (efekty) nulové, týchto 15 odhadov efektov by predstavovalo jednoduchú náhodnú vzorku z normálneho rozdelenia s konštantnou smerodajnou odchýlkou a všetky efekty by boli sústredené okolo červenej priamky na obr.41.



Obr. 41 Normálny pravdepodobnostný graf efektov v Minitabe

Výsledky Pareto grafu súhlasia s výsledkami normálneho pravdepodobnostného grafu efektov na obr. 42.



Obr. 42 Výstup Minitabu - Pareto graf zobrazuje absolútne hodnoty efektov

Pri vyhodnotení vychádzame z toho, že väčšie efekty budú prislúchať tým faktorom, ktoré majú v procese skutočný vplyv. Existuje výrazný rozdiel medzi štyrmi najväčšími efektami A, B, C a BC a ostatnými efektami. V prípade normálneho pravdepodobnostného grafu na obr. 41 sú označené ako signifikantné na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ práve tieto efekty. Tomu výsledku zodpovedá aj umiestnenie Lenthovej „miery chyby“ („margin of error“) v Pareto grafe na obr. 42 na hodnote 1,93. Rozpätie chyby „margin of error“ je súčinom odhadovanej pseudo štandardnej chyby Lenth's PSE = 0,75 a kritickej hodnoty t rozdelenia.

Poznámka:

Lenthova pseudo štandardná chyba (Lenth's PSE) sa používa na výpočet kritickej hodnoty efektov KV pri meraniach bez replikácií. Je založená na skutočnosti, že smerodajnú odchýlku vzorky z rozdelenia $N(0, \sigma^2)$ možno odhadnúť ako 1,5 násobok mediánu absolútnych hodnôt efektov. V prípade, že niektoré efekty nie sú nulové, vylepšením odporúčaným Lenthom je vymazať efekty, ktoré presahujú 2,5-násobok tohto odhadu a znovu prepočítať jej hodnotu.

Vzťah na výpočet kritickej hodnoty efektov KV je:

$$KV = PSE \times t_{m/3}^{kv} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right),$$

kde $t_{m/3}^{kv} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ je kritická hodnota, teda $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot 100\%$ kvantilom t rozdelenia s $m/3$ stupňami voľnosti, kde m je počet posudzovaných efektov. PSE je hodnota štandardnej chyby odporúčaná Lenthom na vyhodnotenie štatistickej významnosti odhadov efektov.

Postup výpočtu PSE je nasledovný:

1. Absolútne hodnoty efektov

Term	Effect
A	8.00
B	24.00
C	5.50
D	0.25
A*B	1.00
A*C	0.00
A*D	0.75
B*C	4.50
B*D	1.25
C*D	0.25
A*B*C	0.50
A*B*D	0.75
A*C*D	0.25
B*C*D	0.75
A*B*C*D	0.25

2. Ich vzostupné usporiadanie

Term	Effect
A*C	0.00
D	0.25
C*D	0.25
A*C*D	0.25
A*B*C*D	0.25
A*B*C	0.50
8. A*D	0.75
A*B*D	0.75
B*C*D	0.75
A*B	1.00
B*D	1.25
B*C	4.50
C	5.50
A	8.00
B	24.00

Za predpokladu, že efekty sú nulové:

Median: $Me=0.75$

Predbežný odhad Lent'h PSE:

$$1.5 \times 0.75 = 1.125$$

Vylúčenie extrémnych hodnôt

$$2.5 \times 1.125 = 2.8125$$

3. Vzostupné usporiadanie efektov po vylúčení extrémnych hodnôt

Term	Effect
A*C	0.00
D	0.25
C*D	0.25
A*C*D	0.25
A*B*C*D	0.25
6. A*B*C	0.50
A*D	0.75
A*B*D	0.75
B*C*D	0.75
A*B	1.00
B*D	1.25

Median: $Me=0.5$

Spresnený odhad Lent'h PSE:

$$1.5 \times 0.5 = 0.75$$

Kvantil Studentovho rozdelenia: ak $df=15/3$, potom $t_5^{kv}(0.975) = 2.570582$

Kritická hodnota pre efekty: $KV = 0.75 \times 2.57 = 1.9275$

Poznámka:

Vo väčšine prípadov vylúčením nevýznamných faktorov či nevýznamných interakcií získame nenulové stupne voľnosti pre chybu, čo nám umožní ďalšie štatistické spracovanie aj v prípade experimentu bez replikácií.

4.9 KVALITA MODELU VYJADRENÁ POMOCOU KOEFICIENTOV (INDEXOV) DETERMINÁCIE

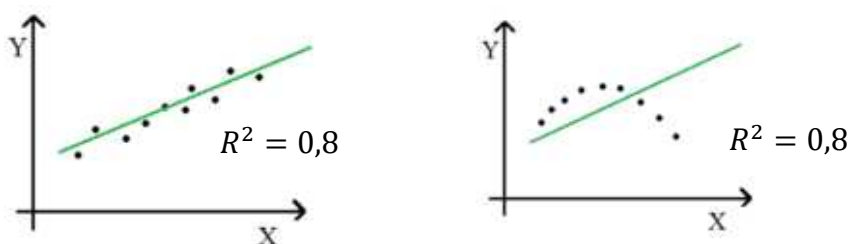
Hodnotiť kvalitu regresného modelu a porovnávať viaceré regresné modely medzi sebou je možné podľa:

a) **Indexu (koeficientu) determinácie R^2** , ktorý vyjadruje pomer modelom vysvetleného súčtu štvorcov SSR a celkového súčtu SSY – je mierou zhody pozorovaných hodnôt s modelom a vyjadruje, aký podiel variability závislej premennej Y je daným modelom popísaný.

$$R^2 = \frac{SSR}{SSY} = \frac{\sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2}; R^2 = 1 - \frac{SSE}{SSY}.$$

Vždy platí $0 \leq R^2 \leq 1$. Dokonalý model vysvetľuje celkový rozptyl ($R^2 = 1$), za dobrý model považujeme ak platí, že $R^2 \geq 0,9$. Z dvoch regresných modelov je „kvalitnejší“ ten, ktorý má väčší koeficient determinácie.

Poznámka: Charakteristiky kvality vyjadrované pomocou koeficientu determinácie R^2 by nemali byť preceňované. Posudzovať kvalitu modelu len na základe mier kvality odhadu (koeficient determinácie) môže byť zavádzajúce. Obr. 43 porovnáva dva rôzne regresné modely pre dve premenné X a Y s rovnakým R^2 .



Obr. 43 V oboch prípadoch je koeficient determinácie $R^2 = 0,8$

b) **Upraveného (korigovaného) koeficientu determinácie R_{adj}^2 (Adjusted R-square)**

$$R_{adj}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n-1}{n-p-1},$$

kde n je počet pozorovaní, p je počet vysvetľujúcich premenných.

Táto charakteristika penalizuje regresný model za počet vysvetľujúcich premenných – používa sa na porovnanie kvality modelov s rôznym počtom vysvetľujúcich premenných; výrazný

rozdiel medzi R^2 a R^2_{adj} indikuje, že do modelu bolo zahrnutých príliš veľa premenných. Medzi R^2 a R^2_{adj} by nemal byť „veľký rozdiel“. R^2_{adj} môže mať zápornú hodnotu.

povodny model (pred vylucenim)		hierarchicky model (po vyluceni)	
Regression Statistics		Regression Statistics	
Multiple R	0,982899	Multiple R	0,9801791
R Square	0,96609	R Square	0,960751
Adjusted R Square	0,936419	Adjusted R Square	0,9509387
Standard Error	47,46117	Standard Error	41,691076
Observations	16	Observations	16

Obr. 44 Z dôvodu penalizácie by po odstránení nadbytočných členov z regresného modelu mal upravený koeficient determinácie R^2_{adj} narásť

c) prediktívneho koeficientu R^2_{pred} (Adjusted R-square) určuje ako presne vie regresný model v rámci experimentálneho priestoru predikovať dáta (ako presne predikuje správnu hodnotu po odstránení daného údaju zo súboru dát). Veľký rozdiel medzi R^2 a R^2_{pred} naznačuje, že v regresnom modeli je zbytočne veľa členov v pomere k množstvu dát. Možné zdôvodnenie je, že buď sú dáta zlé, alebo boli zvolené nesprávne nezávislé premenné. Túto charakteristiku Excel neposkytuje, Minitab áno.

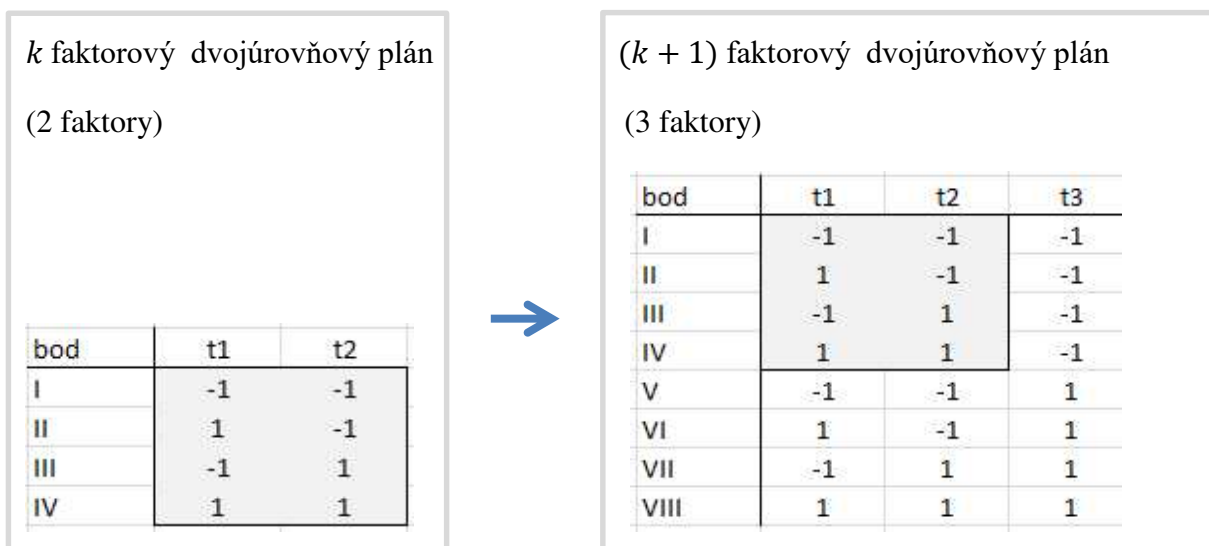
Poznámka (záverečné zhrnutie):

„Dobrá“ regresný model by mal spĺňať nasledovné kritériá:

- mať vysokú štatistickú významnosť, t. j. p-hodnotu $< 0,05$ (high significance);
- mať vysoký index determinácie R^2 , aj upravený index determinácie $adj R^2$ (vysokú koreláciu);
- byť bez nedostatočnosti modelu (no Lack of Fit);

4.10 DVOJÚROVNŇOVÝ PLÁN EXPERIMENTU PRE $(k + 1)$ FAKTOROV

Je dôležité rozlišovať dvojfaktorový a dvojúrovňový typ experimentu. Dvojfaktorový experiment je experiment typu n^2 – máme zvolené 2 nezávislé premenné (faktory) a každý z týchto faktorov meriame na n úrovniach, resp. pri úplnom faktorovom experimente robíme merania odozvy Y pre všetky kombinácie n úrovní týchto 2 faktorov – podľa definície úplného faktorového experimentu delíme interval každého faktora na $(n - 1)$ podintervaly rovnakej dĺžky. Dvojúrovňový experiment (úplný) s k faktormi označujeme ako experiment typu 2^k , čo znamená, že uvažujeme k faktorov a každý z nich meriame na dvoch úrovniach. Tento typ experimentov patrí medzi najčastejšie sa vyskytujúce (skriningové experimenty). Nasledujúci obr. 45 opisuje postup, ako pridávame do úplného dvojúrovňového experimentu s k faktormi ďalší faktor. Všeobecne platí, že úplný faktorový plán experimentu pre $(k + 1)$ faktorov dostaneme z k faktorového plánu jeho zdvojením a pridaním stĺpca pre ďalší faktor.



Obr. 45 Zápis kombinácií úrovní faktorov pre 2 a pre 3 faktory merané na dvoch úrovniach

Pre tri faktory budeme najčastejšie hľadať funkčnú závislosť odozvy od zvolených troch faktorov pomocou regresného modelu, ktorý môže byť:

1. Neúplný kvadratický (použijeme, ak chceme zistiť aj prítomnosť interakcií faktorov).
2. Úplný kvadratický (viac v kap. 7 RSM).

Všeobecný postup, ktorý pritom dodržiavame, je stručne vyjadrený v nasledujúcich bodoch. Pre k faktorov postupujeme rovnakým spôsobom, pričom uvažujeme k faktorov.

4.10.1 Postup nájdenia regresného modelu pre tri faktory

Uvažujme neúplný a úplný kvadratický regresný model pre tri faktory. Postup, ktorým dostaneme bodové odhady regresných koeficientov pre uvažovaný regresný model, je nasledovný:

1. Neúplný kvadratický regresný model – regresný model lineárneho typu – postup stanovenia regresnej funkcie lineárneho typu pre tri faktory

1. krok

Stanovíme funkciu lineárneho typu vyjadrenú v pôvodných jednotkách:

$$y = f_L(x_1, x_2, x_3) = B_0 + B_1x_1 + B_2x_2 + B_3x_3 + B_{12}x_1x_2 + B_{13}x_1x_3 + B_{23}x_2x_3 + B_{123}x_1x_2x_3$$

2. krok

Vyjadríme transformovanú (kódovanú) funkciu lineárneho typu, ktorá bude vyjadrená v kódovaných jednotkách:

$$y_t = (f_L)_t(t_1, t_2, t_3) = b_0 + b_1t_1 + b_2t_2 + b_3t_3 + b_{12}t_1t_2 + b_{13}t_1t_3 + b_{23}t_2t_3 + b_{123}t_1t_2t_3$$

3.krok

Robíme odhad transformovanej regresnej funkcie lineárneho typu:

$$\hat{y}_t = (\hat{f}_L)_t(t_1, t_2, t_3) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1t_1 + \hat{b}_2t_2 + \hat{b}_3t_3 + \hat{b}_{12}t_1t_2 + \hat{b}_{13}t_1t_3 + \hat{b}_{23}t_2t_3 + \hat{b}_{123}t_1t_2t_3$$

4. krok

Návrat k pôvodnej regresnej funkcii lineárneho typu

$$\hat{y} = \hat{f}_L(x_1, x_2, x_3) = \hat{B}_0 + \hat{B}_1x_1 + \hat{B}_2x_2 + \hat{B}_3x_3 + \hat{B}_{12}x_1x_2 + \hat{B}_{13}x_1x_3 + \hat{B}_{23}x_2x_3 + \hat{B}_{123}x_1x_2x_3$$

2. Úplný kvadratický model – postup stanovenie kvadratickej regresnej funkcie pre tri faktory

1. krok

Stanovíme funkcia pre úplný kvadratický model:

$$y = f(x_1, x_2, x_3) = B_0 + B_1x_1 + B_2x_2 + B_3x_3 + B_{11}x_1^2 + B_{22}x_2^2 + B_{33}x_3^2 + B_{12}x_1x_2 + B_{13}x_1x_3 + B_{23}x_2x_3 + B_{123}x_1x_2x_3$$

2. krok

Vyjadríme transformovanú (kódovanú) kvadratickú funkciu:

$$y_t = f_t(t_1, t_2, t_3) = b_0 + b_1 t_1 + b_2 t_2 + b_3 t_3 + b_{11} t_1^2 + b_{22} t_2^2 + b_{33} t_3^2 + b_{12} t_1 t_2 + b_{13} t_1 t_3 + b_{23} t_2 t_3 + b_{123} t_1 t_2 t_3$$

3. krok

Robíme odhad transformovanej kvadratickej regresnej funkcie:

$$\hat{y}_t = \hat{f}_t(t_1, t_2, t_3) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 t_1 + \hat{b}_2 t_2 + \hat{b}_3 t_3 + \hat{b}_{11} t_1^2 + \hat{b}_{22} t_2^2 + \hat{b}_{33} t_3^2 + \hat{b}_{12} t_1 t_2 + \hat{b}_{13} t_1 t_3 + \hat{b}_{23} t_2 t_3 + \hat{b}_{123} t_1 t_2 t_3$$

4. krok

Odhad pôvodnej kvadratickej regresnej funkcie vyjadrenej v pôvodných nekódovaných jednotkách:

$$\hat{y} = \hat{f}(x_1, x_2, x_3) = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 x_1 + \hat{B}_2 x_2 + \hat{B}_3 x_3 + \hat{B}_{11} x_1^2 + \hat{B}_{22} x_2^2 + \hat{B}_{33} x_3^2 + \hat{B}_{12} x_1 x_2 + \hat{B}_{13} x_1 x_3 + \hat{B}_{23} x_2 x_3 + \hat{B}_{123} x_1 x_2 x_3$$

4.10.2 Typy regresných modelov pre k faktorov

Pre k faktorov je postup nájdenia regresných koeficientov regresného modelu zovšeobecnením predchádzajúcich postupov. Na bodové odhady regresných koeficientov opäť používame transformáciu do kódovaných úrovní. Všeobecný zápis regresného modelu (v pôvodných nekódovaných) jednotkách pre k faktorov závisí od typu regresného modelu:

- **Lineárny (First-Order Model)**

$$Y = f(x_1, x_2, \dots, x_k) = B_0 + \sum_{i=1}^k B_i x_i$$

- **Kvadratický neúplný – regresný model lineárneho typu (First-Order Model with Interaction)**

$$Y = f(x_1, x_2, \dots, x_k) = B_0 + \sum_{i=1}^k B_i x_i + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k B_{ij} x_i x_j$$

- **Kvadratický úplný (Second-Order Model)**

$$Y = f(x_1, x_2, \dots, x_k) = B_0 + \sum_{i=1}^k B_i x_i + \sum_{i=1}^k B_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k B_{ij} x_i x_j$$

5 EFEKT FAKTORA A EFEKT INTERAKCIE FAKTOROV

5.1 HLAVNÝ EFEKT (MAIN EFFECT) FAKTORA

Veľkosť vplyvu faktora na odozvu označujeme pojmom efekt faktora. Hlavný efekt faktora je priemerné zvýšenie (zníženie) hodnoty odozvy Y , ak sa faktor zmení z dolnej (-1) na hornú (+1) úroveň. Číselnú hodnotu hlavného efektu faktora A vypočítame podľa vzťahu:

$$ef(A) = \bar{y}_{A+} - \bar{y}_{A-},$$

kde $\bar{y}_{A+}$ je priemerná odozva pri nastavení faktora A na hornú úroveň a $\bar{y}_{A-}$ je priemerná odozva pri nastavení faktora na dolnú úroveň.

Výpočet efektu faktora je možné (v závislosti od konkrétnej situácie) robiť rôznymi spôsobmi: ako priemer rozdielov, ako rozdiel priemerov, znamienkovou metódou, Yatesovou metódou, vypočítať ako dvojnásobok regresných koeficientov.

Efekt faktora (main effect) bol v minulosti počítaný pomocou odozvovej tabuľky na obr. 46, ktorú vymysleli v General Electric – používa rozdiel priemerov odoziev pre faktor nastavený na hornej úrovni (+1) a pre faktor nastavený na dolnej úrovni (-1).

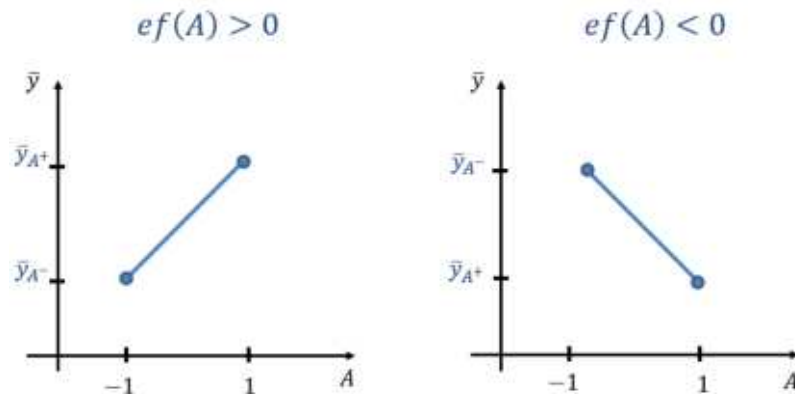
odozvovala tabuľka pre stanovenie efektu trojfaktorového efektu															
číslo kroku	odozva	faktory						interakcie							
		A		B		C		AB		AC		BC		ABC	
		teplota		katalyzátor		čistota									
		60 °C	70 °C	typ K1	typ K2	95%	99%	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
1	26,2	26,2		26,2		26,2		26,2		26,2		26,2		26,2	
2	22,7		22,7	22,7		22,7		22,7		22,7		22,7		22,7	
3	47,1	47,1			47,1	47,1		47,1			47,1	47,1			47,1
4	46,4		46,4		46,4	46,4		46,4	46,4			46,4		46,4	
5	40,9	40,9		40,9		40,9		40,9	40,9	40,9		40,9			40,9
6	34,1		34,1	34,1			34,1	34,1			34,1	34,1		34,1	
7	42,9	42,9			42,9		42,9	42,9		42,9			42,9	42,9	
8	40		40		40		40		40		40		40		40
špecif	300,3	157,1	143,2	123,9	176,4	142,4	157,9	146,8	153,5	152,9	147,4	168,5	131,8	149,6	150,7
priemer	37,5	39,3	35,8	31,0	44,1	35,6	39,5	36,7	38,4	38,2	36,9	42,1	33,0	37,4	37,7
efekt		-3,5		13,1		3,9		1,7		-1,4		-9,2		0,3	

Obr. 46 Odozvovala tabuľka z General Electric, ktorá sa používala na výpočet veľkosti efektov

Grafom efektu faktora je úsečka s vlastnosťami:

- pri zobrazovaní grafu vždy na vodorovnú os nanášame úrovne faktora a na zvislú os priemery nameraných odoziev v danej úrovni faktora;
- y-ové súradnice koncových bodov úsečky zobrazujú priemery odoziev, kedy bol daný faktor nastavený na hornej a dolnej úrovni;

- uhol úsečky s x -ovou osou ukazuje „veľkosť“ efektu;
 - aj dĺžku úsečky možno použiť na porovnanie veľkostí vplyvu faktorov;
 - nulový efekt zodpovedá úsečke rovnobežnej s x -ovou osou;
 - smer rastúci znamená, že prechodom z dolnej na hornú úroveň faktora odozva vzrastie;
 - smer klesajúci znamená, že prechodom z dolnej na hornú úroveň faktora klesne odozva.
- Vid' obr. 47.



Obr. 47 Graf hlavného efektu faktora A (main effect) – vľavo pozitívny, vpravo negatívny

Poznámka:

1. Výpovedná hodnota grafu hlavného efektu, ktorým popisujeme vplyv faktora na odozvu, je veľká iba v prípade, že interakcia medzi faktormi nie je prítomná alebo nie je signifikantná.
2. Pri experimentoch, kde bol faktor meraný na viac ako dvoch úrovniach, je grafom hlavného efektu lomená úsečka.
3. U lineárnych a neúplných kvadratických modelov hľadáme optimálnu úroveň faktorov porovnaním grafov efektov. U kvadratických modelov sa optimálna úroveň faktora vypočíta.

5.2 VPLYV INTERAKCIE FAKTOROV (INTERACTION EFFECT)

Interakcia znamená, že efekt jedného faktora závisí na úrovni druhého faktora, pretože tieto dva faktory nie sú nezávislé. Významná interakcia medzi faktormi spôsobuje, že efekt faktorov na závislú premennú Y nie je aditívny a skúmanie hlavných efektov samostatných faktorov sa dostáva do úzadia.

Graf interakcií (Interaction plot) je graf zobrazujúci priemery odozvy, ktoré zodpovedajú každej úrovni jedného faktora (vyznačeného na vodorovnej osi) pri konštantnej

úrovni druhého faktora (uvedeného v legende). Graf interakcie faktorov pozostáva z dvoch úsečiek, vid'. obr. 48. Rovnobežné úsečky ukazujú, že interakcia medzi faktormi neexistuje. Ak úsečky nie sú rovnobežné, interakcia medzi faktormi existuje.



Obr. 48 Grafy interakcie faktorov – vľavo bez interakcie, vpravo interakcia

Interakcia medzi dvoma faktormi je prítomná, ak efekt jedného faktora na odozve Y nie je rovnaký pre všetky úrovne iného faktora. Nasledujúci obr. 49 ukazuje rôzne príklady možných efektov interakcií so súčasným popisom hlavného efektu faktora A.

Interpretácia grafov interakcií

	Nulový hlavný efekt faktora A	Kladný hlavný efekt faktora A	Záporný hlavný efekt faktora A
bez interakcie			
malá interakcia			
veľká interakcia			

Obr. 49 Porovnanie rôznych vybraných grafov interakcií

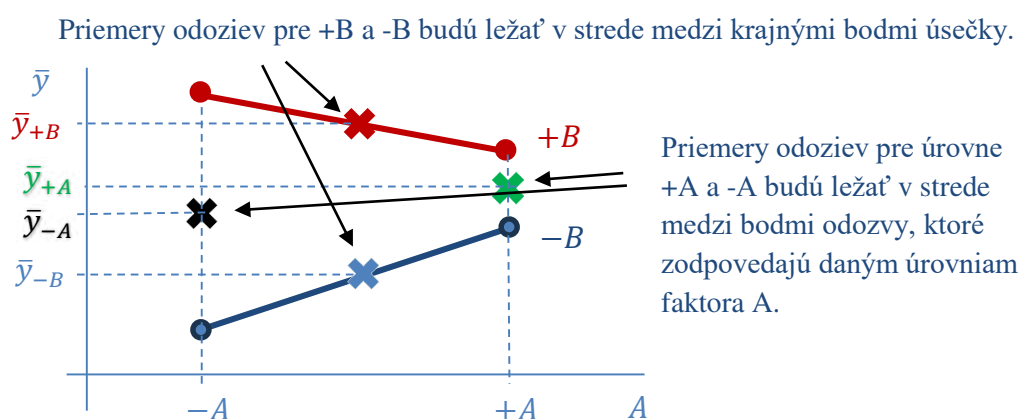
Poznámka:

Pri nulovom hlavnom efekte (main effect) faktora A je v prípade malej aj veľkej interakcie hlavný efekt (main effect) faktora B nulový. Pri všetkých ostatných grafoch interakcií je hlavný efekt faktora B záporný.

Pri určovaní hlavného efektu faktora z grafu interakcií faktorov používame definičný vzťah na výpočet veľkosti efektu faktora $ef(A) = \bar{y}_{+A} - \bar{y}_{-A}$, t. j. robíme rozdiel v priemernej odozve na hornej a dolnej úrovni daného faktora. Oba hlavné efekty faktorov budú kladné, faktor B bude mať na odozvu väčší vplyv, pretože rozdiel priemerných odoziev je väčší ako pre faktor A, vid' obr. 50.

Hlavný vplyv faktora B na odozvu y bude pozitívny, pretože $ef(B) = \bar{y}_{+B} - \bar{y}_{-B} > 0$.

Hlavný vplyv faktora A na odozvu y bude pozitívny, pretože $ef(A) = \bar{y}_{+A} - \bar{y}_{-A} > 0$.



Obr. 50 Z grafu interakcie vieme zistiť, či hlavný efekt faktorov bude pozitívny alebo negatívny

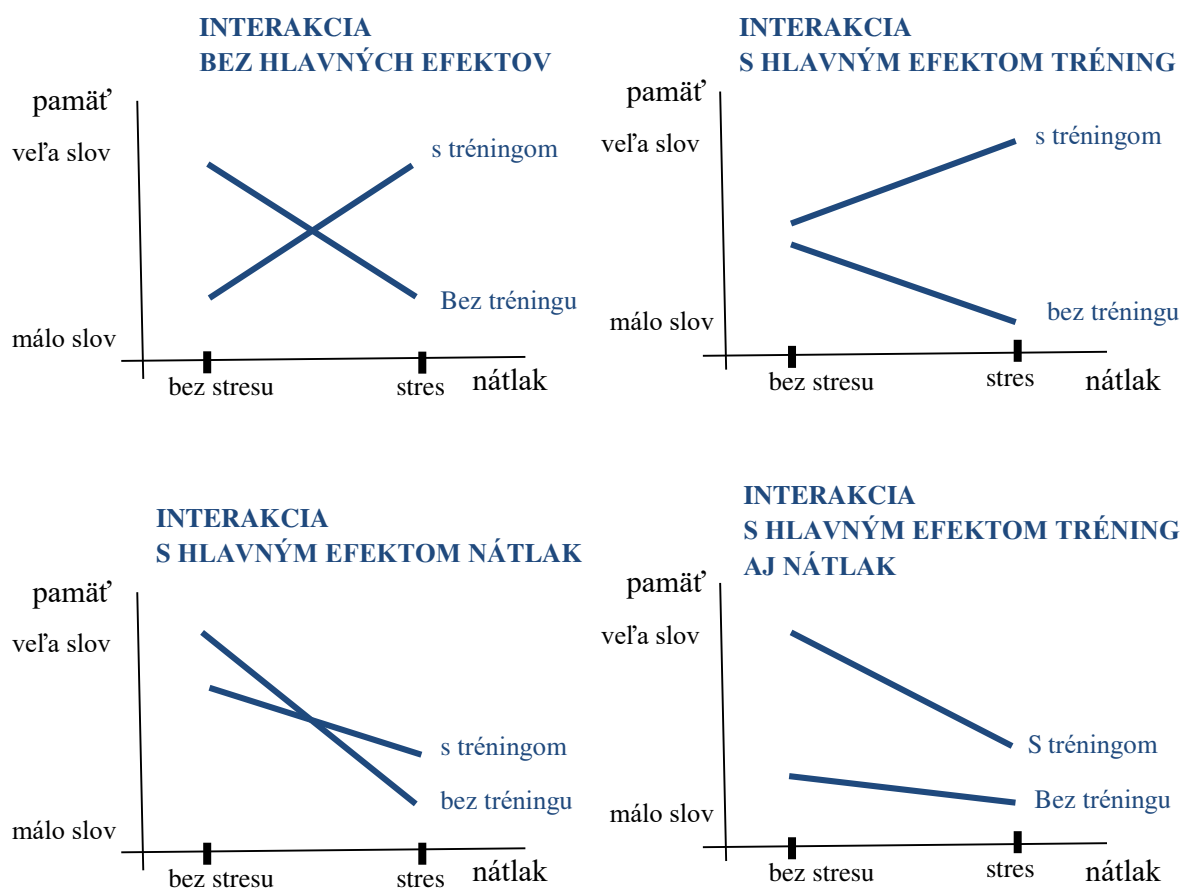
Červenou úsečkou je zobrazený efekt faktora A pri nastavenom faktore B na hornú úroveň. Modrou úsečkou je zobrazený efekt faktora A pri nastavenom faktore B na jeho dolnú úroveň. Medzi faktormi A a B existuje interakcia, pretože úsečky sú rôznobežné.

Najväčšia odozva bola nameraná pri nastavení faktora A na dolnú úroveň a súčasne faktora B na hornú úroveň. Naopak minimálnu odozvu možno očakávať pri nastavení faktora A na dolnú úroveň a súčasnem nastavení faktora B na dolnú úroveň.

Príklad

Na nasledujúcom obr. 51 možno vidieť rozdiely v zobrazení pri rôznych hlavných efektoch pri prítomnosti interakcie medzi dvoma faktormi. Príklad je prevzatý z [20]. Ako odozva bola zvolená pamäť, resp. počet zapamätaných slov. Ako vstupné faktory nátlak (stres) a tréning. Na grafe hore vľavo sú oba faktory bez hlavného efektu, pretože priemery odoziev na oboch úrovniach faktorov splývajú. Graf vpravo hore zobrazuje prípad, kedy bude prítomný hlavný efekt faktora tréning – priemer zapamätaných slov je menší pre úroveň bez tréningu ako pre úroveň s tréningom. Priemer odozvy je rovnaký pre obe úrovne pod nátlakom aj bez nátlaku, preto hlavný vplyv faktora nátlak bude nulový. Vľavo dolu je graf, v ktorom

splývajú hodnoty odozvy pre úrovně faktora tréning a bez tréningu – hlavný efekt faktora tréning bude nulový. Priemer odozvy pre úroveň stres je menší ako priemer odozvy pre úroveň bez stresu, preto hlavný efekt faktora nátlak bude nenulový (záporný). Na obrázku vpravo dolu je okrem interakcie prítomný aj hlavný efekt faktora tréning a hlavný efekt faktora nátlak (stres). Priemery odozvy pre počet zapamätaných slov sú pre obe úrovně faktora nátlak rôzne, pre úroveň bez stresu je väčší ako pre úroveň so stresom, preto bude hlavný efekt faktora nátlak nenulový (záporný). Priemery odozvy pre počet zapamätaných slov je pri tréningu väčší ako bez tréningu, preto bude aj hlavný efekt faktora tréning nenulový (kladný).



Obr. 51 Grafy interakcie faktorov

Spôsoby, ktorými rozhodujeme, ktoré efekty sú veľké (významné):

- graf hlavných efektov (Main effect);
- graf interakcií (Interaction effect);
- vypočítaná p-hodnota pre každý efekt (ako súčasť ANOVA);
- Pareto diagram efektov;
- normálny pravdepodobnostný graf.

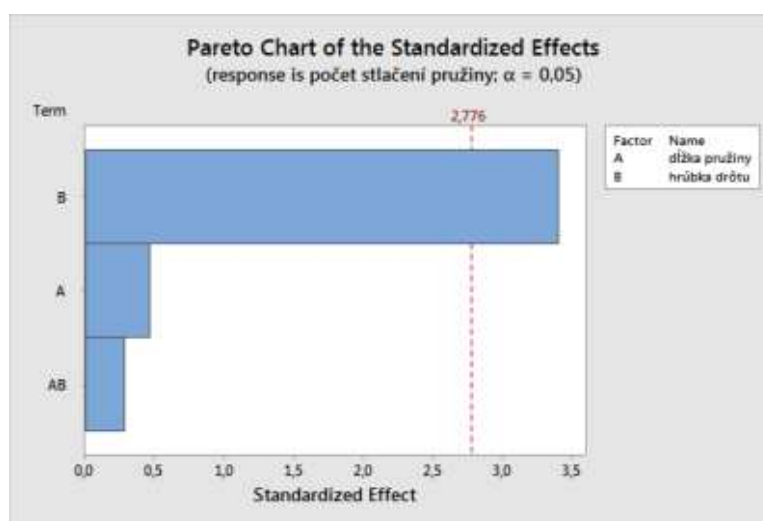
5.3 PARETO DIAGRAM (PARETO CHART)

Hlavný prínos Pareto grafov v DOE je v tom, že pomocou nich dokážeme jednoduchým spôsobom vizuálne porovnávať veľkosti efektov faktorov a efektov interakcií faktorov. To, či je efekt pozitívny alebo negatívny, však z Pareto grafu nevieme zistiť, porovnávame iba ich absolútne veľkosti. To, že Pareto grafy umožňujú analýzu odhadov efektov a interakcií pri meraniach, má veľký význam najmä pri experimentoch bez replikácií. Keďže absolútne hodnoty efektov faktorov a interakcií sú v ňom zoradené podľa absolútnej veľkosti, podvedome predpokladáme, že väčšie efekty budú prislúchať tým faktorom a interakciám, ktoré majú v procese skutočný vplyv. Za významné efekty budeme považovať tie, ktoré presiahnu kritickú hodnotu KV, pričom

$$KV = PSE \times t_{m/3}^{kv}(1 - \alpha),$$

kde PSE je pseudo štandardná chyba (Lenth's PSE) založená na skutočnosti, že smerodajnú odchýlku vzorky z rozdelenia $N(0, \sigma^2)$ možno odhadnúť ako 1,5 násobok mediánu absolútnych hodnôt. Významné efekty sú pri spresňujúcich výpočtoch vylúčené ako extrémne hodnoty prevyšujúce 2,5 násobok mediánu. Kritickú hodnotu t-rozdelenia určíme ako kvantil $t_{m/3}^{kv}(1 - \alpha)$, kde počet stupňov voľnosti $df = \frac{m}{3}$, pričom m je celkový počet odhadov efektov a interakcií.

Pri experimentoch s uvažovanými replikáciami je výpočet jednoduchší. Keďže pri DOE sú efekty štandardizované, kritickú hodnotu KV určíme jednoducho ako $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot 100\%$ kvantil Studentovho rozdelenia $t_{(m-1)/2}^{kv}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$, obr. 52.



Obr. 52 Ukážka Pareto grafu pre štandardizované efekty s kritickou hodnotou 2,776

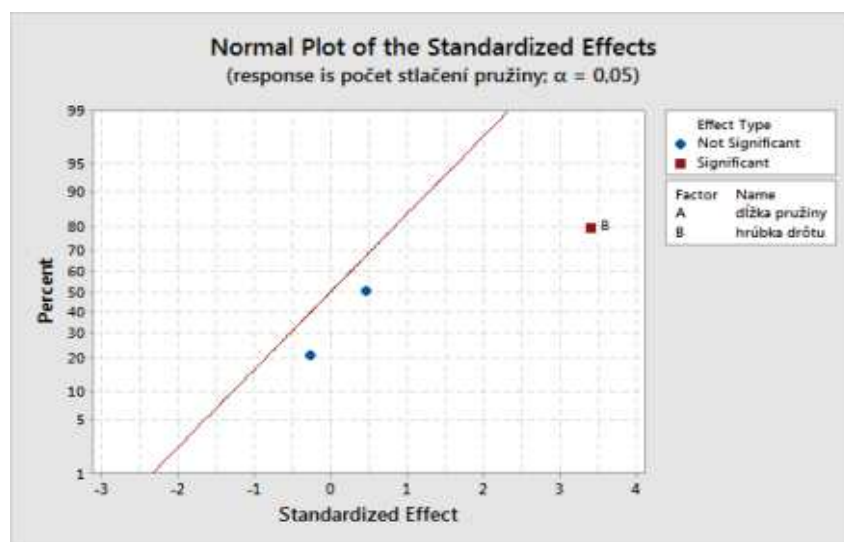
5.4 NORMÁLNY PRAVDEPODOBNOSTNÝ GRAF (NORMAL PROBABILITY PLOT)

Normálny pravdepodobnostný graf zostrojujeme tak, že na vodorovnú os vynášame efekty faktorov a interakcií, na zvislú os relatívnu kumulatívnu početnosť počítanú podľa vzťahu

$$P_i = \frac{(i-0,5) \cdot 100}{m},$$

kde $i = 1, 2, \dots, m$, m je počet faktorov a interakcií.

Za významné sa považujú tie faktory a ich interakcie, ktoré sa nachádzajú mimo hlavnej línie znázornenej priamkou, ktorá predstavuje kumulatívne početnosti z Gaussovej krivky. Na obr. 53 je to faktor B.



Obr. 53 Normálny pravdepodobnostný graf štandardizovaných efektov

6 ČIASTOČNÝ FAKTOROVÝ DVOJÚROVNŇOVÝ EXPERIMENT (FRACTIONAL FACTORIAL EXPERIMENT AT TWO LEVELS)

Experiment nezostavujeme pre každý faktor, ale vedľajšie faktory vyjadrujeme pomocou hlavných. Pojem vedľajší efekt neznamena, že by bol menej dôležitý alebo mal menší vplyv. Veľkosti efektov na začiatku skúmania nepoznáme.

Úplný dvojúrovňový faktorový experiment označujeme zápisom: 2^k ;

2 – počet úrovní každého faktora, k – počet faktorov

Čiastočný experiment označujeme zápisom: 2^{k-p} ;

p – stupeň zníženia (počet vedľajších faktorov)

Podľa stupňa zníženia delíme experimenty na:

- polovičné – s najnižším znížením ($p = 1$);
- saturované (nasýtené) – s najvyšším znížením (napr. 2^{7-4}): počet meraní (runs) nesmie byť menší ako počet parametrov v lineárnom regresnom modeli;
- stredové – všetky ostatné.

6.1 ZÁKLADNÉ POJMY, OPERÁCIE S FAKTORMI A ICH VLASTNOSTI

Jednotkový faktor I je faktor, ktorý obsahuje iba úrovne +1.

Pre operácie s faktormi platia vzťahy:

- 1) $A \cdot A = I$
- 2) $A \cdot I = I \cdot A = A$
- 3) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- 4) $A \cdot B = B \cdot A$

Generátor plánu má označenie vedľajšieho faktora, ktorý chceme vyjadriť pomocou hlavných faktorov. V každom pláne je toľko generátorov, koľko má vedľajších faktorov. Generátory musia byť nezávislé.

Slovo označuje každú kombináciu faktorov.

Definičné rovnice – slová, ktoré sú rovné jednotkovému faktoru I.

Rozlíšení (resolution) R – dĺžka najkratšieho slova v definičných rovniciach. Vo všeobecnom zápise typu plánu n^{k-p} zapisujeme rozlíšenie R rímskou číslicou ako dolný index : n_R^{k-p}

Príklad

Našou úlohou je zostaviť polovičný plán pre päť faktorov: A,B,C,D,E.

Riešenie

Zostavíme úplný faktorový plán pre 4 hlavné faktory, napr. zvolíme faktory A, B, C, D. Vedľajší faktor E vyjadríme ako ich kombináciu, napr. $E = ABCD$.

$E = ABCD$ je generátor

$$E.E = E.ABCD$$

$I = ABCDE$ je definičná rovnica – slovo v definičnej rovnici obsahuje 5 faktorov

Zápisom 2_{IV}^{5-1} označujeme, že faktory sú merané na dvoch úrovniach, faktorov je 5, vedľajší faktor je 1, experiment je polovičný, rozlíšenie je V, pretože slovo v definičnej rovnici má dĺžku 5 (5 písmen).

Zameniteľné dvojice – **aliasing (confounded)** – pomocou definičnej rovnice je možné nájsť dvojice faktorov, resp. interakcií, ktoré tvoria rovnaké postupnosti úrovní faktorov, resp. úrovní interakcií (rovnaké postupnosti ± 1), preto hovoríme, že ich vplyv je zmiešaný (confounded).

Napr.

$$I = ABCDE$$

$$DE.I = DE.ABCDE$$

$DE = ABC$ interakcie DE a ABC sú zameniteľné – aliasing (confounded)

Poznámka:

1. Za najlepšiu zameniteľnú interakciu sa považuje tá, ktorá je tvorená najväčším počtom faktorov.
2. Čím dlhšie je slovo, tým menší má efekt. Za bezvýznamný sa v praxi považuje efekt interakcie s dĺžkou slova aspoň 3.

Rozlíšenie plánu experimentu R hovorí o tom, ako veľmi sa vplyvom použitia generátora budú zmiešavať interakcie s hlavnými faktormi, resp. medzi sebou (aliasing). Čím je experiment úspornejší, tým má menšiu rozlišovaciu schopnosť.

Definícia: V návrhu s rozlíšením R budú interakcie FI rádu rozlíšiteľné od iných interakcií rádu nižšieho ako R-FI.

Rozlíšenie III. Značenie pre plány na dvoch úrovniach s rozlíšením III je 2_{III}^{k-p} .

Návrh tohto typu umožňuje odhady hlavných efektov. Niektoré interakcie druhého rádu však budú zmiešané s hlavnými faktormi a je nutným predpokladom, že sú zanedbateľné.

R=III

FI=1 R-FI=3-1=2 → hlavné efekty budú rozlíšiteľné navzájom

FI=2 R-FI=3-2=1

Rozlíšenie IV. Značenie pre plány na dvoch úrovniach s rozlíšením IV je 2_{IV}^{k-p} .

Návrhy tohto typu umožňujú odhadovať hlavné efekty nezávisle na akejkoľvek interakcii druhého rádu. Niektoré interakcie druhého rádu sú však zmiešané dokopy a nemožno ich odhadnúť.

R=IV

FI=1 R-FI=4-1=3 → *hlavné efekty budú rozlíšiteľné od všetkých interakcií 2. rádu a od iných hlavných efektov*

FI=2 R-FI=4-2=2 → *2 faktorové interakcie budú rozlíšiteľné od hlavných efektov*

FI=3 R-FI=4-3=1

Rozlíšenie V. Značenie pre plány na dvoch úrovniach s rozlíšením V je 2_V^{k-p} .

Návrhy tohto typu umožňujú odhady hlavných faktorov a interakcii druhého a tretieho rádu. Interakcie tretieho a druhého rádu môžu byť zameniteľné.

R=V

FI=1 R-FI=5-1=4 → *hlavné efekty budú rozlíšiteľné od všetkých interakcií 3. a 2. rádu a od iných hlavných efektov*

FI=2 R-FI=5-2=3 → *2 faktorové interakcie budú rozlíšiteľné od interakcií 2. rádu a od hlavných efektov*

FI=3 R-FI=5-3=2 → *3 faktorové interakcie budú rozlíšiteľné od hlavných efektov*

FI=4 R-FI=5-4=1

Tabuľka na obr. 54 zobrazuje rozlíšenie R podľa počtu faktorov k a stupňa zníženia p .

	Design Resolution					
k	III	IV	V	VI	VII	VIII
3	2_{III}^{3-1}					
4		2_{IV}^{4-1}				
5	2_{III}^{5-2}		2_V^{5-1}			
6	2_{III}^{6-3}	2_{IV}^{6-2}		2_{VI}^{6-1}		
7	2_{III}^{7-4}	2_{IV}^{7-3}			2_{VII}^{7-1}	
		2_{IV}^{7-2}				
8		2_{IV}^{8-4}	2_V^{8-2}			2_{VIII}^{8-1}
		2_{IV}^{8-3}				

Obr. 54 Rozlíšenie R pre 3 až 8 faktorov pre experimenty 2_R^{k-p} podľa stupňa zníženia p [9]

6.2 OPTIMÁLNE VOĽBY GENERÁTOROV

Pri výbere najlepšieho generátora sa prihliada na to, aby dĺžka slova v definičnej rovnici bola čo najväčšia, t. j., aby sa voľbou generátora získalo čo najväčšie rozlíšenie. Na obr. 55 je tabuľka optimálnych generátorov prevzatá z [9]. Generátorom $E = ABCD$ označujeme, že pri čiastočnom pláne experimentu piaty faktor E (nezávislú premennú x_5) vyjadrujeme ako kombináciu štyroch predchádzajúcich faktorov A až D, teda ako kombináciu nezávislých premenných x_1 až x_4 . Zápis $x_5 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$ býva redukovaný na tvar $x_5 = x_{1234}$ a ten následne na tvar $5 = 1234$, resp. $5 = \pm 1234$.

k	Design Resolution	Design	Runs	Generators
3	III	2_{III}^{3-1}	4	$3 = \pm 12$
4	IV	2_{IV}^{4-1}	8	$4 = \pm 123$
5	III	2_{III}^{5-2}	8	$4 = \pm 12, 5 = \pm 13$
	V	2_V^{5-1}	16	$5 = \pm 1234$
6	III	2_{III}^{6-3}	8	$4 = \pm 12, 5 = \pm 13, 6 = \pm 23$
	IV	2_{IV}^{6-2}	16	$5 = \pm 123, 6 = \pm 234$
	VI	2_{VI}^{6-1}	32	$6 = \pm 12345$
7	III	2_{III}^{7-4}	8	$4 = \pm 12, 5 = \pm 13, 6 = \pm 23, 7 = \pm 123$
	IV	2_{IV}^{7-3}	16	$5 = \pm 123, 6 = \pm 234, 7 = \pm 134$
	IV	2_{IV}^{7-2}	32	$6 = \pm 1234, 7 = \pm 1245$
	VII	2_{VII}^{7-1}	64	$7 = \pm 123456$
8	IV	2_{IV}^{8-4}	16	$5 = \pm 234, 6 = \pm 134, 7 = \pm 123, 8 = \pm 124$
	IV	2_{IV}^{8-3}	32	$6 = \pm 123, 7 = \pm 124, 8 = \pm 2345$
	V	2_V^{8-2}	64	$7 = \pm 1234, 8 = \pm 1256$
	VIII	2_{VIII}^{8-1}	128	$8 = \pm 1234567$

Obr. 55 Tabuľka optimálnych generátorov podľa počtu faktorov a rozlíšenia [9]

Poznámka: Minitab obsahuje vstavané nástroje na generovanie optimálnych čiastočných faktorových plánov.

6.3 VÝZNAM POUŽITIA ČIASTOČNÝCH FAKTOROVÝCH EXPERIMENTOV

Čiastočné (redukované, frakčné) faktorové experimenty sú experimenty, pri ktorých sa skúma len vybraná podmnožina všetkých možných kombinácií faktorov a ich úrovní. Sú efektívnym riešením pri vysokom počte faktorov, kde by úplný faktorový experiment bol príliš nákladný alebo časovo nerealizovateľný, pretože počet meraní (runs) narastá so zvyšujúcim sa počtom uvažovaných faktorov k exponenciálne. Tabuľka na obr. 56 ukazuje počty potrebných bodov meraní (runs) v závislosti od počtu faktorov (2 až 15) a od počtu zvolených úrovní (2 až 3). Vo všeobecnosti platí, že počet potrebných realizácií meraní pre úplný n – úrovňový experiment je geometrickou postupnosťou s kvocientom n .

počet faktorov	Počet bodov, v ktorých sa realizuje meranie pre úplný experiment	
	2 úrovne	3 úrovne
2	4	9
3	8	27
4	16	81
5	32	243
6	64	729
7	128	2187
8	256	6561
9	512	19683
10	1024	59049
11	2048	177147
12	4096	531441
13	8192	1594323
14	16384	4782969
15	32768	14348907

Obr. 56 Počet bodov, v ktorých realizujeme meranie narastá pri úplnom faktorov experimente s počtom faktorov exponenciálne

Hlavné výhody použitia čiastočných faktorových experimentov:

- úspora času a nákladov;
- minimalizácia experimentálnych chýb – menej meraní (pokusov) znamená menšiu šancu na chyby spôsobené vonkajšími faktormi alebo nekonzistentnosťou v meraniach;
- efektívne získanie informácií o hlavných efektoch faktorov a niektorých interakciách medzi nimi – pri správnom návrhu experimentu sa dajú znižovať aliasingové efekty, kedy sa efekty faktorov „zamieňajú“;

- možnosť dodatočného rozšírenia.

Nevýhody čiastočných faktorových experimentov:

- zmiešavanie (aliasing) efektov – ak sa zvolí nesprávny dizajn, môže dôjsť k skresleniu výsledkov;
- strata niektorých interakčných efektov – niektoré vyššie rádové interakcie nie sú pri čiastočných plánoch experimentov vôbec merateľné.

Príklad

Pri skríningu bol zvolený čiastočný experiment 2_{IV}^{5-1} bez replikácií. Bol zvolený generátor $E = ABCD$. Definičná rovnica $I = ABCDE$. Porovnajte výsledky analýzy čiastočného experimentu 2_{IV}^{5-1} s úplným faktorovým experimentom 2^5 vzhľadom na hlavné efekty faktorov.

Riešenie

Porovnáme výsledky pre úplný experiment 2^5 a polovičný faktorový experiment 2_{IV}^{5-1} .

Plán experimentu a namerané hodnoty odozvy pre úplný faktorový experiment 2^5 sú (obr. 57):

run1	A	B	C	D	E	Y
1	-1	-1	-1	-1	-1	13,1
2	1	-1	-1	-1	-1	9,9
3	-1	1	-1	-1	-1	8,1
4	1	1	-1	-1	-1	7,5
5	-1	-1	1	-1	-1	9
6	1	-1	1	-1	-1	9,2
7	-1	1	1	-1	-1	-1
8	1	1	1	-1	-1	-1
9	-1	-1	-1	1	-1	10,6
10	1	-1	-1	1	-1	8,2
11	-1	1	-1	1	-1	11
12	1	1	-1	1	-1	11,2
13	-1	-1	1	1	-1	5,1
14	1	-1	1	1	-1	9,7
15	-1	1	1	1	-1	4,1
16	1	1	1	1	-1	2,9
17	-1	-1	-1	-1	1	6,4
18	1	-1	-1	-1	1	9,8
19	-1	1	-1	-1	1	9
20	1	1	-1	-1	1	6,6
21	-1	-1	1	-1	1	4,9
22	1	-1	1	-1	1	5,3
23	-1	1	1	-1	1	-5,1
24	1	1	1	-1	1	-3,7

25	-1	-1	-1	1	1	17,3
26	1	-1	-1	1	1	12,7
27	-1	1	-1	1	1	12,9
28	1	1	-1	1	1	13,7
29	-1	-1	1	1	1	12,4
30	1	-1	1	1	1	12,4
31	-1	1	1	1	1	3,8
32	1	1	1	1	1	4

Obr. 57 Namerané hodnoty pre úplný plán experimentu 2^5

Pre čiastočný faktorový experiment so zvoleným generátorom $E = ABCD$, t. j. s definičnou rovnicou $I = ABCDE$, vyberáme z úplného plánu experimentu iba tie merania, pre ktoré platí v pláne experimentu pre súčin úrovní faktorov rovnosť $E = ABCD$. Vzhľadom na dvojúrovňový experiment s jedným vedľajším faktorom E, dostaneme polovičný experiment ($2^{5-1} = \frac{2^5}{2}$). To znamená, že počet bodov, v ktorých bude potrebné realizovať merania, sa redukuje z $2^5 = 32$ meraní na polovicu $2^4 = 16$. Po výbere dostávame (obr. 58):

Design Summary

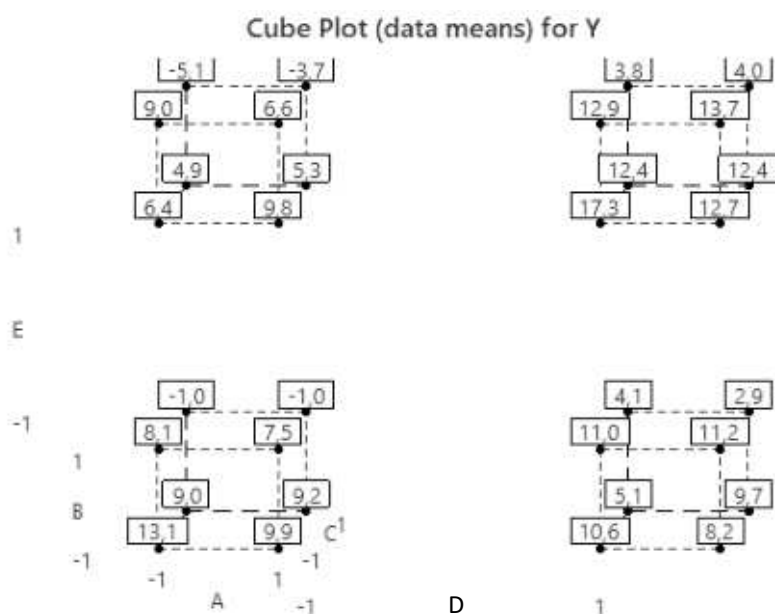
Factors: 5 Base Design: 5; 16 Resolution: V
Runs: 16 Replicates: 1 Fraction: 1/2
Blocks: 1 Center pts (total): 0

Design Generators: E = ABCD

run2	A	B	C	D	E=ABCD	run1	Y
1	-1	-1	-1	-1	1	17	6,4
2	1	-1	-1	-1	-1	2	9,9
3	-1	1	-1	-1	-1	3	8,1
4	1	1	-1	-1	1	20	6,6
5	-1	-1	1	-1	-1	5	9
6	1	-1	1	-1	1	22	5,3
7	-1	1	1	-1	1	23	-5,1
8	1	1	1	-1	-1	8	-1
9	-1	-1	-1	1	-1	9	10,6
10	1	-1	-1	1	1	26	12,7
11	-1	1	-1	1	1	27	12,9
12	1	1	-1	1	-1	12	11,2
13	-1	-1	1	1	1	29	12,4
14	1	-1	1	1	-1	14	9,7
15	-1	1	1	1	-1	15	4,1
16	1	1	1	1	1	32	4

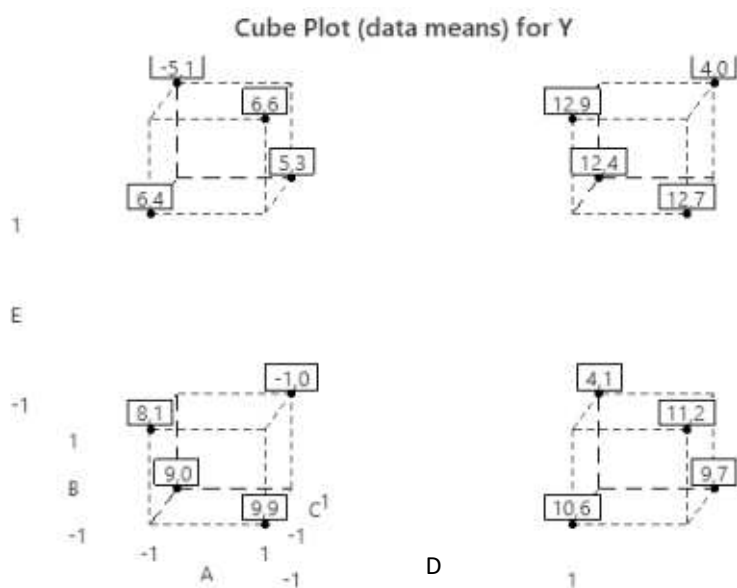
Obr. 58 Výber nameraných hodnôt pre polovičný plán experimentu 2_V^{5-1} so zvoleným generátorom $I = ABCDE$

Porovnanie počtu a rozmiestnenia bodov, v ktorých budeme realizovať merania pre úplný a polovičný plán experimentu pomocou zodpovedajúcich Cplotov z Minitabu, je na nasledujúcich dvoch obrázkoch. Na obr. 59 je 32 bodov úplného faktorového experimentu s nameranými 32 hodnotami odozvy.



Obr. 59 Cplot nameraných hodnôt pre úplný faktorový experiment 2^5

Cplot na obr. 60 ukazuje „rozmiestnenie“ 16 vybraných bodov, v ktorých bolo realizované meranie pri polovičnom faktorovom experimente 2^{5-1}_V s generátorom $E = ABCD$, ktorý jednoznačne určuje, ktoré body merania z úplného experimentu 2^5 ponecháme a ktoré vylúčime.



Obr. 60 Cplot nameraných hodnôt pre polovičný faktorový experiment 2^{5-1}_V

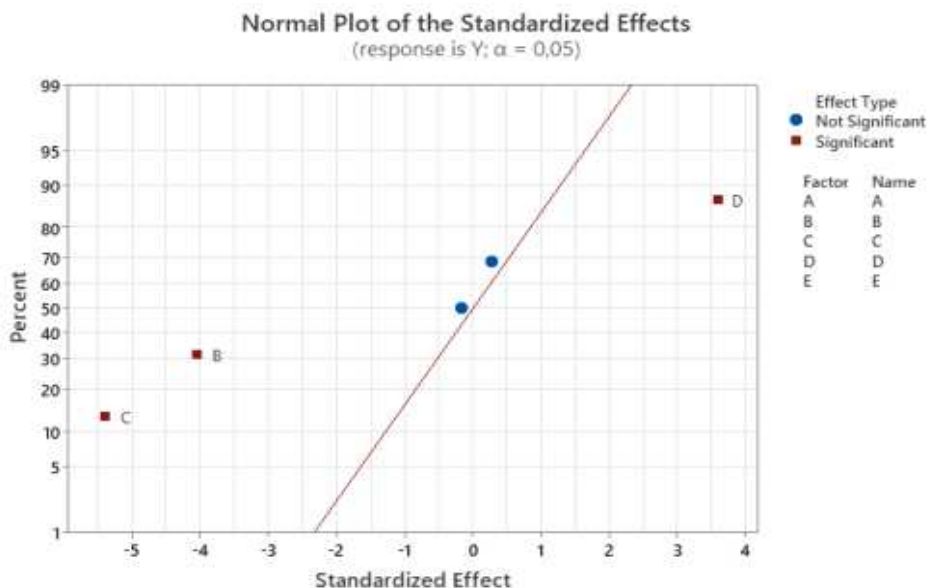
Vyhodnotenie úplného faktorového experimentu

Vzhľadom na zadanie a na fázu skríningu a s tým súvisiacu potrebu zredukovania faktorov, teda vylúčenia faktorov s nevýznamným vplyvom na odozvu Y z ďalšieho skúmania, budeme pri vyhodnocovaní uvažovať iba hlavné efekty faktorov. O interakciách faktorov neuvažujeme. Výsledky analýzy ANOVA sú na obr. 61. Na obr. 62 je normálny pravdepodobnostný graf zobrazujúci zvolené hlavné efekty faktorov A-D. Na obr. 63 je Pareto graf zobrazujúci hlavné efekty faktorov A-D. Zo všetkých výstupov vyplýva, že za signifikantné faktory, ktoré zahrnieme do ďalšieho experimentálneho skúmania, považujeme faktory C, B, D.

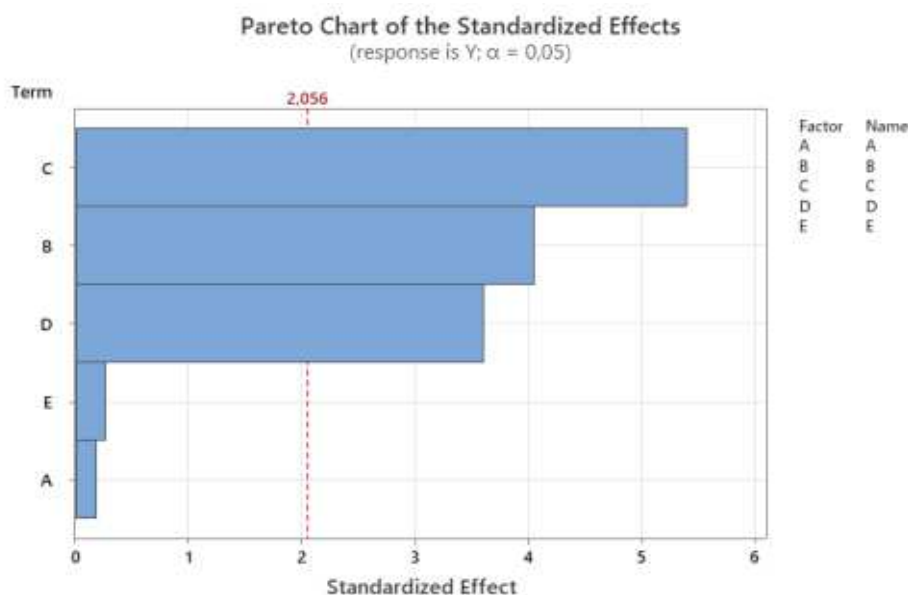
Analysis of Variance

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	5	579,040	115,808	11,70	0,000
Linear	5	579,040	115,808	11,70	0,000
A	1	0,320	0,320	0,03	0,859
B	1	162,000	162,000	16,36	0,000
C	1	288,000	288,000	29,09	0,000
D	1	128,000	128,000	12,93	0,001
E	1	0,720	0,720	0,07	0,790
Error	26	257,440	9,902		
Total	31	836,480			

Obr. 61 Výsledky regresnej analýzy pre úplný faktorový dizajn



Obr. 62 Normálny pravdepodobnostný graf pre štandardizované efekty pre úplný experiment



Obr. 63 Pareto graf pre štandardizované efekty pre úplný experiment

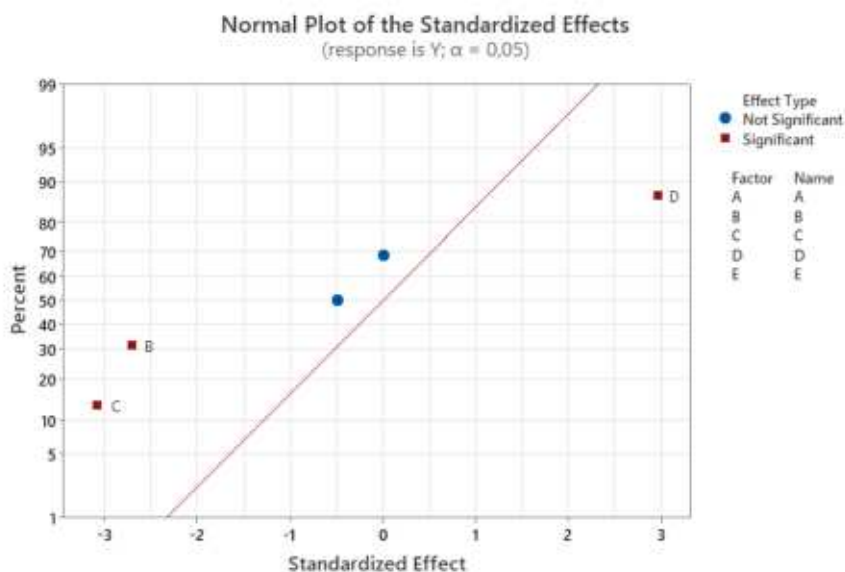
Vyhodnotenie čiastočného (polovičného) faktorového experimentu

Vyhodnotenie pre čiastočný faktorový experiment 2_V^{5-1} je na obr. 64 až 66. Z porovnania výstupov pre úplný a polovičný experiment vyplýva, že pri polovičnom počte meraní, výsledný záver o ponechaní faktorov C, B, D zostáva rovnaký. Realizácie testovacích štatistík a zodpovedajúce p-hodnoty sa samozrejme zmenili, pretože hlavné vplyvy faktorov sú zmiešané (aliasing, confounding) s interakciami 4. rádu. Príspevok týchto interakcií je však nevýznamný, preto závery týkajúce sa vyhodnotenia hlavných efektov faktorov zostávajú nezmenené.

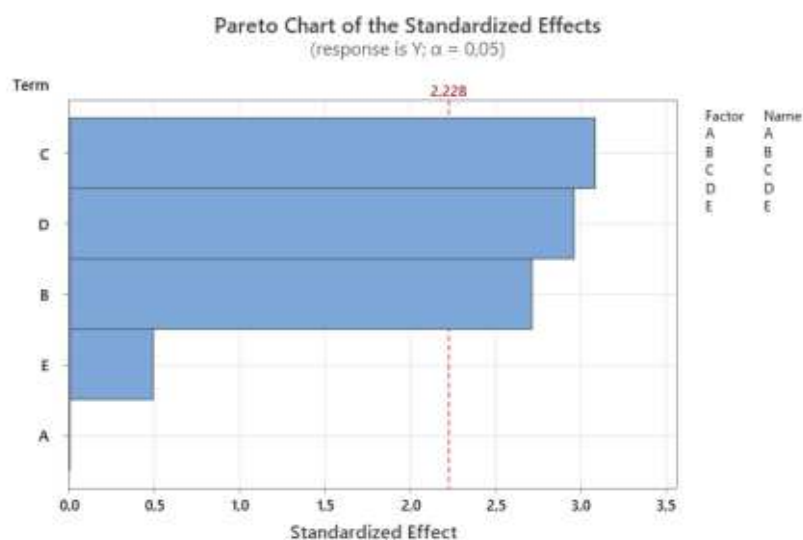
Analysis of Variance

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	5	272,160	54,432	5,15	0,013
Linear	5	272,160	54,432	5,15	0,013
A	1	0,000	0,000	0,00	1,000
B	1	77,440	77,440	7,33	0,022
C	1	100,000	100,000	9,47	0,012
D	1	92,160	92,160	8,73	0,014
E	1	2,560	2,560	0,24	0,633
Error	10	105,600	10,560		
Total	15	377,760			

Obr. 64 Výsledky regresnej analýzy pre polovičný faktorový dizajn



Obr. 65 Normálny pravdepodobnostný graf pre štandardizované efekty pre polovičný experiment



Obr. 66 Pareto graf pre štandardizované efekty pre polovičný experimentu

Poznámka:

Rovnaké výsledky by sme dostali aj pri zvolenej doplnkovej frakcii $E = -ABCD$.

Minitab ponúka pri výbere plánu faktorového experimentu pomocnú tabuľku na vhodné zníženie počtu meraní pri plánovaní a realizácii experimentu vzhľadom na rozlíšenie R, viď obr. 67. Pre 5 faktorov máme pri zostavovaní plánu experimentu na výber úplný faktorový experiment s 32 bodmi merania (runs), polovičný faktorový dizajn s rozlíšením V pri 16 rôznych bodoch merania a štvrtinový faktorový dizajn s rozlíšením III, pri ktorom stačí merania robiť v 8 rôznych bodoch faktorového priestoru. Experiment 2_{III}^{5-2} je podfarbený červenou, pretože je saturovaný, väčšie zníženie nie je možné. Súčasne pri rozlíšení III je nutným

predpokladom, že interakcie sú zanedbateľné, pretože v prípade silných interakcií môže vyhodnotenie viesť k nesprávnym výsledkom. Vzhľadom na to, že sme pri vyhodnocovaní interakcie neuvažovali, bolo by možné použiť štvrtinový plán experimentu, t. j. vyhodnocovať iba 8 špeciálne vybraných nameraných hodnôt.

Create Factorial Design: Display Available Designs

Available Factorial Designs (with Resolution)

Run	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4	Full	III												
8	Full	IV	III	II	II	III								
16	Full	V	IV	IV	IV	IV	III	III	III	III	III	III	III	III
32			Full	VI	IV	IV	IV	IV	IV	IV	IV	IV	IV	IV
64				Full	VII	V	IV	IV	IV	IV	IV	IV	IV	IV
128					Full	VIII	VI	V	V	V	IV	IV	IV	IV

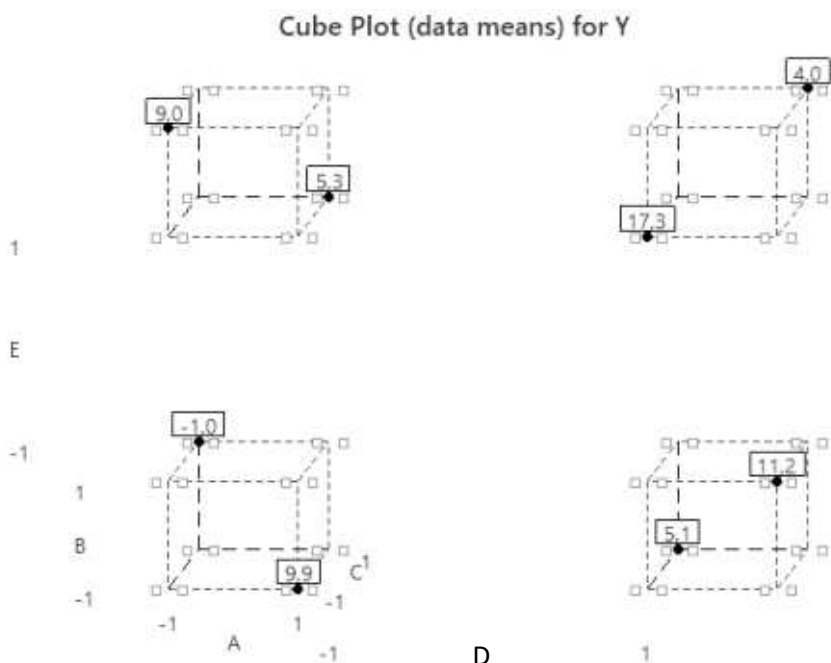
Available Resolution III Plackett-Burman Designs

Factors	Runs	Factors	Runs	Factors	Runs
2-7	12, 20, 24, 28, ..., 48	20-23	24, 28, 32, 36, ..., 48	36-39	40, 44, 48
8-11	12, 20, 24, 28, ..., 48	24-27	28, 32, 36, 40, 44, 48	40-43	44, 48
12-15	20, 24, 28, 36, ..., 48	28-31	32, 36, 40, 44, 48	44-47	48
16-19	20, 24, 28, 32, ..., 48	32-35	36, 40, 44, 48		

Help OK

Obr. 67 Pomocná tabuľka Minitabu pomáha užívateľovi s výberom vhodného plánu experimentu vzhľadom na požadované rozlíšenie R

Osem bodov experimentálneho priestoru, v ktorých by bolo potrebné robiť merania pri experimente 2_{III}^{5-2} s odporúčenými generátormi $D=AB$ a $E=AC$, je zobrazených v Cplote na obr. 68.



Obr. 68 Cplot nameraných hodnôt pre štvrtinový faktorový experiment 2_{III}^{5-2}

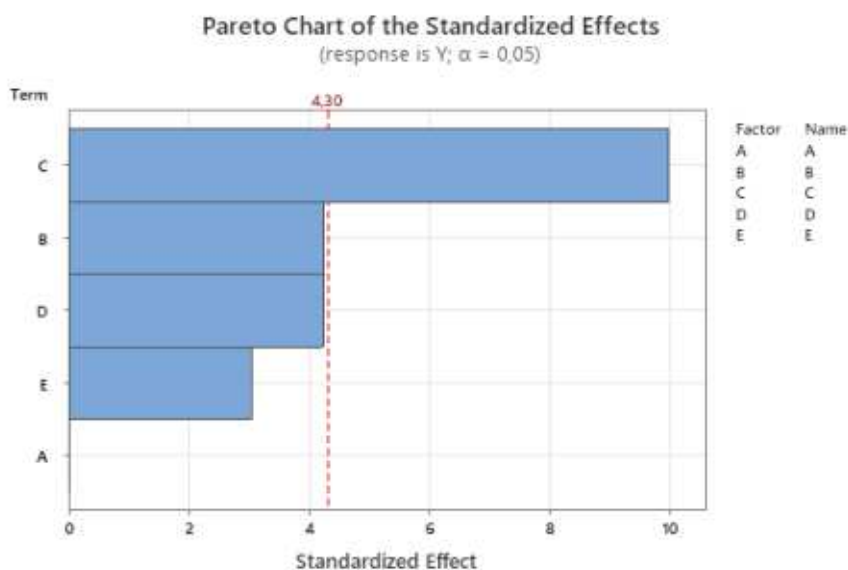
Pri vyhodnocovaní štatistickej významnosti sa vypočítané p-hodnoty pre faktory B a D dostali blízko hraničnej hodnoty 0,05, obr. 69.

Analysis of Variance

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	5	209,860	41,972	28,95	0,034
Linear	5	209,860	41,972	28,95	0,034
A	1	0,000	0,000	0,00	1,000
B	1	25,920	25,920	17,88	0,052 !
C	1	144,500	144,500	99,66	0,010
D	1	25,920	25,920	17,88	0,052 !
E	1	13,520	13,520	9,32	0,093
Error	2	2,900	1,450		
Total	7	212,760			

Obr. 69 Výsledky regresnej analýzy pre štvrtinový faktorový dizajn

S týmto výsledkom korešponduje Pareto graf štandardizovaných efektov pre 2_{III}^{5-2} na obr.70. Vzhľadom na hraničné hodnoty by sme faktory B a D ponechali v ďalšej fáze experimentov, t. j. z ďalšieho skúmania by sme ich nevylúčili.



Obr. 70 Pareto graf pre štandardizované efekty pre štvrtinový experiment

Vyhodnotenie faktorového experimentu s uvažovanými interakciami faktorov

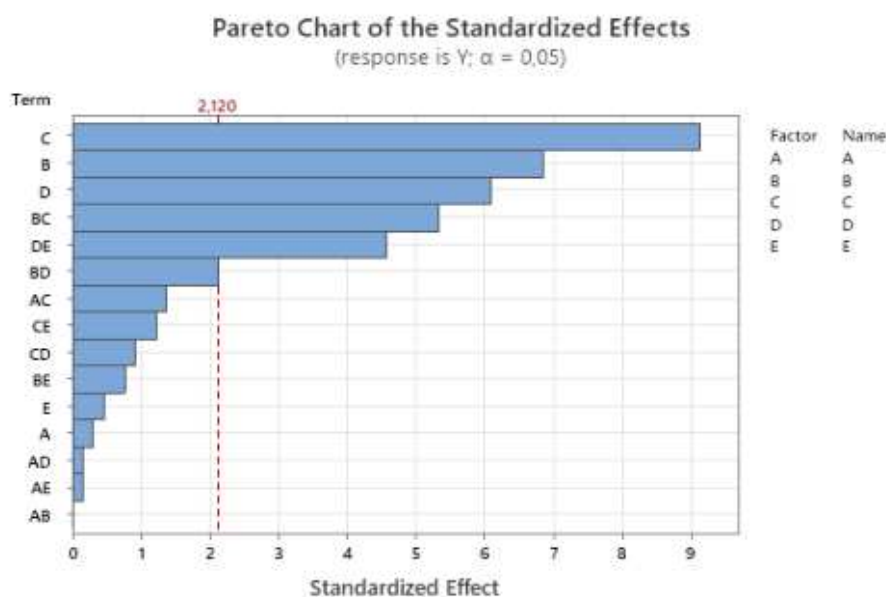
Ak by sme pri vyhodnocovaní experimentu 2_V^{5-1} uvažovali okrem hlavných efektov aj o interakciách medzi dvoma faktormi, čo nám rozlíšenie V umožňuje, potom získavame nasledujúce výsledky. Na obr. 71 sú výsledky ANOVY pre úplný faktorový experiment 2^5 . Porovnaním p-hodnôt možno prijať tvrdenie, že faktory B, C, D majú signifikantný vplyv

na odozvu. Z interakcií budú mať na odozvu štatisticky významný vplyv interakcie faktorov B a C, faktorov D a E. Interakcia faktorov B a D má p-hodnotu 0,049 veľmi blízku 0,05. Podľa Pareto grafu na obr. 72 štandardizovaný efekt tejto interakcie dosiahol kritickú hodnotu 2,120. Vzhľadom na úvodnú fázu skúmania, by sme interakciu BD ponechali ako štatisticky významnú.

Analysis of Variance

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	15	781,360	52,091	15,12	0,000
Linear	5	579,040	115,808	33,62	0,000
A	1	0,320	0,320	0,09	0,764
B	1	162,000	162,000	47,02	0,000
C	1	288,000	288,000	83,60	0,000
D	1	128,000	128,000	37,16	0,000
E	1	0,720	0,720	0,21	0,654
2-Way Interactions	10	202,320	20,232	5,87	0,001
A*B	1	0,000	0,000	0,00	1,000
A*C	1	6,480	6,480	1,88	0,189
A*D	1	0,080	0,080	0,02	0,881
A*E	1	0,080	0,080	0,02	0,881
B*C	1	98,000	98,000	28,45	0,000
B*D	1	15,680	15,680	4,55	0,049
B*E	1	2,000	2,000	0,58	0,457
C*D	1	2,880	2,880	0,84	0,374
C*E	1	5,120	5,120	1,49	0,240
D*E	1	72,000	72,000	20,90	0,000
Error	16	55,120	3,445		
Total	31	836,480			

Obr. 71 Výsledky regresnej analýzy pre úplný faktorový dizajn po pridaní interakcií 2. rádu



Obr. 72 Pareto graf pre štandardizované efekty pre úplný faktorový dizajn

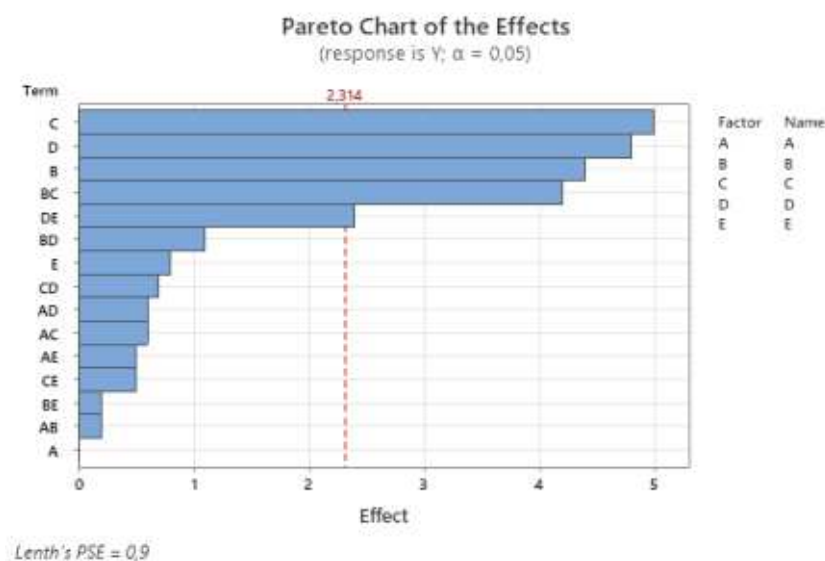
Štatistické vyhodnotenie experimentu typu 2_V^{5-1} nie je možné. Počet meraní bez replikácií pre 16 meraní s uvažovanými interakciami medzi dvojicami faktorov neumožňuje výpočet stupňov voľnosti df pre experimentálnu chybu Error, vid' obr. 73.

Analysis of Variance

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	15	377,760	25,184	*	*
Linear	5	272,160	54,432	*	*
A	1	0,000	0,000	*	*
B	1	77,440	77,440	*	*
C	1	100,000	100,000	*	*
D	1	92,160	92,160	*	*
E	1	2,560	2,560	*	*
2-Way Interactions	10	105,600	10,560	*	*
A*B	1	0,160	0,160	*	*
A*C	1	1,440	1,440	*	*
A*D	1	1,440	1,440	*	*
A*E	1	1,000	1,000	*	*
B*C	1	70,560	70,560	*	*
B*D	1	4,840	4,840	*	*
B*E	1	0,160	0,160	*	*
C*D	1	1,960	1,960	*	*
C*E	1	1,000	1,000	*	*
D*E	1	23,040	23,040	*	*
Error	0	!	*		
Total	15	377,760			

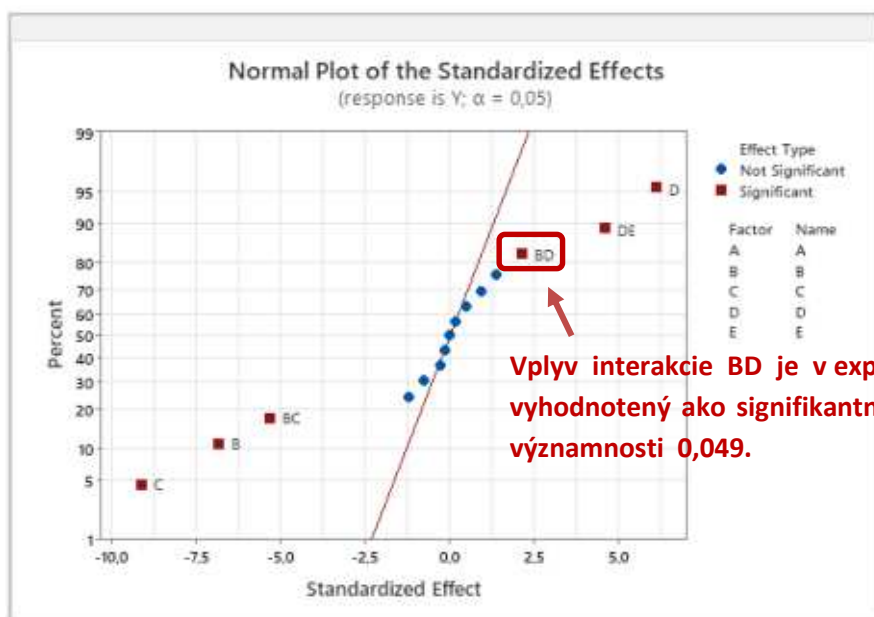
Obr. 73 Výsledky regresnej analýzy pre polovičný faktorový dizajn po pridaní interakcií 2. rádu

Pareto graf efektov na obr. 74 pomocou Lentzovej pseudoštandardnej chyby umožňuje výpočet kritickej hodnoty, s ktorou porovnávame veľkosti vypočítaných efektov pri experimentoch bez replikácií. V tomto prípade sa interakcia BD javí ako nevýznamná. Ostatné výsledky sú rovnaké ako pri vyhodnotení úplného faktorového experimentu s 32 nameranými hodnotami.

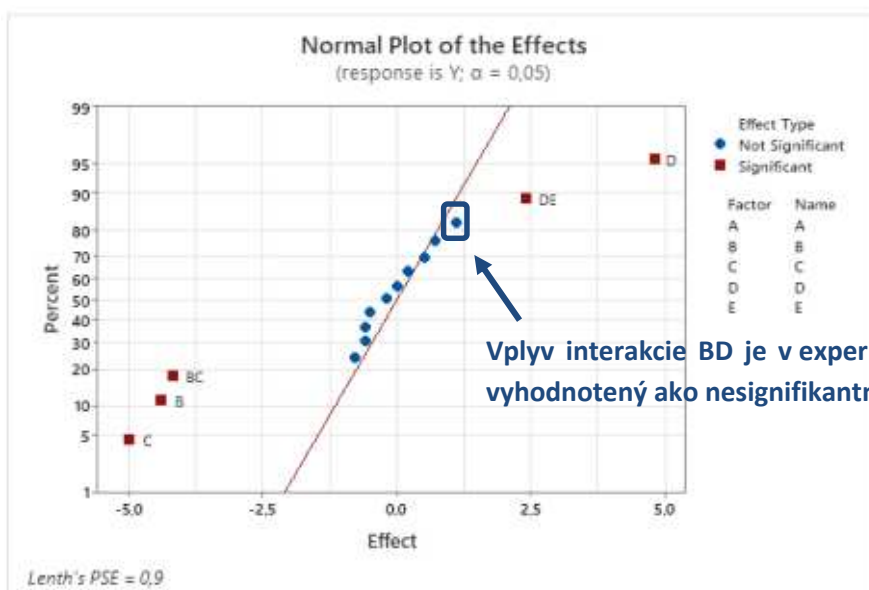


Obr. 74 Pareto graf efektov pre polovičný faktorový dizajn

Obr. 75 a 76 porovnávajú normálny pravdepodobnostný graf pre úplný a polovičný plán experimentu riešeného príkladu. Interakcia BD, ktorá sa v prípade úplného faktorového experimentu nachádza v blízkosti hraničných hodnôt (p-hodnota bola blízka 0,05), je na obr. 75 dostatočne vzdialená od referenčnej čiary, aby bol jej vplyv vyhodnotený ako signifikantný. V prípade použitia polovičného plánu experimentu sa v dôsledku premiešania vplyvov s inými interakciami, hodnota efektu priblíži k tejto čiare a je vyhodnotená ako nevýznamná, obr. 76. Všetky ostatné výsledky sú zhodné. Dôležité je uvedomiť si, že na získanie „rovnakých“ výsledkov postačovala polovica nameraných hodnôt.



Obr. 75 Normálny pravdepodobnostný graf pre štandardizované efekty

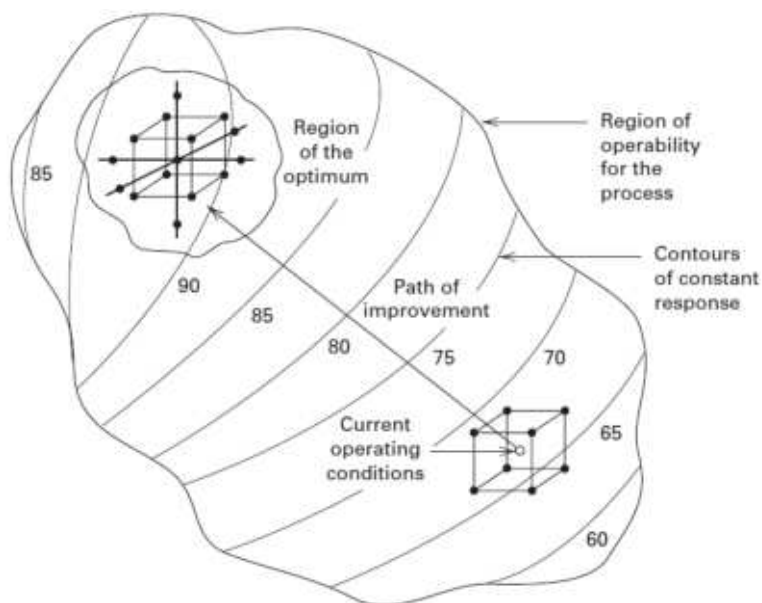


Obr. 76 Normálny pravdepodobnostný graf pre efekty

7 METÓDA ODOZVOVEJ PLOCHY (RESPONSE SURFACE METHOD AND DESIGN)

Metóda odozvovej plochy (RSM) je súbor matematických a štatistických techník užitočných pre modelovanie a analýzu problémov, v ktorých je odozva ovplyvnená viacerými premennými (faktormi) s cieľom optimalizovať túto odozvu. Ak je vo všeobecnosti odozva $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \varepsilon$, kde ε predstavuje šum alebo chybu pozorovanú v odozve y , potom plocha reprezentovaná funkciou $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sa nazýva povrch odozvy (odozвовá plocha). Analýzou odozvovej plochy hľadáme také nastavenie faktorov, kde táto plocha má maximum alebo minimum. Ak odozвовá plocha vzhľadom na zvolenú experimentálnu oblasť optimum neobsahuje, potom analýzou danej plochy hľadáme smer, ktorým máme zmeniť nastavenie faktorov, aby sme optimálne nastavenie našli. RSM je vo všeobecnosti sekvenčným postupom. Častokrát, keď sme v bode na povrchu odozvy, ktorý je natoľko vzdialený od optima (napr. to môžu byť aktuálne prevádzkové podmienky), že v systéme je malé zakrivenie, potom model prvého rádu (lineárny alebo lineárneho typu) je vhodný. Cieľom RSM je viesť experimentátora rýchlo a efektívne po ceste zlepšovania smerom k všeobecnej blízkosti optima. Keď sa nájde oblasť optima, následne je vhodné použiť prepracovanejší model, napr. model druhého rádu (úplný kvadratický model) a jeho analýzou nájsť optimum.

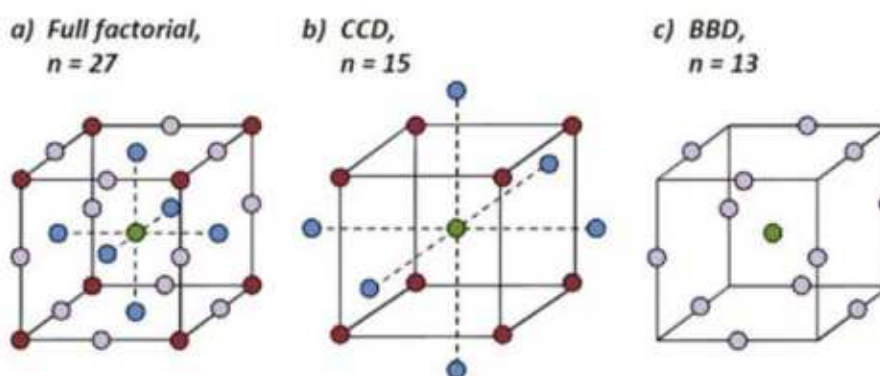
Z obr. 77 vidíme, že analýzu odozvovej plochy možno považovať „lezenie na kopec“, kde vrchol kopca predstavuje bod maximálnej odozvy. Ak je skutočným optimom bod minimálnej odozvy, potom môžeme myslieť na „zostup do údolia“.



Obr. 77 Sekvenčný prístup RSM na hľadanie optima [9]

Výstupom metódy RSM býva odozgová plocha, resp. hyperplocha, pomocou ktorej hľadáme optimum. Používame kvadratické modely, preto sú pri ich návrhu potrebné najmenej tri úrovne každého faktora. Vzhľadom na to, že trojúrovňové experimenty bývajú neefektívne, do týchto plánov bývajú zaradené aj axiálne body. Medzi plány odzvovej plochy (Response surface design RSD) umožňujúce zachytiť kvadratické zakrivenie patria, obr. 78:

- a) trojúrovňový plán (Three level design) – je neefektívny;
- b) kombinovaný plán (Composite design);
- c) box-Behnkenov plán (BBD).



Obr. 78 Vybrané centrálné kompozitné plány pre 3 faktory – CCF, CCC, BBD [19]

Pri týchto typoch experimentov používame úplný kvadratický model, pričom jeho potrebu použitia overujeme:

- testom krivosti;
- testom Lack of Fit;
- pomocou ANOVY.

Koeficienty úplného kvadratického modelu nie sú polovicou efektov, ako to bolo pri lineárnom a neúplnom kvadratickom modeli.

Poznámka:

1. Optimálne hodnoty významných parametrov pre úplný kvadratický model hľadáme v stacionárnych bodoch (viac vid' kap. 7.3).
2. U lineárnych modelov hovoríme o optimálnej úrovni faktora (dolnej alebo hornej) – extrémny nemá, pretože grafom je rovina, resp. nadrovina.
3. Centrálny kompozitný dizajn (CCD) je považovaný za najpresnejší a Box-Behnkenov dizajn (BBD) je efektívnejší z pohľadu času a nákladov. Oba patria v praxi pre svoju praktickosť medzi najviac používané.

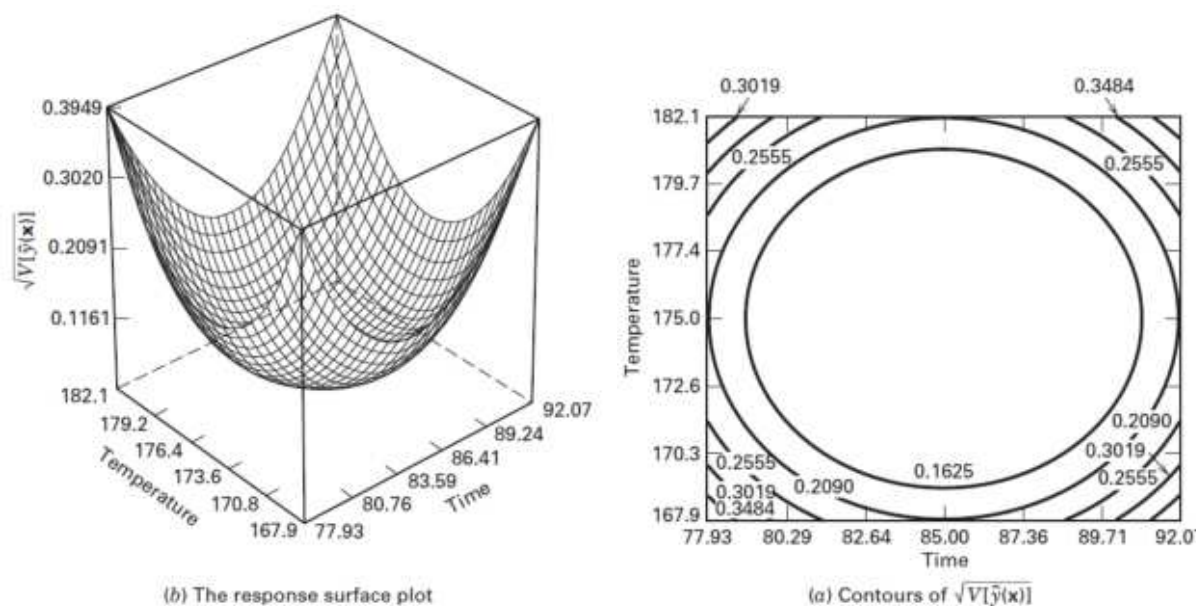
4. RSD sú najúčinnnejšie pre menej ako 5 faktorov. Minitab ponúka výber počtu spojitých faktorov pre CCD z intervalu 2 až 10, pre BBD z intervalu 3 až 10. Súčasne možno oba typy experimentov rozšíriť o 0 až 10 kategorických faktorov.

7.1 CENTRÁLNY KOMPOZITNÝ PLÁN (CENTRAL COMPOSITE DESIGN CCD)

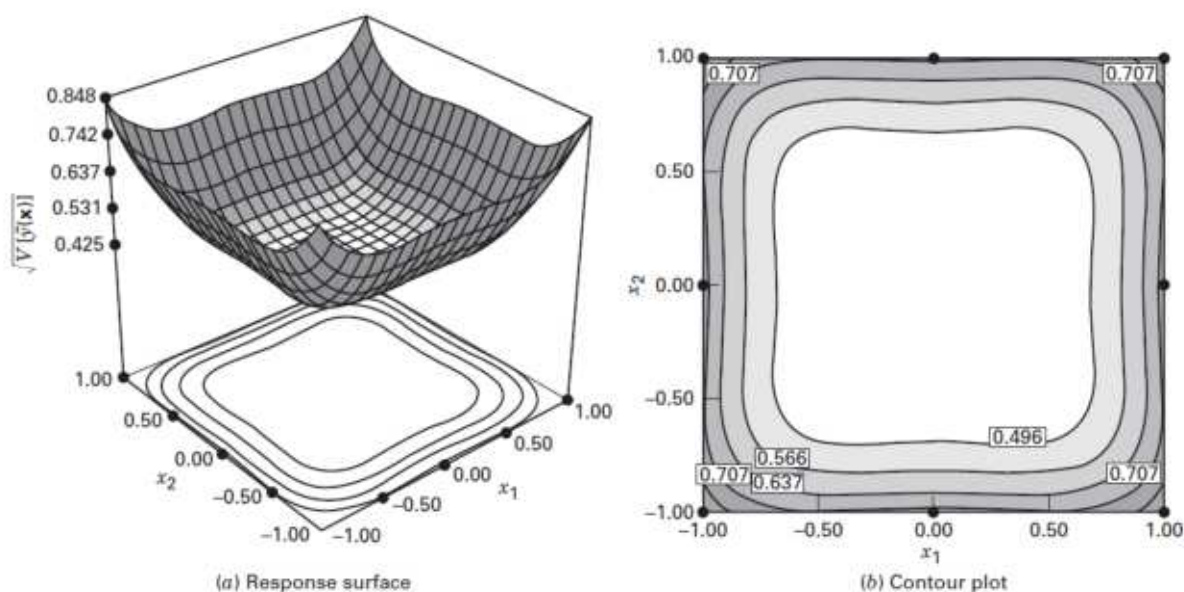
Centrálny kompozitný plán (CCD) je päťúrovňovým čiastočným faktorovým dizajnom. Vyvinuli ho Box a Wilson [19]. Plán dizajnu obvykle pozostáva z 2^k bodov úplného faktorového dizajnu pre k faktorov a $2k$ axiálnych bodov a n_c replikácií v centrálnom bode. Celkový počet meraní (runs) je $N = 2^k + 2k + n_c$. Replikácie v centrálnom bode sú potrebné na odhad variability experimentálnych meraní, ktorú potrebujeme pri testoch vhodnosti alebo zakrivenia modelu – bývajú počítané vzhľadom na dostatočnú silu testov.

Centrálny kompozitný plán je zväčša experimentom, ktorý realizujeme v dvoch etapách. V prvej fáze sa robia merania vo faktorových (vrcholových) bodoch a v centrálnom bode. V druhej fáze sa po vyhodnotení štatistickej významnosti krivosti k pôvodným meraniam pridávajú merania v axiálnych (hviezdicových) bodoch. Na obr. 81 sú tri druhy centrálnych kompozitných plánov pre dva faktory, ktoré sa odlišujú umiestnením axiálnych bodov v rámci experimentálneho priestoru. Pri opísanom centrálnom kompozitnom pláne (Circumscribed Design – CCC alebo CCD) axiálne body určíme ako priesečníky opísanej kružnice so stredom v centrálnom bode a s polomerom $\alpha = \sqrt[4]{\text{počet faktorových bodov}}$ (pri 3 faktoroch guľovej plochy, ...) a súradnicových osí vyčnievajúcich z pôvodného experimentálneho priestoru. Výhoda tohto typu experimentu je v tom, že splnená rotabilita plánu – presnosť predikcie je rovnaká vo všetkých smeroch, t. j. vo všetkých bodoch, ktoré sú rovnako vzdialené od stredu experimentálneho priestoru.

V prípade, že zväčšenie rozsahu experimentálneho priestoru robí problémy pri realizácii merania, tak volíme centrálny kompozitný plán s axiálnymi bodmi v strede každej steny (Face Centered Design – CCF). V niektorej literatúre a softvéroch býva označovaný aj ako experiment FCD. Nevýhodou tohto typu experimentu je, že predikcia vo všetkých smeroch od centrálného bodu kompozitného plánu nie je rovnaká. Porovnanie možno vidieť na obr. 79 a 80. Vrstevnice konštantnej štandardnej odchýlky predpokladanej odozvy pre CCD na obr. 79 sú sústredné kruhy. Pre FCD na obr. 80 je symetria vzhľadom na stred porušená.

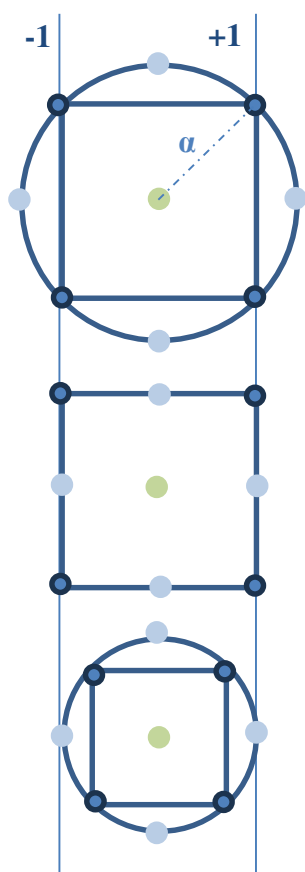


Obr. 79 Smerodajná odchýlka predikovanej odozvy je pre rotabilný CCD konštantná vzhľadom na vzdialenosť od stredu [9]



Obr. 80 Smerodajnej odchýlka predikovanej odozvy pre FCD sa mení [9]

Tretím druhom centrálného kompozitného plánu je vpísaný kompozitný plán (Inscribed Design - CCI), kedy sú pôvodné hraničné body jednotlivých faktorov vyjadrené ako axiálne body, t. j. axiálne body ležiace na opísanej kružnici (guľovej ploche...) nevyčnievajú z pôvodne uvažovaného experimentálneho priestoru. Na obr. 81 sú zobrazené všetky tri návrhy centrálného kompozitného plánu pre 2 faktory. Najčastejšie sú používané prvé dva typy dizajnov CCD a FCD, pričom oba sú výborné pri hľadaní optimálneho riešenia.



Opísaný – otočný (rotovateľný) centrálny kompozitný plán (Circumscribed Design – označovaný CCC alebo CCD)

Centrálny kompozitný plán s bodmi v strede stien – plošne centrováný centrálny kompozitný plán (Face Centered Design – CCF – niekedy označovaný ako FCD)

Vpísaný centrálny kompozitný plán (Inscribed Design - CCI)

Obr. 81 Tri typy centrálnych kompozitných plánov pre 2 faktory [19]

Minitab ponúka prehľad počtu požadovaných realizácií meraní vzhľadom na zvolený počet (spojitých) faktorov, typ dostupných RSD a blokovanie, vid' obr. 82. Experimenty môžu byť úplné aj čiastočné až po stupeň zníženia $p = 3$.

Create Response Surface Design: Display Available Designs										
Available Response Surface Designs										
Design		Continuous Factors								
		2	3	4	5	6	7	8	9	10
Central composite full	unblocked	13	20	31	52	90	152			
	blocked	14	20	30	54	90	160			
Central composite half	unblocked				32	53	88	154		
	blocked				33	54	90	160		
Central composite quarter	unblocked							90	156	
	blocked							90	160	
Central composite eighth	unblocked									158
	blocked									160
Box-Behnken	unblocked		15	27	46	54	62		130	170
	blocked			27	46	54	62		130	170

Obr. 82 Pomocná tabuľka Minitabu s počtami bodov experimentu vzhľadom na počet uvažovaných faktorov v experimente a typ dizajnu odozvovej plochy (RSD)

Na obr. 83 a 84 je porovnanie dvoch CCD pre 2 faktory bez replikácií vzhľadom na zvolené alebo nezvolené blokovanie. Ak dokážeme experiment zrealizovať za rovnakých podmienok bez prerušenia, volíme experiment bez blokov. Vtedy postačuje celkový počet 13 meraní, pričom $2^2 = 4$ merania robíme vo faktoriálnych bodoch, $2 \cdot 2 = 4$ merania v axiálnych bodoch a plán experimentu je doplnený o požadovaných 5 replikácií v centrálnom bode. Na obr. 83 vidíme výstup Minitabu v podobe plánu experimentu s jeho charakteristikami. Typ bodov je označený 1 pre faktorové body, -1 je označenie pre axiálne body a 0 označuje centrálny bod. Všetky merania sú naplánované v 1 bloku, označenom v stĺpci Blok 1.

Design Summary

Factors: 2 Replicates: 1
Base runs: 13 Total runs: 13
Base blocks: 1 Total blocks: 1

$\alpha = 1,41421$

Two-level factorial: Full factorial

Point Types

Cube points: 4
Center points in cube: 5
Axial points: 4
Center points in axial: 0

Všetky merania budú urobené v 1 bloku – sú označené 1.

RunOrder	PtType	Blocks	A	B
1	1	1	-1,00000	-1,00000
2	1	1	1,00000	-1,00000
3	1	1	-1,00000	1,00000
4	1	1	1,00000	1,00000
5	-1	1	-1,41421	0,00000
6	-1	1	1,41421	0,00000
7	-1	1	0,00000	-1,41421
8	-1	1	0,00000	1,41421
9	0	1	0,00000	0,00000
10	0	1	0,00000	0,00000
11	0	1	0,00000	0,00000
12	0	1	0,00000	0,00000
13	0	1	0,00000	0,00000

Faktorové body sú bez replikácií.

Axiálne body sú bez replikácií.

Meranie v centrálnom bode sa vzťahuje na faktorové body a má 5 replikácií.

Obr. 83 Nerandomizovaný CCD pre 2 faktory bez blokov

Poznámka:

1. Hodnota α pre rotovateľný opísaný CCD pre 2 faktory počítaná podľa vzťahu $\alpha = \sqrt[4]{4}$.
2. Pri randomizácii sa zvyknú merania v centrálnom bode rozptýliť, aby boli rovnomerne rozptýlené v priebehu merania, t. j. tak, aby dokázali zachytiť systematickú chybu.
3. Počet replikácií v centrálnom bode býva preddefinovaný, ale je možné ho zmeniť.

Na obr. 84 je CCD pre 2 faktory bez replikácií pri zvolenom blokovaní. Ak nedokážeme zabezpečiť realizáciu experimentu v rovnakých podmienok a bez prerušenia, potom volíme experiment s blokmi. Preddefinovaný celkový počet meraní je 14, pričom $2^2 = 4$ merania robíme vo faktoriálnych bodoch, $2 \cdot 2 = 4$ merania v axiálnych bodoch a plán experimentu je doplnený o 3 replikácie v centrálnom bode vzhľadom na faktoriálne body a 3 replikácie v centrálnom bode vzhľadom na axiálne body. Typ bodov vo výstupe Minitabu v stĺpci PtType je označený 1 pre faktorové body, -1 je označenie pre axiálne body a 0 označuje centrálny bod. Bloky v stĺpci Bloks sú označené 1 a 2.

Design Summary

Factors: 2 Replicates: 1
 Base runs: 14 Total runs: 14
 Base blocks: 2 Total blocks: 2

$\alpha = 1,41421$

Two-level factorial: Full factorial

Point Types

Cube points: 4
 Center points in cube: 3
 Axial points: 4
 Center points in axial: 3

Všetky merania sú rozdelené do 2 blokov – sú označené 1 a 2.

RunOrder	PtType	Bloks	A	B
1	1	1	-1,00000	-1,00000
2	1	1	1,00000	-1,00000
3	1	1	-1,00000	1,00000
4	1	1	1,00000	1,00000
5	0	1	0,00000	0,00000
6	0	1	0,00000	0,00000
7	0	1	0,00000	0,00000
8	-1	2	-1,41421	0,00000
9	-1	2	1,41421	0,00000
10	-1	2	0,00000	-1,41421
11	-1	2	0,00000	1,41421
12	0	2	0,00000	0,00000
13	0	2	0,00000	0,00000
14	0	2	0,00000	0,00000

4 faktorové body

Centrálny bod vzhľadom na faktorové body.

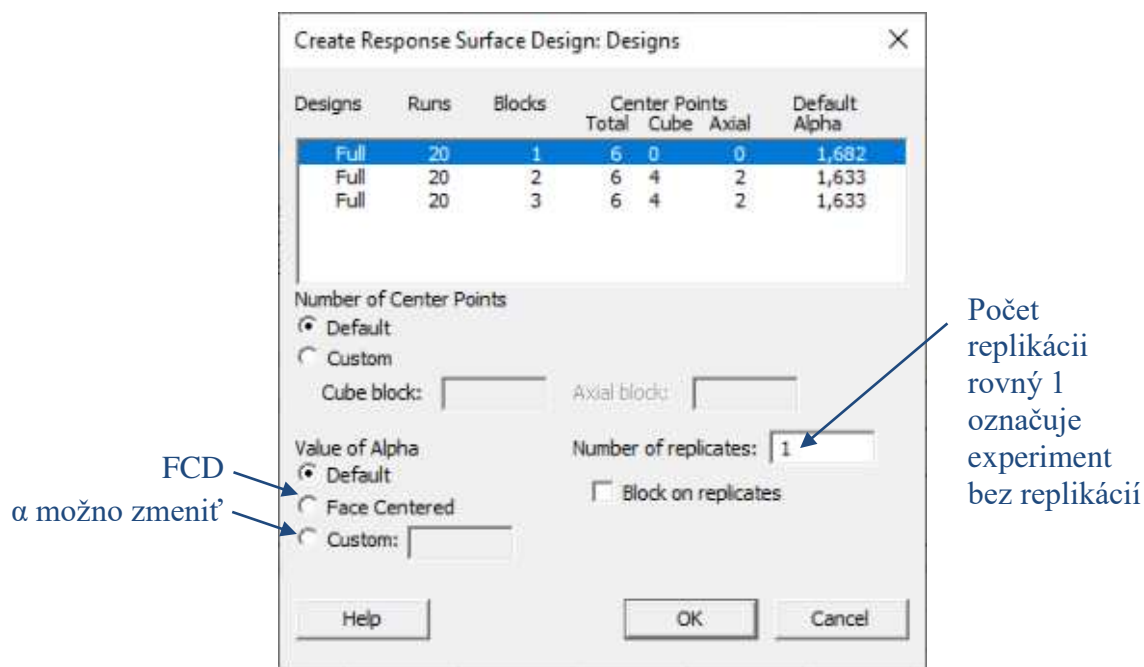
4 axiálne body

Centrálny bod vzhľadom na axiálne body.

Spolu replikácií v centrálnom bode.

Obr. 84 Nerandomizovaný CCD pre 2 faktory s dvomi blokmi

Minitab má pre Centrálny kompozitný plán pre 3 faktory preddefinovaných 20 meraní, obr. 85. Užívateľ má možnosť výberu z plánu s jedným, dvoma a tromi blokmi. Ak má byť opísaný CCD rotabilný, potom $\alpha = \sqrt[4]{8}$.



Obr. 85 Ponuka Minitabu pre rotabilný CCD dizajn pre 3 faktory

Po výbere opísaného otočného CCD s tromi faktormi pri výbere merania v jednom bloku s preddefinovanými počtami replikácií v centrálnych bodoch a preddefinovanou hodnotou $\alpha = \sqrt[4]{8}$ dostávame výstup s charakteristikami daného plánu experimentu spolu s výpisom plánu experimentu, ktorý bude mať $2^3 = 8$ faktoriálnych bodov, $2 \cdot 3 = 6$ axiálnych bodov a 6 replikácií v centrálnom bode, obr. 86.

Design Summary			
Factors:	3	Replicates:	1
Base runs:	20	Total runs:	20
Base blocks:	1	Total blocks:	1
$\alpha = 1,68179$			
Two-level factorial: Full factorial			
Point Types			
Cube points:			8
Center points in cube:			6
Axial points:			6
Center points in axial:			0

Obr. 86 Charakteristiky rotabilného opísaného CCD pre 3 faktory

Na obr. 87 je výstup Minitabu, ktorý ponúka zvolený plán experimentu CCD pre tri faktory. Typ experimentálnych bodov je v stĺpci PtType, pričom značenie je rovnaké, ako bolo opísané v predchádzajúcej časti. Bloky v stĺpci Bloks sú označené 1, pretože nebolo zvolené blokovanie.

RunOrder	PtType	Blocks	A	B	C
1	1	1	-1,00000	-1,00000	-1,00000
2	1	1	1,00000	-1,00000	-1,00000
3	1	1	-1,00000	1,00000	-1,00000
4	1	1	1,00000	1,00000	-1,00000
5	1	1	-1,00000	-1,00000	1,00000
6	1	1	1,00000	-1,00000	1,00000
7	1	1	-1,00000	1,00000	1,00000
8	1	1	1,00000	1,00000	1,00000
9	-1	1	-1,68179	0,00000	0,00000
10	-1	1	1,68179	0,00000	0,00000
11	-1	1	0,00000	-1,68179	0,00000
12	-1	1	0,00000	1,68179	0,00000
13	-1	1	0,00000	0,00000	-1,68179
14	-1	1	0,00000	0,00000	1,68179
15	0	1	0,00000	0,00000	0,00000
16	0	1	0,00000	0,00000	0,00000
17	0	1	0,00000	0,00000	0,00000
18	0	1	0,00000	0,00000	0,00000
19	0	1	0,00000	0,00000	0,00000
20	0	1	0,00000	0,00000	0,00000

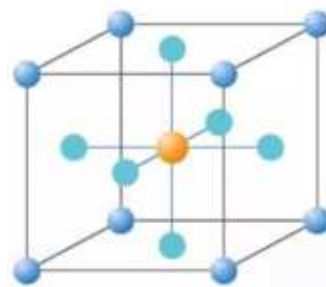
8 faktorových bodov

6 axiálnych bodov

6 replikácii v centrálnom bode

Obr. 87 Nerandomizovaný CCD pre 3 faktory bez blokov

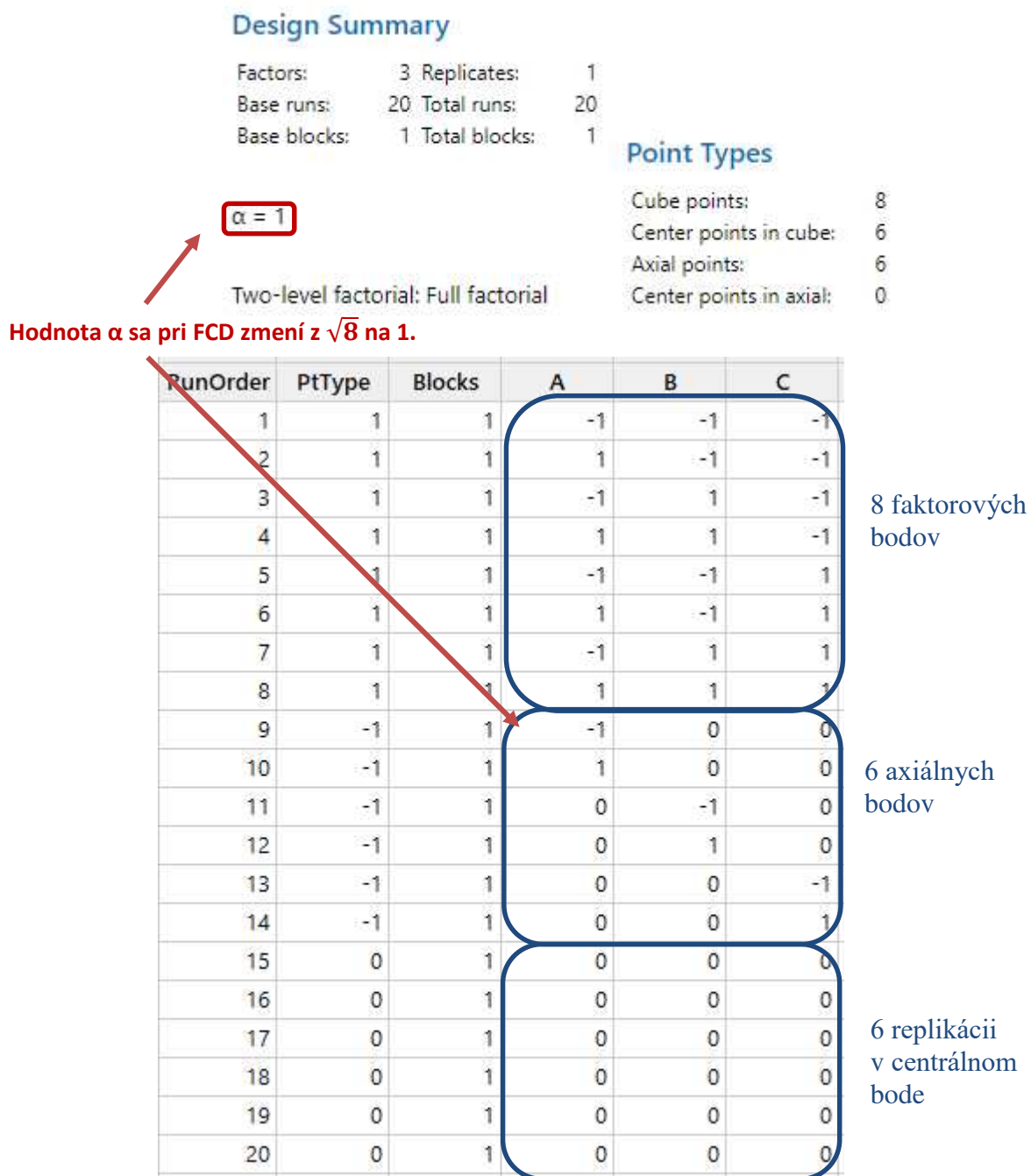
Pri výbere centrálného kompozitného plánu s bodmi v strede stien, t. j. plošne centrovaného centrálného kompozitného plánu FCD, vid' obr. 88, sú axiálne body v prípade zvolených troch kvantitatívnych faktorov umiestnené v stredoch stien kocky.



Obr. 88 FCD pre tri faktory [28]

Výstup Minitabu s charakteristikami a plánom experimentu FCD pre tri faktory je zobrazený na obr. 89. V počte bodov experimentálneho priestoru, v ktorých budeme realizovať merania, sa nič nezmení. Preddefinovaný počet je 20. Zmenia sa iba súradnice axiálnych bodov,

ktoré nebudú „vyčnievať“ von z experimentálneho priestoru, keďže $\alpha = 1$. Každý faktor bude meraný na troch úrovniach. Výsledný dizajn nie je otočný (rotabilný).



Obr. 89 Nerandomizovaný FCD pre 3 faktory

7.2 BOX – BEHNKENOV DIZAJN (BOX-BEHNKEN DESIGN)

Box-Behnkenov dizajn (BBD) patrí medzi experimenty odozvovej plochy merané na troch úrovniach. Minitab umožňuje návrh plánu experimentu a štatistickú analýzu nameraných hodnôt pre 3 až 10 faktorov. Výstup Minitabu s charakteristikami a plánom experimentu BBD pre tri faktory je zobrazený na obr. 89. Rozloženie bodov, v ktorých budeme realizovať merania v experimentálnom priestore pri tomto type experimentu pre tri faktory, je možné vidieť na obr. 78 c).

Design Summary

Factors: 3 Replicates: 1
 Base runs: 15 Total runs: 15
 Base blocks: 1 Total blocks: 1

Center points: 3

Typ bodov, ktoré ležia na hranách kocky, je označený 2.

Všetky merania budú urobené v jednom bloku.

RunOrder	PtType	Blocks	A	B	C
1	2	1	-1	-1	0
2	2	1	1	-1	0
3	2	1	-1	1	0
4	2	1	1	1	0
5	2	1	-1	0	-1
6	2	1	1	0	-1
7	2	1	-1	0	1
8	2	1	1	0	1
9	2	1	0	-1	-1
10	2	1	0	1	-1
11	2	1	0	-1	1
12	2	1	0	1	1
13	0	1	0	0	0
14	0	1	0	0	0
15	0	1	0	0	0

12 bodov, ktoré sa nachádzajú na (všetkých) hranách kocky

3 replikácie v centrálnom bode

Obr. 90 Nerandomizovaný BBD pre 3 faktory

Poznámka:

Hlavné výhody použitia BBD – sú to úsporné experimenty, pri ktorých minimalizujeme náklady na realizáciu experimentu. Používajú sa vtedy, keď nie je možné nastaviť kombinácie viacerých extrémnych úrovní faktorov. Medzi hlavné nevýhody návrhov BBD patrí, že majú nižšiu presnosť.

7.3 ÚPLNÝ KVADRATICKÝ MODEL PRE DVA FAKTORY – VÝPOČET OPTIMÁLNEHO RIEŠENIA

Popíšeme postup, ktorým hľadáme extrém pre regresný model s predpisom:

$$y_t = f_t(t_1, t_2) = b_0 + b_1 t_1 + b_2 t_2 + b_{11} t_1^2 + b_{22} t_2^2 + b_{12} t_1 t_2$$

Extrémy hľadáme v stacionárnych bodoch. Pre stacionárny bod platí:

$$\frac{\partial y_t}{\partial t_1} = b_1 + 2b_{11}t_1 + b_{12}t_2 = 0$$

$$\frac{\partial y_t}{\partial t_2} = b_2 + 2b_{22}t_2 + b_{12}t_1 = 0$$

$$2b_{11}t_1 + b_{12}t_2 = -b_1$$

$$2b_{22}t_2 + b_{12}t_1 = -b_2$$

$$\begin{pmatrix} 2b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & 2b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$2 \begin{pmatrix} b_{11} & \frac{b_{12}}{2} \\ \frac{b_{12}}{2} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Súradnice stacionárneho bodu nájdeme riešením maticovej rovnice

$$2 \cdot B \cdot x_t = -b \Rightarrow x_t = -\frac{1}{2} B^{-1} b,$$

pričom bolo použité maticové značenie

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \frac{b_{12}}{2} \\ \frac{b_{12}}{2} & b_{22} \end{pmatrix}; \quad x_t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Úplný kvadratický model pre dva faktory

$$y_t = f_t(t_1, t_2) = b_0 + b_1 t_1 + b_2 t_2 + b_{11} t_1^2 + b_{22} t_2^2 + b_{12} t_1 t_2$$

zapísaný pomocou matic $y_t = f_t(t_1, t_2) = b_0 + x_t^T b + x_t^T B x_t$,

$$\text{kde } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, x_t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \frac{b_{12}}{2} \\ \frac{b_{12}}{2} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Stacionárny bod vyjadrený ako stĺpcový vektor je: $x_t = -\frac{1}{2} B^{-1} b$.

Typ extrému sa určí podľa koreňov charakteristickej rovnice matice B :

$$\det(B - \lambda I) = 0,$$

kde I je jednotková matica.

- Pre $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ je stacionárny bod minimom.
- Pre $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ je stacionárny bod maximom.
- Pre rôzne znamienka λ_1, λ_2 je stacionárny bod sedlovým bodom.

Optimálna hodnota odozvy je pre nájdený vektor $x_{t \text{ optim}}$ sa následne vypočíta:

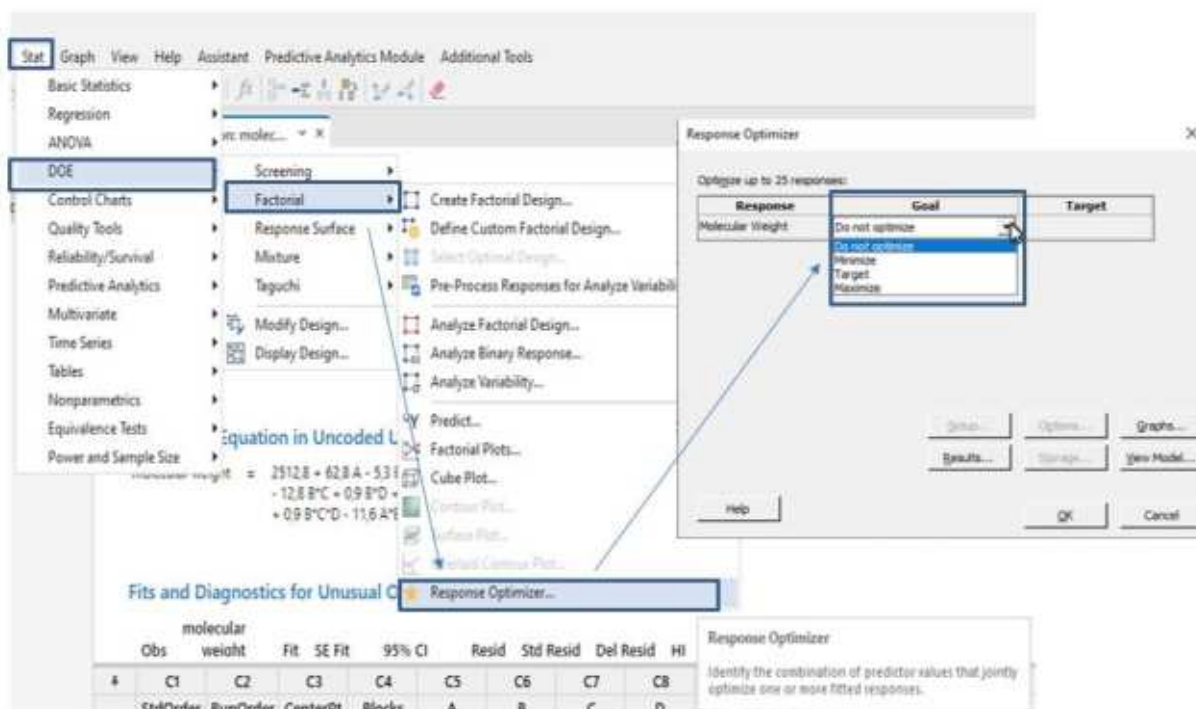
$$y_{t \text{ optim}} = b_0 + x_{t \text{ optim}}^T b + x_{t \text{ optim}}^T B x_{t \text{ optim}}$$

Poznámka:

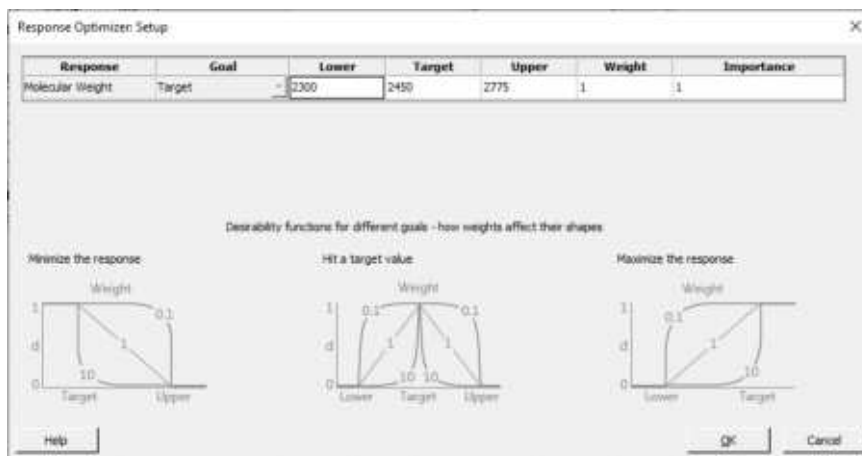
Korene charakteristickej rovnice sa nazývajú charakteristické čísla alebo vlastné čísla matice B .

7.4 OPTIMALIZÁCIA V MINITABE

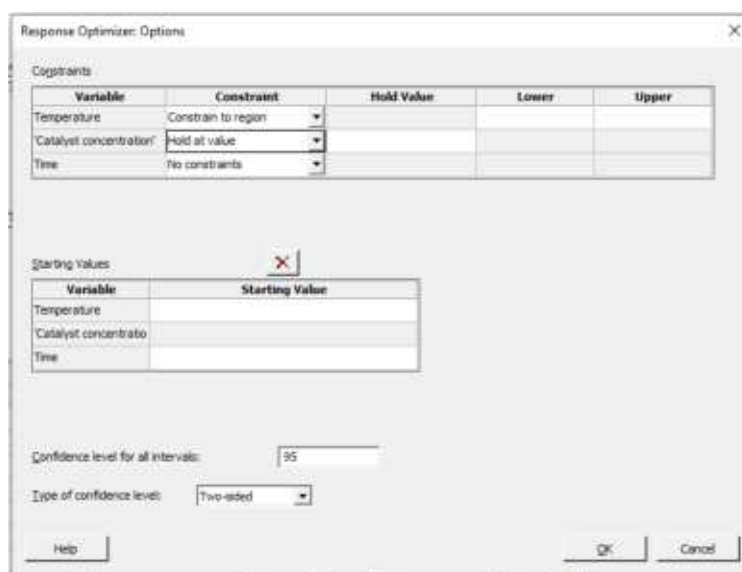
Optimálne riešenie v softvéri Minitab hľadáme postupnosťou príkazov na obr. 91 až 94.



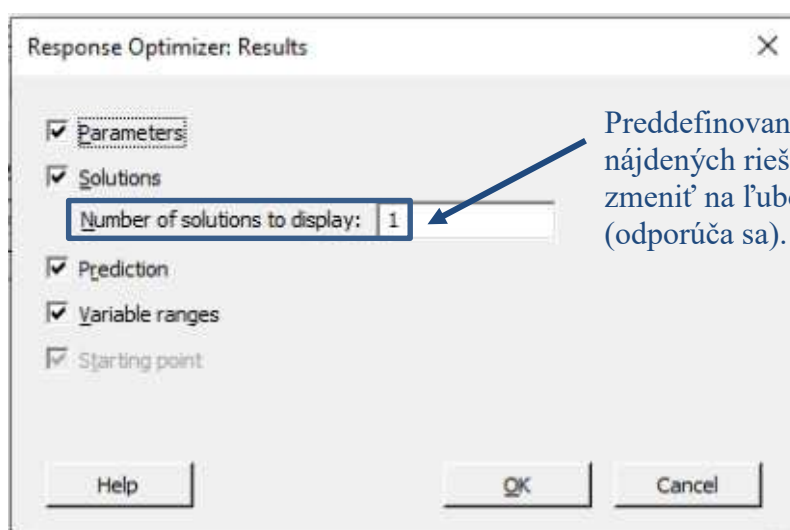
Obr. 91 Spustenie optimalizácie v Minitabe



Obr. 92 Nastavenie požadovanej hodnoty odozvy v Minitabe



Obr. 93 Nastavenie obmedzení (constraint) pre vstupné parametre (faktory) v Minitabe



Obr. 94 Zadávanie požiadaviek na výstup výsledkov v Minitabe

Po nastavení požadovanej odozvy (obr. 92), obmedzení pre intervaly jednotlivých faktorov (obr. 93) a zobrazení požadovaných výstupov a počtu nájdených riešení (obr. 94) Minitab zobrazuje výstup v tvare na obr. 95:

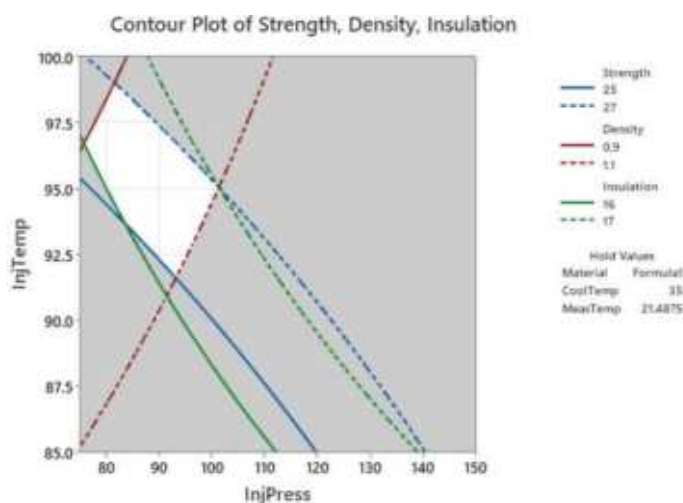
Parameters						
Response	Goal	Lower	Target	Upper	Weight	Importance
Molecular Weight	Maximum	2300	2775		1	1

Solution						
Solution	Temperature	Catalyst concentration	Time	Molecular Weight Fit	Composite Desirability	
1	200	8	30	2737,81	0,921711	

Obr. 95 Výstup Minitabu s nájdeným optimálnym riešením

Pre nami požadovanú hodnotu odozvy 2775 bolo nájdené riešenie 2737,81. Túto odozvu by sme mali získať pri nastavení faktora teplota na úroveň 200 a koncentrácie katalyzátora na úroveň 8. O vhodnosti nájdeného riešenia hovorí funkcia vhodnosti (Desirability function). Čím viac sa jej hodnota blíži k hodnote 1, tým možno považovať nájdené riešenie za lepšie. Nájdené viaceré riešenia blízke požadovanej hodnote odozvy bývajú usporiadané zostupne podľa hodnoty tejto funkcie.

Poznámka: Pri viacerých analyzovaných odozvách na rovnakom experimentálnom priestore možno použiť multikriteriálnu optimalizáciu a hľadať optimum, ktoré bude spĺňať optimálne hodnoty pre viac skúmaných odoziev súčasne. V tomto prípade možno v prípade potreby vizuálnej predstavy využívať prekrývajúce sa vrstevnicové grafy (overlaid contour plots). Ich ukážka je na obr. 96.



Obr. 96 Ukážka prekrývajúcich sa vrstevnicových grafov pri súčasnom skúmaní troch odoziev

7.5 OPTIMALIZÁCIA V EXCELI

Optimálne riešenie v Exceli hľadáme pomocou spustiteľného doplnku Excelu s názvom Riešiteľ (Solver). Na obr. 97 je naznačený postup nájdenia optimálneho riešenia pomocou využitia regresného modelu získaného v predchádzajúcom kroku pri regresnej analýze. Pred samotným spustením algoritmu je potrebné zadať výpočet predikovanej hodnoty, ktorú chceme optimalizovať, viď stĺpce G a H. Funkcia **=SUMPRODUCT** zabezpečí skalárny súčin vektora bodových odhadov regresných koeficientov a vektora úrovni faktorov vystupujúcich v regresnom modeli. Volíme, či chceme, aby cieľová hodnota – vypočítaná (modelovaná, predikovaná) hodnota bola minimálna, maximálna alebo nadobúdala presnú hodnotu. Pred spustením Riešiteľa je potrebné zadať obmedzenia vzťahujúce sa na hranice skúmaného experimentálneho priestoru a výber metódy riešenia (v tomto prípade bol zvolený evolučný algoritmus).

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%
Intercept	79,75	1,213605281	65,7133	8,4E-10	76,7804	82,7196
t1	9,82474747	0,858148524	11,4488	2,7E-05	7,72493	11,9246
t2	4,21599026	0,858148524	4,91289	0,00268	2,11618	6,3158
t1*t2	-7,75	1,213605281	-6,3859	0,00069	-10,72	-4,7804
t1^2	-8,875	0,959439217	-9,2502	9E-05	-11,223	-6,527
t2^2	-5,125	0,959439217	-5,3417	0,00176	-7,4727	-2,7773

Doplnok Excelu – Riešiteľ (Solver)

	F	G	H	I	J	K
41	Optimalizacia - hľadáme maximálnu hodnotu odozvy - riešenie cez Solver					
42	Intercept	79,75	1			
43	t1	9,82474747	0,558192709			
44	t2	4,21599026	-0,01073203			
45	t1*t2	-7,75	-0,00599054			
46	t1^2	-8,875	0,311579101			
47	t2^2	-5,125	0,000115177			
48	y modelovane=		82,46942817			

nastavenie buniek, ktoré budú použité pri výpočte maxima funkcie

$$f_t(t_1, t_2) = b_0 + b_1 t_1 + b_2 t_2 + b_{12} t_1 t_2 + b_{11} t_1^2 + b_{22} t_2^2$$

1

=H43*H44

=H43^2

=H44^2

=SUMPRODUCT(G42:G47;H42:H47)

Parametre doplnku Riešiteľ

Nastaviť cieľ: **\$H\$48**

Do: ☒ Maximum ☐ Minimum ☐ Hodnota:

Zmeniť premenných buniek: **\$H\$43:\$H\$44**

Zodlné obmedzenia:

\$H\$43 >= 1

\$H\$43 <= 1

\$H\$44 >= 1

\$H\$44 <= 1

riešenie hľadáme iba v rámci experimentálneho priestoru

☐ Vytvorte nezápornú hodnotu premenných, ktoré sú bez obmedzení

Výber metódy riešenia: **Evolučný algoritmus**

Metóda riešenia

Ak chcete v doplnku Riešiteľ riešiť spoj. nelineárne problémy, vyberte nástroj Nelineárny algoritmus GRG. Ak chcete riešiť lineárne problémy, vyberte nástroj Simplex LP algoritmus. Ak chcete riešiť nezáporné problémy, vyberte nástroj Evolučný algoritmus.

Riešiť

Obr. 97 Hľadanie optimálneho riešenia v Exceli pomocou doplnku Riešiteľ

Podľa nájdeného riešenia na získanie maximálnej hodnoty odozvy je potrebné kódované úrovne faktorov nastaviť na úrovne 0,558 a -0,011.

8 ÚPLNÝ FAKTORIÁLNY DIZAJN S MERANÍM V CENTRÁLNOBOM BODE – RIEŠENÝ VZOROVÝ PRÍKLAD

Bola skúmaná závislosť rýchlosti nitridového leptania plazmových dosťičiek v závislosti od vybraných premenných: medzery medzi elektródami, prietoku plynu a výkonu na katóde, pričom $x_1 \in \langle 0,8; 1,2 \rangle$ je medzera medzi elektródami v cm, $x_2 \in \langle 125; 200 \rangle$ je prietok plynu v cm^3/min , $x_3 \in \langle 275; 325 \rangle$ je výkon na katóde vo W. Zadané príkladu a namerané hodnoty boli prevzaté z [9], str. 245.

Pri uvažovanom experimente typu 2^3 boli namerané hodnoty v 10^{-10} m/min:

$f(0,8;125;325)=1052$; $f(0,8;125;275)=550$; $f(0,8;200;275)=601$; $f(1,2;200;275)=635$;
 $f(1,2;125;275)=669$; $f(0,8;200;275)=633$; $f(1,2;125;275)=650$; $f(0,8;125;275)=604$;
 $f(1,2;200;275)=642$; $f(0,8;125;325)=1037$; $f(1,2;125;325)=749$; $f(1,2;200;325)=860$;
 $f(1,2;125;325)=868$; $f(0,8;200;325)=1075$; $f(1,2;200;325)=729$; $f(0,8;200;325)=1063$

Pri dvojúrovňovom experimente bola závislá premenná (odozva) – rýchlosť nitridového leptania pre vstupné nezávislé premenné (faktory) vždy meraná na dolnej úrovni, t. j. pri nastavenej minimálnej hodnote a hornej úrovni, t. j. pri maximálnej hodnote ako uvádza tabuľka 3.

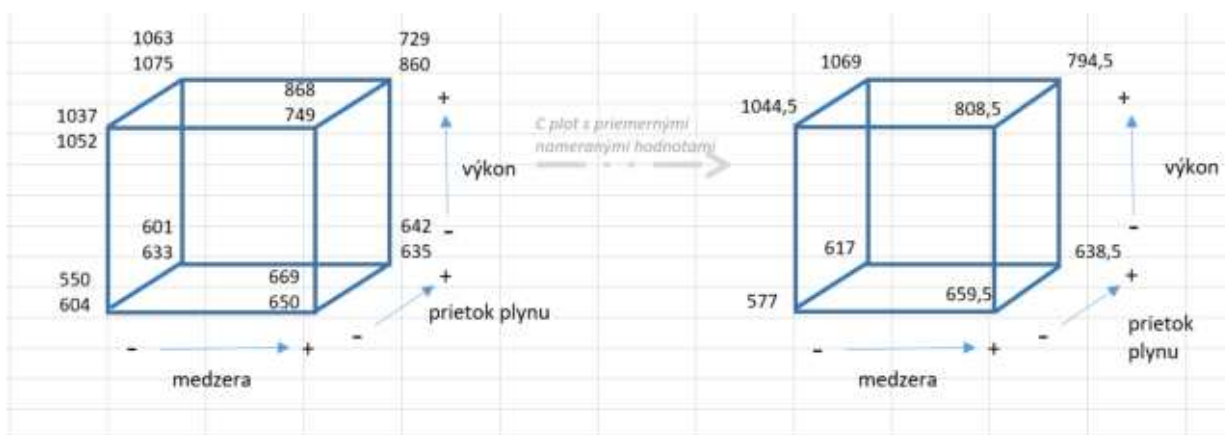
Tabuľka 3 Vstupné nezávislé faktory a ich úrovne				
Faktory	v pôvodných jednotkách		v kódovaných jednotkách	
	dolná úroveň	horná úroveň	dolná úroveň	horná úroveň
A_medzera medzi elektródami	0,8 cm	1,2 cm	-1	1
B_prietok plynu	125 cm^3/min	200 cm^3/min	-1	1
C_výkon na katóde	275 W	325 W	-1	1

Zápis nameraných hodnôt a lineárna transformácia

Počet bodov experimentálneho priestoru, v ktorých bolo realizované meranie, je pri úplnom faktoriálnom experimente typu 2^3 rovný 8. Vzhľadom na 16 nameraných hodnôt a predpokladajúc, že experiment bol vyvážený, boli pri experimente použité 2 replikácie. Prehľadný zápis nameraných hodnôt zodpovedajúci rôznym kombináciám úrovní faktov je v tabuľke 4.

Tabuľka 4 Nitridové leptanie, namerané hodnoty						
	t_1	t_2	t_3	$y_1 [10^{-10} \text{ m/min}]$	$y_2 [10^{-10} \text{ m/min}]$	$\bar{y} [10^{-10} \text{ m/min}]$
(1)	-1	-1	-1	550	604	577
a	1	-1	-1	669	650	659,5
b	-1	1	-1	601	663	617
c	-1	-1	1	1037	1052	1044,5
ab	1	1	-1	642	635	638,5
ac	1	-1	1	868	749	808,5
bc	-1	1	1	1063	1075	1069
abc	1	1	1	729	860	794,5

Cplot na obr. 98 s nameranými hodnotami a ich vypočítanou priemernou hodnotou v jednotlivých experimentálnych bodoch poskytuje vizuálnu predstavu o výsledkoch experimentu vzhľadom na nastavené úrovne faktorov.



Obr. 98 Grafické znázornenie nameraných hodnôt a ich priemerov v jednotlivých experimentálnych bodoch pri experimente typu 2^3

Stredy intervalov s a polovičné dĺžky variačného rozpätia intervalov λ na nasledujúcom obr. 99 sú použité pri kódovaní všetkých úrovní vstupných hodnôt na obr. 100.

	T	U	V
1		s	lambda
2	x_1	$=(0,8+1,2)/2$	$=(1,2-0,8)/2$
3	x_2	$=(125+200)/2$	$=(200-125)/2$
4	x_3	$=(275+325)/2$	$=(325-275)/2$

	T	U	V
1		s	lambda
2	x_1	1	0,2
3	x_2	162,5	37,5
4	x_3	300	25

Obr. 99 Výpočet stredy a polovice variačného rozpätia intervalov faktorov x_1 , x_2 a x_3

	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1	Transformácia:									
2		x1	x2	x3	Y		t1	t2	t3	Y
3	1	0,8	125	325	1052		= (K3-\$U\$2)/\$V\$2	= (L3-\$U\$3)/\$V\$3	= (M3-\$U\$4)/\$V\$4	1052
4	2	0,8	125	275	550		= (K4-\$U\$2)/\$V\$2	= (L4-\$U\$3)/\$V\$3	= (M4-\$U\$4)/\$V\$4	550
5	3	0,8	200	275	601		= (K5-\$U\$2)/\$V\$2	= (L5-\$U\$3)/\$V\$3	= (M5-\$U\$4)/\$V\$4	601
6	4	1,2	200	275	635		= (K6-\$U\$2)/\$V\$2	= (L6-\$U\$3)/\$V\$3	= (M6-\$U\$4)/\$V\$4	635
7	5	1,2	125	275	669		= (K7-\$U\$2)/\$V\$2	= (L7-\$U\$3)/\$V\$3	= (M7-\$U\$4)/\$V\$4	669
8	6	0,8	200	275	633		= (K8-\$U\$2)/\$V\$2	= (L8-\$U\$3)/\$V\$3	= (M8-\$U\$4)/\$V\$4	633
9	7	1,2	125	275	650		= (K9-\$U\$2)/\$V\$2	= (L9-\$U\$3)/\$V\$3	= (M9-\$U\$4)/\$V\$4	650
10	8	0,8	125	275	604		= (K10-\$U\$2)/\$V\$2	= (L10-\$U\$3)/\$V\$3	= (M10-\$U\$4)/\$V\$4	604
11	9	1,2	200	275	642		= (K11-\$U\$2)/\$V\$2	= (L11-\$U\$3)/\$V\$3	= (M11-\$U\$4)/\$V\$4	642
12	10	0,8	125	325	1037		= (K12-\$U\$2)/\$V\$2	= (L12-\$U\$3)/\$V\$3	= (M12-\$U\$4)/\$V\$4	1037
13	11	1,2	125	325	749		= (K13-\$U\$2)/\$V\$2	= (L13-\$U\$3)/\$V\$3	= (M13-\$U\$4)/\$V\$4	749
14	12	1,2	200	325	860		= (K14-\$U\$2)/\$V\$2	= (L14-\$U\$3)/\$V\$3	= (M14-\$U\$4)/\$V\$4	860
15	13	1,2	125	325	868		= (K15-\$U\$2)/\$V\$2	= (L15-\$U\$3)/\$V\$3	= (M15-\$U\$4)/\$V\$4	868
16	14	0,8	200	325	1075		= (K16-\$U\$2)/\$V\$2	= (L16-\$U\$3)/\$V\$3	= (M16-\$U\$4)/\$V\$4	1075
17	15	0,8	200	325	1063		= (K17-\$U\$2)/\$V\$2	= (L17-\$U\$3)/\$V\$3	= (M17-\$U\$4)/\$V\$4	1063
18	16	1,2	200	325	729		= (K18-\$U\$2)/\$V\$2	= (L18-\$U\$3)/\$V\$3	= (M18-\$U\$4)/\$V\$4	729

	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1	Transformácia:									
2		x1	x2	x3	Y		t1	t2	t3	Y
3	1	0,8	125	325	1052		-1	-1	1	1052
4	2	0,8	125	275	550		-1	-1	-1	550
5	3	0,8	200	275	601		-1	1	-1	601
6	4	1,2	200	275	635		1	1	-1	635
7	5	1,2	125	275	669		1	-1	-1	669
8	6	0,8	200	275	633		-1	1	-1	633
9	7	1,2	125	275	650		1	-1	-1	650
10	8	0,8	125	275	604		-1	-1	-1	604
11	9	1,2	200	275	642		1	1	-1	642
12	10	0,8	125	325	1037		-1	-1	1	1037
13	11	1,2	125	325	749		1	-1	1	749
14	12	1,2	200	325	860		1	1	1	860
15	13	1,2	125	325	868		1	-1	1	868
16	14	0,8	200	325	1075		-1	1	1	1075
17	15	0,8	200	325	1063		-1	1	1	1063
18	16	1,2	200	325	729		1	1	1	729

Obr. 100 Transformácia pôvodných úrovní faktorov do kódovaných hodnôt realizovaná v Exceli

Výpočet bodových odhadov koeficientov regresného modelu MNŠ

Koeficienty $\hat{B}$ pre regresný model lineárneho typu $y = B_0 + \sum_{j=1}^k B_j x_j + \sum \sum_{i < j} B_{ij} x_i x_j$ odhadujeme pomocou $\hat{b}$ -koeficientov transformovaného regresného modelu, t. j. pomocou transformovanej regresnej funkcie lineárneho typu $(\hat{f}_L)_t(t_1, t_2, t_3) = b_0 + \sum_{j=1}^k b_j t_j + \sum \sum_{i < j} b_{ij} t_i t_j$. Ak pri bodových odhadoch regresných koeficientov použijeme MNŠ, potom použijeme vzťah

$$\hat{b} = \begin{pmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \\ \hat{b}_{12} \\ \hat{b}_{13} \\ \hat{b}_{23} \\ \hat{b}_{123} \end{pmatrix} = \frac{1}{m \cdot 2^k} X^T Y$$

Pri výpočte v Exceli vytvoríme maticu plánu experimentu X z pôvodných kódovaných hodnôt na obr. 101 pridaním stĺpca 1 pri b_0 a stĺpcov, ktoré reprezentujú interakcie faktorov v modeli. Súčin transponovanej matice plánu experimentu X^T a matice nameraných hodnôt zodpovedajúcich príslušným úrovniam faktorov Y delíme počtom nameraných hodnôt $m \cdot 2^k$ na obr. 102.

	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL	AM	AN	AO
1			t1	t2	t3	t1*t2	t1*t3	t2*t3	t1*t2*t3								
2		b0	b1	b2	b3	b12	b13	b23	b123		Y						
3		1	-1	-1	1	1	-1	-1	1		1052						
4		-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1		550						
5		1	-1	1	-1	-1	1	-1	1		601						
6		-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1		635						
7		1	1	-1	-1	-1	-1	1	1		669						
8		-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1		633						
9		-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1		650						
10		1	-1	-1	-1	1	1	1	-1		604						
11		-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1		642						
12		-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1		1037						
13		1	1	-1	1	-1	1	-1	-1		749						
14		-1	1	1	1	1	1	1	1		860						
15		1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1		868						
16		-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1		1075						
17		-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1		1063						
18		1	1	1	1	1	1	1	1		729						
19																	
20	XT=	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
21		-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	1
22		-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
23		1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1
24		1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1
25		-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1
26		-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
27		1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1
28																	
29																	
30	XT*Y=	12417															
31		-813															
32		59															
33		2449															
34		-199															
35		-1229															
36		-17															
37		45															

Obr. 101 Matica plánu experimentu X potrebná na výpočet bodových odhadov koeficientov regresného modelu

	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	
1			t1	t2	t3	t1*t2	t1*t3	t2*t3	t1*t2*t3		
2		b0	b1	b2	b3	b12	b13	b23	b123		Y
3	X=	1	-1	-1	1	=AA3*AB3	=AA3*AC3	=AB3*AC3	=AA3*AB3*AC3		1052
4		1	-1	-1	-1	=AA4*AB4	=AA4*AC4	=AB4*AC4	=AA4*AB4*AC4		550
5		1	-1	1	-1	=AA5*AB5	=AA5*AC5	=AB5*AC5	=AA5*AB5*AC5		601
6		1	1	1	-1	=AA6*AB6	=AA6*AC6	=AB6*AC6	=AA6*AB6*AC6		635
7		1	1	-1	-1	=AA7*AB7	=AA7*AC7	=AB7*AC7	=AA7*AB7*AC7		669
8		1	-1	1	-1	=AA8*AB8	=AA8*AC8	=AB8*AC8	=AA8*AB8*AC8		633
9		1	1	-1	-1	=AA9*AB9	=AA9*AC9	=AB9*AC9	=AA9*AB9*AC9		650
10		1	-1	-1	-1	=AA10*AB10	=AA10*AC10	=AB10*AC10	=AA10*AB10*AC10		604
11		1	1	1	1	=AA11*AB11	=AA11*AC11	=AB11*AC11	=AA11*AB11*AC11		642
12		1	-1	-1	1	=AA12*AB12	=AA12*AC12	=AB12*AC12	=AA12*AB12*AC12		1037
13		1	1	-1	1	=AA13*AB13	=AA13*AC13	=AB13*AC13	=AA13*AB13*AC13		749
14		1	1	1	1	=AA14*AB14	=AA14*AC14	=AB14*AC14	=AA14*AB14*AC14		860
15		1	1	-1	1	=AA15*AB15	=AA15*AC15	=AB15*AC15	=AA15*AB15*AC15		868
16		1	-1	1	1	=AA16*AB16	=AA16*AC16	=AB16*AC16	=AA16*AB16*AC16		1075
17		1	-1	1	1	=AA17*AB17	=AA17*AC17	=AB17*AC17	=AA17*AB17*AC17		1063
18		1	1	1	1	=AA18*AB18	=AA18*AC18	=AB18*AC18	=AA18*AB18*AC18		729
19											
20	XT=	=TRANSPOSE(Z3:AG18)	=TRANS	=TRANS	=TRANS	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANS
21		=TRANSPOSE(Z3:AG18)	=TRANS	=TRANS	=TRANS	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANS
22		=TRANSPOSE(Z3:AG18)	=TRANS	=TRANS	=TRANS	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANS
23		=TRANSPOSE(Z3:AG18)	=TRANS	=TRANS	=TRANS	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANS
24		=TRANSPOSE(Z3:AG18)	=TRANS	=TRANS	=TRANS	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANS
25		=TRANSPOSE(Z3:AG18)	=TRANS	=TRANS	=TRANS	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANS
26		=TRANSPOSE(Z3:AG18)	=TRANS	=TRANS	=TRANS	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANS
27		=TRANSPOSE(Z3:AG18)	=TRANS	=TRANS	=TRANS	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANSPOSE(Z3:AG1	=TRANS
28											
29											
30	XT*Y=	=MMULT(Z20:AQ27;A13:A118)				b ₀ =	=Z30/18				
31		=MMULT(Z20:AQ27;A13:A118)				b ₁ =	=Z31/18				
32		=MMULT(Z20:AQ27;A13:A118)				b ₂ =	=Z32/18				
33		=MMULT(Z20:AQ27;A13:A118)				b ₃ =	=Z33/18				
34		=MMULT(Z20:AQ27;A13:A118)				b ₁₂ =	=Z34/18				
35		=MMULT(Z20:AQ27;A13:A118)				b ₁₃ =	=Z35/18				
36		=MMULT(Z20:AQ27;A13:A118)				b ₂₃ =	=Z36/18				
37		=MMULT(Z20:AQ27;A13:A118)				b ₁₂₃ =	=Z37/18				

Po označení výslednej veľkosti poľa
potvrdzujeme trojkombináciou kláves
CTRL+ Shift + Enter

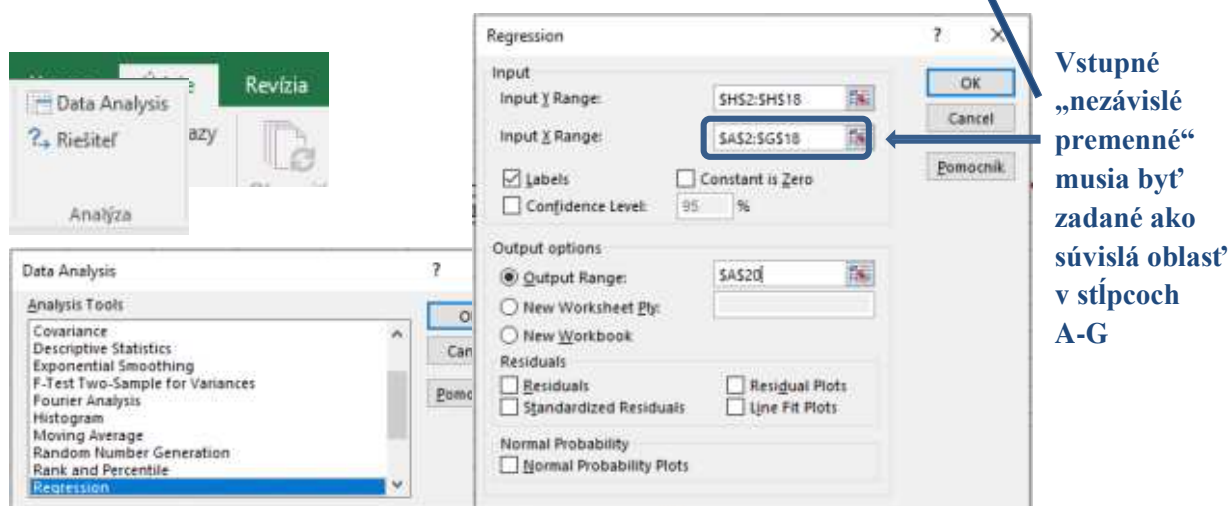
Obr. 102 Výpočet bodových odhadov koeficientov regresného modelu realizovaný v Exceli

Hierarchický regresný model a identifikácia signifikantných faktorov a interakcií faktorov

V prvej fáze vyhodnocovania experimentu nás zvyčajne zaujíma vplyv ktorých faktorov, resp. interakcií možno považovať za signifikantný a ktorý možno zanedbať. Bodové odhady regresných koeficientov, hodnoty testovacích štatistík, p-hodnoty a intervaly spoľahlivosti vieme jednoducho získať cez analýzu dát v Exceli postupnosťou príkazov *Data*→*Data analysis*→*Regression*.

Vstupné údaje, ktoré použijeme v regresnej analýze sú na obr. 103, pričom ako nezávislá premenná *X* musí byť zapísaná súvislá oblasť obsahujúca stĺpce predstavujúce všetky členy, ktoré majú v regresnom modeli vystupovať, t. j. všetky faktory a ich interakcie vyjadrené v kódovaných jednotkách. Ako závislú premennú *Y* zadávame namerané hodnoty odozvy v príslušnom poradí kombinácií úrovní vstupov. Ak označíme aj riadok, v ktorom sa nachádzajú označenia príslušného faktora alebo interakcie, potom je potrebné v dialógovom okne potvrdiť *Labels*.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	t1	t2	t3	t1*t2	t1*t3	t2*t3	t1*t2*t3	yi
3	-1	-1	-1	1	1	1	-1	550
4	-1	-1	-1	1	1	1	-1	604
5	1	-1	-1	-1	-1	1	1	669
6	1	-1	-1	-1	-1	1	1	650
7	-1	1	-1	-1	1	-1	1	633
8	-1	1	-1	-1	1	-1	1	601
9	1	1	-1	1	-1	-1	-1	642
10	1	1	-1	1	-1	-1	-1	635
11	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1037
12	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1052
13	1	-1	1	-1	1	-1	-1	749
14	1	-1	1	-1	1	-1	-1	868
15	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1075
16	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1063
17	1	1	1	1	1	1	1	729
18	1	1	1	1	1	1	1	860



Obr. 103 Zadávanie vstupných údajov použitých pri regresnej analýze s viacerými vstupnými parametrami v Exceli

Výstup regresnej analýzy v Exceli je na obr. 104 a 105.

Regression Statistics					
Multiple R	0,982898759				
R Square	0,96608997				
Adjusted R Square	0,936418694				
Standard Error	47,46116834				
Observations	16				

Obr. 104 Výstup regresnej analýzy v Exceli – všeobecné charakteristiky týkajúce sa nájdeného regresného modelu

ANOVA						
	<i>df</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>Significance F</i>	
Regression	7	513400,4375	73342,9	32,5598	2,89617E-05	
Residual	8	18020,5	2252,56			
Total	15	531420,9375				

	<i>Coefficients</i>	<i>Standard Error</i>	<i>t Stat</i>	<i>P-value</i>	<i>Lower 95%</i>	<i>Upper 95%</i>
Intercept	776,0625	11,86529208	65,4061	3,3E-12	748,7010874	803,42391
t1	-50,8125	11,86529208	-4,28245	0,00268	-78,1739126	-23,45109
t2	3,6875	11,86529208	0,31078	0,76391	-23,6739126	31,048913
t3	153,0625	11,86529208	12,9	1,2E-06	125,7010874	180,42391
t1*t2	-12,4375	11,86529208	-1,04823	0,32517	-39,7989126	14,923913
t1*t3	-76,8125	11,86529208	-6,47371	0,00019	-104,173913	-49,45109
t2*t3	-1,0625	11,86529208	-0,08955	0,93085	-28,4239126	26,298913
t1*t2*t3	2,8125	11,86529208	0,23704	0,81859	-24,5489126	30,173913

Obr. 105 Výstup regresnej analýzy v Exceli – tabuľka ANOVA a tabuľka so štatistikami týkajúcimi sa regresných koeficientov

Stĺpec *Coefficients* obsahuje bodové odhady $\hat{b}$ koeficientov transformovanej regresnej funkcie lineárneho typu $f_t(t_1, t_2, t_3)$: $\hat{b}_0 = 776,0625$ (číselná hodnota zodpovedá aritmetickému priemeru všetkých nameraných hodnôt Y), $\hat{b}_1 = -50,8125$, $\hat{b}_2 = 3,6875$, $\hat{b}_3 = 153,0625$, $\hat{b}_{12} = -12,4375$, $\hat{b}_{13} = -76,8125$, $\hat{b}_{23} = -1,0625$, $\hat{b}_{123} = 2,8125$. Sú to koeficienty, ktoré sa vyskytujú pri faktoroch a interakciách faktorov v regresnom modeli $(f_L)_t(t_1, t_2, t_3) = b_0 + b_1 t_1 + b_2 t_2 + b_3 t_3 + b_{12} t_1 t_2 + b_{13} t_1 t_3 + b_{23} t_2 t_3 + b_{123} t_1 t_2 t_3$.

Pri rozhodovaní o ďalšom ponechaní, resp. vylúčení faktorov v ďalšom skúmaní môžeme napríklad pomocou p-hodnoty v stĺpci *P-value* identifikovať, ktoré koeficienty, a tým aj ktoré členy modelu v ňom majú zostať a ktoré môžeme vylúčiť. Rozhodneme vplyv ktorých faktorov či interakcií je či nie je štatisticky významný (signifikantný) vzhľadom na skúmanú rýchlosť nitridového leptania. V našom prípade možno na hladine významnosti 0,05 vylúčiť faktor prietok plynu spolu so všetkými interakciami s týmto faktorom, pretože p-hodnota je väčšia ako nami zvolené $\alpha = 0,05$. K rovnakému výsledku by sme sa dopracovali aj pri rozhodovaní na základe intervalov spoľahlivosti. Pri každom z vylúčených členov modelu nájdeme interval spoľahlivosti obsahujúci 0. Po vylúčení nevýznamných členov z pôvodného regresného modelu dostaneme regresný model, ktorý spĺňa podmienku hierarchickosti - ak v modeli zostáva člen, ktorý obsahuje interakcie, ponechávame v modeli aj všetky členy, ktoré v interakcii vystupujú bez ohľadu na ich štatistickú významnosť.

V prípade riešenia pomocou softvéru Minitab volíme metódu postupnej spätnej eliminácie (Backward elimination), kedy postupne z modelu vylúčime členy štatisticky nevýznamné na zvolenej hladine významnosti.

Po opätovnom spustení regresnej analýzy dostávame nové aktuálne hodnoty R^2 , ANOVY a testovacie štatistiky týkajúce sa členov regresného modelu. Hodnoty regresných koeficientov ponechaných členov zostávajú rovnaké nakoľko s výnimkou úplného kvadratického modelu sú vždy rovné polovici veľkosti efektov.

Pri ďalšom vyhodnotení z dôvodu prepočítania výsledkov je potrebné regresnú analýzu spustiť opakovane. Ponechané vstupy musia byť v Exceli uvedené ako súvislá oblasť, viď obr. 106. Výstup regresnej analýzy je na obr. 107.

t1	t3	t1*t3	yl
-1	-1	1	550
-1	-1	1	604
1	-1	-1	669
1	-1	-1	650
-1	-1	1	633
-1	-1	1	601
1	-1	-1	642
1	-1	-1	635
-1	1	-1	1037
-1	1	-1	1052
1	1	1	749
1	1	1	868
-1	1	-1	1075
-1	1	-1	1063
1	1	1	729
1	1	1	860

Obr. 106 Pri ďalšom vyhodnotení z dôvodu správnych výsledkov je potrebné regresnú analýzu spustiť opakovane. Ponechané vstupy musia byť v Exceli opäť uvedené ako súvislá oblasť.

SUMMARY OUTPUT						
Regression Statistics						
Multiple R	0,980179					
R Square	0,960751					
Adjusted R Squa	0,950939					
Standard Error	41,69108					
Observations	16					
ANOVA						
	df	SS	MS	F	gnificance F	
Regression	3	510563,2	170187,7	97,91338	1,05E-08	
Residual	12	20857,75	1738,146			
Total	15	531420,9				
Coefficients						
	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%	
Intercept	776,0625	10,42277	74,45838	2,29E-17	753,3532	798,7718
t1	-50,8125	10,42277	-4,87514	0,000382	-73,5218	-28,1032
t3	153,0625	10,42277	14,6854	4,95E-09	130,3532	175,7718
t1*t3	-76,8125	10,42277	-7,36968	8,62E-06	-99,5218	-54,1032

Obr. 107 Výstup regresnej analýzy v Exceli po vylúčení nevýznamných faktorov a interakcií

Bodový odhad transformovanej regresnej funkcie lineárneho typu $(\hat{f}_L)_t(t_1, t_2, t_3)$, ktorú dostaneme po vylúčení štatisticky nevýznamných členov je

$$(\hat{f}_L)_t(t_1, t_3) = 776,0625 - 50,8125t_1 + 153,0625t_3 - 76,8125t_1t_3$$

Odtiaľ vieme vyjadriť bodový odhad regresnej funkcie lineárneho typu $\hat{f}_L(x_1, x_2, x_3)$, ktorá bude v pôvodných jednotkách. V neupravenom tvare po spätnom dosadení transformačných vzťahov

$$\begin{aligned} \hat{f}_L(x_1, x_3) \\ = 776,0625 - 50,8125 \frac{x_1 - 1}{0,2} + 153,0625 \frac{x_3 - 300}{25} - 76,8125 \frac{x_1 - 1}{0,2} \cdot \frac{x_3 - 300}{25} \end{aligned}$$

Po úprave

$$\hat{f}_L(x_1, x_3) = -5415,375 + 4354,688x_1 + 21,485x_3 - 15,3625x_1x_3$$

Individuálne t-testy štatistickej významnosti regresných koeficientov

Má medzera medzi elektródami výrazný vplyv na rýchlosť nitridového leptania? Použijeme individuálne t-testy štatistickej významnosti regresných koeficientov. V princípe si môžeme zvoliť ľubovoľnú malú chybu I. druhu α , ktorej sa môžeme dopustiť pri vyhodnocovaní hypotéz. Najčastejšie sa v praxi volí $\alpha = 0,05$, resp. 0,01 alebo 0,1. Pre naše účely bude z dôvodu názornosti výpočtov volená vždy iná malá hodnota α . Napr. na hladine významnosti 3% chceme otestovať, či je samostatné pôsobenie faktora x_1 – medzera medzi elektródami, na hodnotu regresnej funkcie lineárneho typu štatisticky významné.

Pri testovaní vždy používame kódované hodnoty, resp. transformovanú regresnú funkciu, preto samostatné pôsobenie faktora x_1 na hodnotu $f_L(x_1, x_3)$ vyhodnocujeme ako samostatné pôsobenie transformovaného faktora t_1 na hodnotu $(f_L)_t(t_1, t_3) = b_0 + b_1t_1 + b_3t_3 + b_{13}t_1t_3$. Samostatné pôsobenie transformovaného faktora t_1 testujeme pomocou koeficientu b_1 . Nulová hypotéza H_0 hovorí, že regresný koeficient b_1 nie je štatisticky významný, oproti stojí obojstranná alternatíva H_1 , regresný koeficient b_1 je štatisticky významný: $H_0: b_1 = 0 \leq H_1: b_1 \neq 0$.

Z výstupu Excelu na obr. 108 použijeme riadok, v ktorom sa nachádzajú údaje súvisiace s koeficientom b_1 .

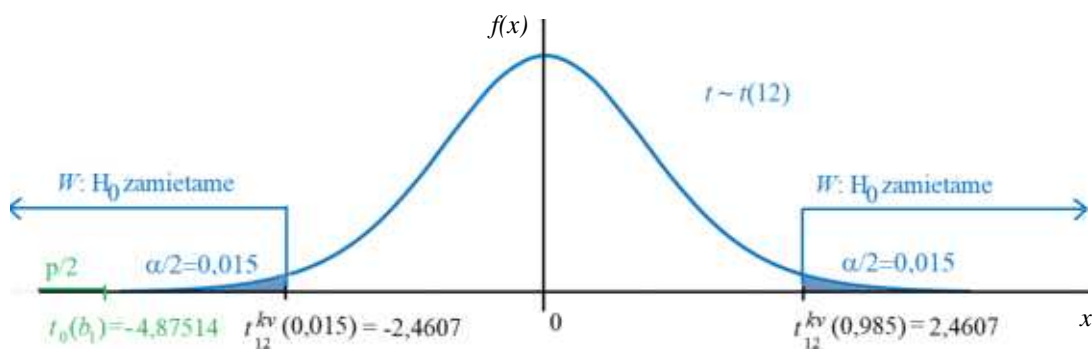
	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%	Lower 97,0%	Upper 97,0%
Intercept	776,0625	10,42276905	74,45838	2,29E-17	753,353237	798,771763	750,4151905	801,7098095
t1	-50,8125	10,42276905	-4,87514	0,000382	-73,521763	-28,1032371	-76,4598095	-25,16519048
t3	153,0625	10,42276905	14,6854	4,95E-09	130,353237	175,771763	127,4151905	178,7098095
t1*t3	-76,8125	10,42276905	-7,36968	8,62E-06	-99,521763	-54,1032371	-102,45981	-51,16519048

Obr. 108 Tabuľka s bodovými odhadmi koeficientov a k nim prislúchajúcimi hodnotami

Testovacia charakteristika (štatistika) $t(b_1) = \frac{\hat{b}_1}{SE(b_1)} \sim t(n - k - 1)$, kde $\hat{b}_1$ je bodový odhad regresného koeficientu b_1 : $\hat{b}_1 = -50,8125$, $SE(b_1) = 10,42276905$, je štandardná chyba tohto odhadu, $n = 16$ je celkový počet nameraných hodnôt, $k = 3$ je počet členov testovaného regresného modelu (členy b_1t_1 , b_3t_3 a $b_{13}t_1t_3$). Odtiaľ $n - k - 1 = 16 - 3 - 1 = 12$. Parameter Studentovho rozdelenia vyjadrený podľa vzťahu $(m - 1) \cdot 2^k$ je rovný $(4 - 1) \cdot 2^2 = 12$, nakoľko vylúčením faktora prietok plynu sa experiment zredukoval na experiment typu 2^2 , pričom počet replikácií pri zachovaní celkového počtu nameraných hodnôt sa zvýšil na 4. Zápis $t(b_i) \sim t(12)$ čítame: testovacie štatistiky pre koeficienty b_i majú Studentovo rozdelenie s 12-timi stupňami voľnosti.

Na základe analyzovaných údajov vypočítaná hodnota testovacej štatistiky, t. j. realizácia testovacej štatistiky $t_0(b_1) = \frac{-50,8125}{10,42276905} \doteq -4,87514$. Túto hodnotu nájdeme v stĺpci *t Stat*.

Vizuálnu predstavu o rozdelení testovacej štatistiky $t(b_1)$, o umiestnení hodnoty testovacej štatistiky t_0 vzhľadom na kritickú oblasť W zamietnutia nulovej hypotézy H_0 , ktorú sme určili podľa zvolenej hladiny významnosti α , o veľkosti p-hodnoty v porovnaní s hodnotou α dáva nasledujúci obr. 109.



Obr. 109 Grafické riešenie pre testovanie hypotézy o koeficiente b_1

O výsledku testu hypotéz rozhodujeme 3 spôsobmi, pričom vždy musíme dostať rovnaký záver:

- Pomocou kritickej oblasti (kritického oboru) $W = (-\infty; -2,4607) \cup (2,4607; \infty)$, kde kritickú hodnotu určíme ako 98,5% kvantil $t_{12}^{kv}(0,985) = T.INV(0,985; 12) = 2,4607$.
 - možnosť vyhodnotenia: $|t_0(b_1)| = 4,87514 > t_{12}^{kv}(0,985)$ alebo
 - možnosť vyhodnotenia: realizácia testovacej štatistiky $t_0(b_1) = -4,87514 \in W$, preto zamietame $H_0 : b_1 = 0$, viď obr. 109.

b) Vyhodnotenie pomocou p-hodnoty

Túto hodnotu nájdeme v stĺpci *P-value*. Keďže p-hodnota predstavuje pravdepodobnosť, že dostaneme rovnaký alebo ešte extrémnejší výsledok v prípade, že by platila nulová hypotéza H_0 , jej číselnú hodnotu vieme vypočítať pomocou distribučnej funkcie.

$$p(b_1) = 2 * \min\{F(t_0(b_1)); 1 - F(t_0(b_1))\} = 0,000382$$

Výpočet p-hodnoty v Exceli je na obr. 110.

F(t0)=	=T.DIST(-4,87514;12;1)	F(t0)=	0,00019082
1-F(t0)=	=1-S63	1-F(t0)=	0,99980918
p=	=2*MIN(S63:S64)	p=	0,00038164

Obr. 110 Výpočet p-hodnoty pomocou distribučnej funkcie

V prípade p-hodnoty nepotrebujeme kritickú oblasť W , t. j. nie je potrebný ani výpočet kvantilu $t_{12}^{kv} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$, pretože p-hodnotu porovnávame so zvolenou hladinou významnosti α . Čím je p-hodnota menšia, tým viac sme presvedčení, že nulovú hypotézu treba zamietnuť.

$$p = 0,000382 < 0,03 = \alpha, \text{ preto zamietame } H_0 : b_1 = 0$$

c) Vyhodnotenie pomocou $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ intervalu spoľahlivosti, alebo tzv. konfidenčného intervalu.

Pri vyhodnotení testov hypotéz pomocou intervalu spoľahlivosti, o prijatí alebo zamietnutí nulovej hypotézy rozhodujeme na základe toho, či 0 patrí alebo nepatrí do $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ IS, obr. 111. V našom prípade $\alpha = 0,03$, preto potrebujeme 97% IS pre koeficient b_1 . Dolnú hranicu intervalu nájdeme vo výstupe regresnej analýzy v tabuľke na obr. 108 v stĺpci *Lower 97%*, hornú hranicu v stĺpci *Upper 97%*. 97% IS pre koeficient b_1 : (-76,4598; -25,1652)



Obr. 111 Číslo 0 nepatrí do 97% IS pre koeficient b_1

Na výpočet hraníc použijeme vzťah $b_1 \pm \Delta$, kde $\Delta = SE(b_1) \cdot t_{(m-1), 2k}^{kv} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$, obr. 112.

55			55		
56	b1=	-50,8125	56	b1=	-50,8125
57	SE(b1)=	10,4227690458598	57	SE(b1)=	10,42277
58	t kv 12 (0,985)=	=T.INV(1-0,03/2;12)	58	t kv 12 (0,985)=	2,4607
59	delta=	=J57*J58	59	delta=	25,64731
60	b1-delta=	=J56-J59	60	b1-delta=	-76,4598
61	b1+delta=	=J56+J59	61	b1+delta=	-25,1652

Obr. 112 Výpočet intervalu spoľahlivosti pre koeficient b_1 v Exceli

Nulová hypotéza $H_0 : b_1 = 0$ hovorí, že regresný koeficient b_1 je nulový, preto sme overovali, či 0 patrí alebo nepatrí do daného konfidenčného intervalu.

Keďže $0 \notin (-76,4598; -25,1652)$, so spoľahlivosťou 97% môžeme hypotézu $H_0 : b_1 = 0$ zamietnuť.

Záver:

Na hladine významnosti $\alpha = 0,03$ možno konštatovať, že regresný koeficient b_1 je štatisticky významný, t. j. samostatný vplyv faktora t_1 na hodnotu transformovanej regresnej funkcie $(f_L)_t(t_1, t_2, t_3)$ je štatisticky významný, t. j. nemožno ho zanedbať. Medzera medzi elektródami je dôležitý faktor pre proces nitridového leptania.

Má výkon na katóde štatisticky výrazný vplyv na rýchlosť nitridového leptania?

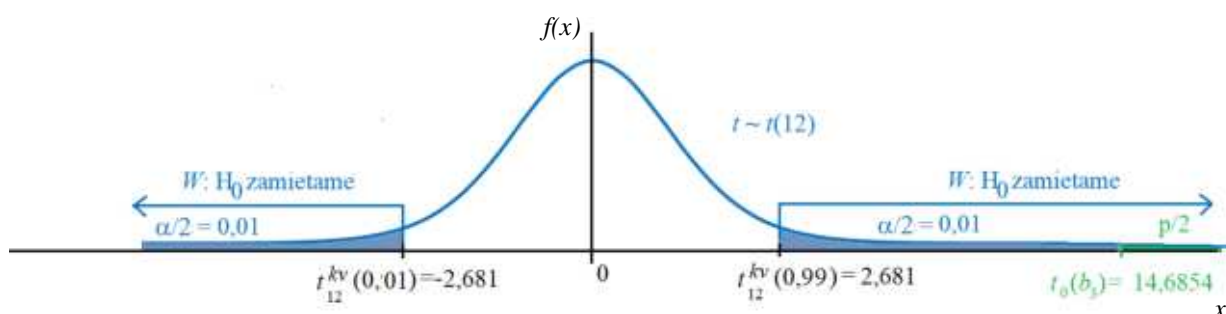
Zvolíme hladinu významnosti napr. 2%. Chceme otestovať, či je samostatné pôsobenie faktora x_3 – výkon na katóde na hodnotu regresnej funkcie lineárneho typu štatisticky významné.

Testujeme hypotézy $H_0: b_3 = 0 \leq H_1: b_3 \neq 0$, pretože samostatné pôsobenie kódovaného faktora t_3 vystupuje v transformovanej regresnej funkcii $(f_L)_t(t_1, t_3) = b_0 + b_1 t_1 + b_3 t_3 + b_{13} t_1 t_3$ v predposlednom člene $b_3 t_3$, t. j. budeme testovať nulovosť regresného koeficientu b_3 . Z výstupu Excelu použijeme riadok, v ktorom sa nachádzajú údaje súvisiace s koeficientom b_3 , obr.113.

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%	Lower 98,0%	Upper 98,0%
Intercept	776,0625	10,42276905	74,45838	2,29E-17	753,353237	798,771763	748,1190771	804,0059229
t1	-50,8125	10,42276905	-4,87514	0,000382	-73,521763	-28,1032371	-78,7559229	-22,8690771
t3	153,0625	10,42276905	14,6854	4,95E-09	130,353237	175,771763	125,1190771	181,0059229
t1*t3	-76,8125	10,42276905	-7,36968	8,62E-06	-99,521763	-54,1032371	-104,755923	-48,8690771

Obr. 113 Tabuľka s bodovými odhadmi koeficientov a im prislúchajúcimi hodnotami

Grafické riešenie je na obr. 114.



Obr. 114 Grafické riešenie na testovanie hypotézy o koeficiente b_{13}

Kritická oblasť $W = (-\infty; -2,681) \cup (2,681; \infty)$, kde 99% kvantil $t_{12}^{kv}(0,99) = T.INV(0,99; 12) = 2,681$. Platí $|t_0(b_3)| = \frac{153,0625}{10,42276905} = 14,6854 > 2,681 = t_{12}^{kv}(0,99)$.

Z grafického riešenia pre test hypotézy o koeficiente b_3 na obr. 114 realizácia testovacej štatistiky $t_0(b_3) = 14,6854 \in W$, preto zamietame $H_0 : b_3 = 0$.

Rovnako p-hodnota $p = 4,95 \cdot 10^{-9} < 0,02 = \alpha$, preto zamietame $H_0 : b_3 = 0$.

P-hodnotu vieme vypočítať vzťahom:

$$p(b_3) = 2 * \min\{F(t_0(b_3)); 1 - F(t_0(b_3))\} = 2 * \text{MIN}(T.DIST(14,6854; 12; 1); 1 - T.DIST(14,6854; 12; 1)) = 4,95 \cdot 10^{-9}.$$

Graficky p-hodnota predstavuje dvojnásobok veľkosti plochy pod krivkou hustoty rozdelenia Studentovho rozdelenia $t(12)$ od realizácie testovacej štatistiky $t_0(b_3)$ vpravo, vid' obr. 114.

Výpočet 98% IS pre koeficient b_3 je na obr. 115.

	H	I	J	K
79		b3=	153,0625	
80		SE(b3)=	10,42277	
81		t kv 12 (0,99)=	=T.INV(1-0,02/2;12)	
82		delta=	=J80*J81	
83		b3-delta=	=J79-J82	
84		b3+delta=	=J79+J82	

Obr. 115 Výpočet intervalu spoľahlivosti pre koeficient b_3 v Exceli

Z tabuľky na obr. 113 je 98% IS pre koeficient b_3 : (125,119; 181,006).



Obr. 116 Číslo 0 nepatrí do 98% IS pre koeficient b_3

Keďže $0 \notin (125,119; 181,006)$, so spoľahlivosťou 98% môžeme hypotézu $H_0 : b_3 = 0$ zamietnuť, vid' obr.116.

Záver:

Na hladine významnosti $\alpha = 0,02$ možno konštatovať, že regresný koeficient b_3 je štatisticky významný, t. j. samostatný vplyv faktorov t_3 na hodnotu transformovanej regresnej funkcie $(f_L)_t(t_1, t_2, t_3)$ je štatisticky významný, nemožno ho zanedbať. Výkon na katóde je dôležitý faktor pre rýchlosť nitrídového leptania.

Ak chceme napr. na hladine významnosti 1% otestovať, či je spoločné pôsobenie faktorov x_1 – medzera medzi elektródami a x_3 – výkon na katóde na skúmanú odozvu štatisticky významné, postavíme hypotézy: $H_0: b_{13} = 0 \leq H_1: b_{13} \neq 0$, pretože spoločné pôsobenie je v regresnom modeli $(f_L)_t(t_1, t_3) = b_0 + b_1 t_1 + b_3 t_3 + b_{13} t_1 t_3$ vyjadrené v poslednom člene $b_{13} t_1 t_3$. Testujeme nulovosť tohto člena regresného modelu pomocou koeficientu b_{13} . Postupujeme rovnako ako v predchádzajúcich prípadoch. Číselné hodnoty potrebné k testovaniu hypotéz berieme z riadku, ktorý predstavuje interakciu kódovaných faktorov t_1 a t_3 , obr. 117.

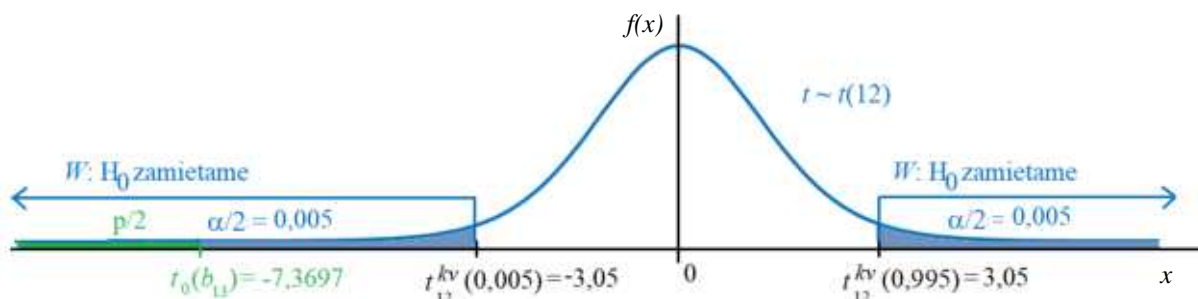
	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%	Lower 99,0%	Upper 99,0%
Intercept	776,0625	10,42276905	74,45838	2,29E-17	753,353237	798,771763	744,225739	807,8992607
t1	-50,8125	10,42276905	-4,87514	0,000382	-73,521763	-28,1032371	-82,649261	-18,9757393
t3	153,0625	10,42276905	14,6854	4,95E-09	130,353237	175,771763	121,225739	184,8992607
t1*t3	-76,8125	10,42276905	-7,36968	8,62E-06	-99,521763	-54,1032371	-108,64926	-44,9757393

Obr. 117 Tabuľka s bodovými odhadmi koeficientov a im prislúchajúcimi hodnotami

Ak o výsledku testu rozhodujeme pomocou kritickej oblasti $W = (-\infty; -3,05) \cup (3,05; \infty)$, kde 99,5% kvantil Studentovho rozdelenia $t_{12}^{kv}(0,995) = T.INV(0,995; 12) = 3,05$, potom platí $|t_0(b_{13})| = \left| \frac{-76,8125}{10,42276905} \right| = 7,3697 > 3,05 = t_{12}^{kv}(0,995)$. Z grafického riešenia pre test hypotézy o koeficiente b_{13} v tabuľke na obr. 117 realizácia testovacej štatistiky $t_0(b_{13}) = -7,3697 \in W$, preto zamietame $H_0: b_{13} = 0$.

Rovnako p-hodnota $p = 8,62 \cdot 10^{-6} < 0,01 = \alpha$, preto zamietame $H_0: b_{13} = 0$.

P-hodnotu vieme vypočítať: $p(b_{13}) = 2 * \min\{F(t_0(b_{13})); 1 - F(t_0(b_{13}))\} = 2 * \min(T.DIST(-7,36968; 12; 1); 1 - T.DIST(-7,36968; 12; 1)) = 8,62 \cdot 10^{-6}$. P-hodnota je rovná dvojnásobku veľkosti plochy pod krivkou hustoty rozdelenia Studentovho rozdelenia $t(12)$ po realizáciu testovacej štatistiky $t_0(b_{13})$, vid' obr. 118.



Obr. 118 Grafické riešenie na testovanie hypotézy o koeficiente b_{13}

Výpočet 99% IS pre koeficient b_{13} je na obr. 119.

	H	I	J	K
102		b13=	153,0625	
103		SE(b13)=	10,42277	
104		t kv 12 (0,995)=	=T.INV(1-0,01/2;12)	
105		delta=	=J103*J104	
106		b13-delta=	=J102-J105	
107		b13+delta=	=J102+J105	

Obr. 119 Výpočet intervalu spoľahlivosti pre koeficient b_{13} v Exceli

Z tabuľky na obr. 117 je 99% IS pre koeficient b_{13} : $(-108,6493; -44,9757)$.



Obr. 120 Číslo 0 nepatrí do 98% IS pre koeficient b_{13}

Keďže $0 \notin (-108,6493; -44,9757)$, so spoľahlivosťou 99% môžeme testovanú hypotézu $H_0 : b_{13} = 0$ zamietnuť.

Záver:

Na hladine významnosti $\alpha = 0,01$ možno konštatovať, že regresný koeficient b_{13} je štatisticky významný, t. j. spoločný vplyv faktorov t_1 a t_3 na hodnotu transformovanej regresnej funkcie $(f_L)_t(t_1, t_2, t_3)$ je štatisticky významný, teda ho nemožno zanedbať. Interakcia medzi medzerou medzi elektródami a výkonom na katóde je dôležitá pre rýchlosť nitridového leptania.

Kvalita modelu vyjadrená pomocou R^2 , upraveného R^2_{adj} a prediktívneho R^2_{pred}

Kvalitu získaného regresného modelu môžeme charakterizovať pomocou indexu determinácie (koeficientu determinácie) R^2 . Hodnota R^2 je súčasťou výstupu regresnej analýzy v časti Regresné štatistiky uvedená ako *R Square*, obr. 121.

SUMMARY OUTPUT	
Regression Statistics	
Multiple R	0,98017906
R Square	0,96075098
Adjusted R Square	0,95093873
Standard Error	41,6910762
Observations	16

Obr. 121 Štatistiky R^2 a adjusted R^2 týkajúce sa získaného regresného modelu ako výstup regresnej analýzy v Exceli

Číselnú hodnotu indexu determinácie vieme vypočítať aj z tabuľky ANOVA (obr. 122), pretože R^2 vyjadruje, aký je podiel variability závislej premennej, ktorý vieme vyjadriť získaným regresným modelom. V našom prípade suma štvorcov odchýlok nameraných hodnôt rýchlosti nitridového leptania od celkového priemeru je $SSTotal = 531\,420,9375$. Z toho variabilita vysvetlená regresným modelom je $SS\,Regression = 510\,563,1875$.

ANOVA					
	df	SS	MS	F	Significance F
Regression	3	510563,1875	170187,7	97,91338	1,05389E-08
Residual	12	20857,75	1738,146		
Total	15	531420,9375			

Obr. 122 ANOVA ako súčasť výstupu regresnej analýzy v Exceli

Podiel variability pozorovaných dát, ktorú vieme vysvetliť získaným modelom je $R^2 = \frac{510\,563,1875}{531\,420,9375} = 0,960751$, čo interpretujeme nasledovne: 96,1% variability nameraných hodnôt pri nitridovom leptaní vieme vysvetliť regresným modelom (regresnou funkciou lineárneho typu), iba 3,9% variability nameraných hodnôt zostalo modelom nevysvetlenej.

Hodnotiť kvalitu modelu iba podľa indexu determinácie R^2 nie je správne, pretože pridaním prediktorov (členov v regresnom modeli) R^2 vždy narastie. Väčšiu výpovednú hodnotu má pre nás upravený index determinácie R^2_{adj} uvedený v tabuľke na obr. 121 ako *Adjusted R Square*. $R^2_{adj} = 0,95093873$ tiež vyjadruje mieru zhody nameraných dát a fitovaných hodnôt (95,1%), ale zohľadňuje pritom počet členov (prediktorov) v modeli. Upravený index determinácie R^2_{adj} penalizuje model za členy, ktoré sú v ňom navyše, preto po vylúčení nevýznamných faktorov a interakcií R^2_{adj} narastie, viď obr. 123. Medzi R^2 a R^2_{adj} by nemal byť „veľký rozdiel“ (v opačnom prípade očakávame prítomnosť nevýznamných členov v modeli).

povodny model (pred vylucenim)		hierarchicky model (po vyluceni)	
Regression Statistics		Regression Statistics	
Multiple R	0,982899	Multiple R	0,9801791
R Square	0,96609	R Square	0,960751
Adjusted R Square	0,936419	Adjusted R Square	0,9509387
Standard Error	47,46117	Standard Error	41,691076
Observations	16	Observations	16

Obr. 123 Po odstránení nevýznamných členov z regresného modelu upravený index determinácie narastie

Prediktívne R_{pred}^2 určuje ako presne vie model predikovať správnu hodnotu po odstránení daného údaju zo súboru dát (93,02%). V našom prípade môžeme hovoriť, že náš model vie v rámci experimentálneho priestoru veľmi dobre predikovať dáta. Veľký rozdiel medzi R^2 a R_{pred}^2 naznačuje, že v regresnom modeli je zbytočne veľa členov v pomere k množstvu dát. Možné zdôvodnenie je, že buď sú dáta zlé, alebo boli zvolené nesprávne nezávislé premenné. Excel prediktívnu hodnotu R_{pred}^2 nepočíta. Výstup z Minitabu je na obr. 124.

Model Summary			
S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)
41,6911	96,08%	95,09%	93,02%

Obr. 124 Výstup Minitabu s R^2 , upraveným R^2 a prediktívnym R^2

Kvalita modelu vyjadrená celkovým F testom štatistickej významnosti regresného modelu

Kvalitu modelu vieme vyhodnotiť tiež celkovým F testom štatistickej významnosti regresného modelu, testom adekvátnosti (testom Lack of Fit) a analýzou rezíduí.

Celkovým F testom štatistickej významnosti nášho regresného modelu $(f_L)_t(t_1, t_3) = b_0 + b_1 t_1 + b_3 t_3 + b_{13} t_1 t_3$ testujeme nulovú hypotézu, že regresný model nie je štatisticky významný, t. j. všetky jeho koeficienty sú nulové oproti alternatívnej hypotéze, že regresný model je štatisticky významný, t. j. aspoň jeden koeficient je nenulový:

$$H_0: b_1 = b_3 = b_{13} = 0 \leq H_1: \text{existuje aspoň jedno } b_i \neq 0$$

Pri celkovom F teste štatistickej významnosti regresného modelu pre testovaciu charakteristiku (štatistiku) platí:

$$F = \frac{\frac{SSR}{k}}{\frac{SSE}{n - k - 1}} \sim F(k; n - k - 1),$$

kde n je počet nameraných dát ($n = m \cdot 2^k$) a k je počet členov v regresnom modeli. Čítame testovacia štatistika F má Fisherovo rozdelenie so stupňami voľnosti k , $n - k - 1$. Testovacia štatistika porovnáva rozptyl dát vysvetlený regresným modelom s rozptylom, ktorý zostal modelom nevysvetlený. Čím je tento podiel väčší, tým regresný model lepšie vystihuje správanie skúmaných dát. Preto je tento test jednostranný (pravostranný).

Realizáciu testovacej štatistiky, stupne voľnosti, p-hodnotu vieme získať z regresnej analýzy z tabuľky ANOVA na obr. 125. Pri výpočte testovacej štatistiky používame hodnoty $SSR = SS$ Regression, a $SSE = SS$ Residual a údaje z nich vypočítané.

ANOVA					
	df	SS	MS	F	Significance F
Regression	3	510563,1875	170187,7	97,91338	1,05389E-08
Residual	12	20857,75	1738,146		
Total	15	531420,9375			

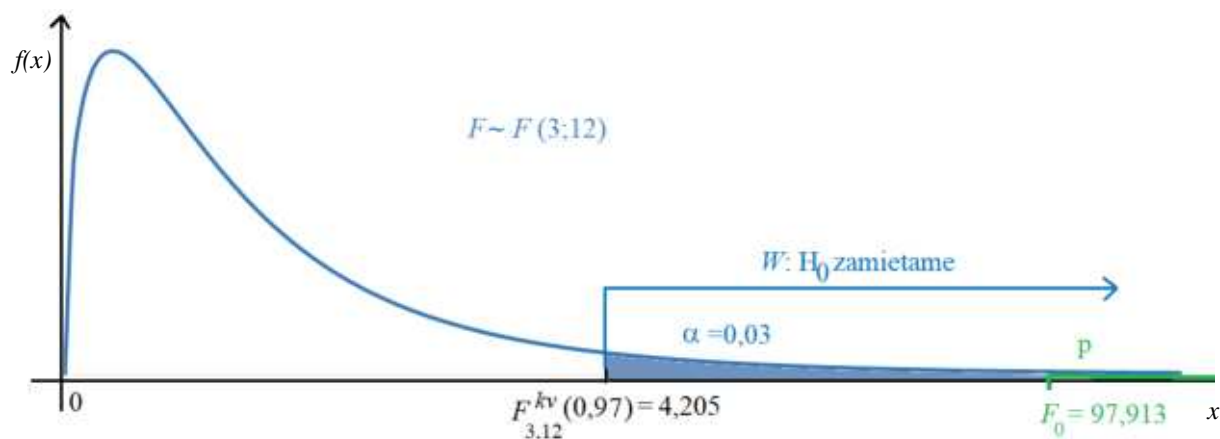
Obr. 125 ANOVA ako súčasť výstupu regresnej analýzy v Exceli

Ak zvolíme napr. $\alpha = 0,03$, potom kritická oblasť bude ohraničená kritickou hodnotou $F_{(3,12)}^{kv}(0,97)$. Jej hodnotu vypočítame ako 97% kvantil Fisherovho-Snedecorovho rozdelenia $F.INV(0,97; 3; 12) = 4,205$. Kritická oblasť $W = (4,205; \infty)$.

Realizácia testovacej štatistiky F_0 sa nachádza v tabuľke na obr.125 v stĺpci F:

$$F_0 = \frac{\frac{510\,563,1875}{3}}{\frac{20\,857,75}{12}} = \frac{170\,187,7}{1\,738,146} = 97,91338 > 4,205 = F_{(3,12)}^{kv}(0,97)$$

Pretože $F_0 = 97,91338 \in W$ (viď obr. 126), zamietame $H_0: b_1 = b_3 = b_{13} = 0$ a prijímame alternatívnu hypotézu H_1 : existuje aspoň jedno $b_i \neq 0$.



Obr. 126 Grafické riešenie pre celkový F test o štatistickej významnosti regresného modelu

Pri vyhodnotení podľa p-hodnoty jej číselnú hodnotu nájdeme v tabuľke na obr.125 v stĺpci Significance F, alebo vypočítame pomocou distribučnej funkcie v realizácii testovacej štatistiky F_0 : $p = 1 - F(F_0) = 1 - F.DIST(97,91338; 3; 12; 1) = 1,054 \cdot 10^{-8}$.

Ak p-hodnotu porovnáme so zvolenou hladinou významnosti $\alpha = 0,03$, dostaneme rovnaký záver o tom, že zamietame $H_0: b_1 = b_3 = b_{13} = 0$ a prijímame alternatívnu hypotézu H_1 : existuje aspoň jedno $b_i \neq 0$.

Záver:

Na hladine významnosti $\alpha = 0,03$ možno konštatovať, že regresný model lineárneho typu je štatisticky významný.

F test štatistickej významnosti prínosu k -tej vysvetľujúcej premennej

Súčasťou ANOVY, ktorá obsahuje celkový F test štatistickej významnosti regresného modelu, zvyčajne bývajú aj F testy štatistickej významnosti prínosu k -tych vysvetľujúcich premenných. Rovnako ako pri individuálnych t-testoch štatistickej významnosti regresných koeficientov na základe uvedených testov vieme rozhodnúť, ktorý faktor a interakciu faktorov v regresnom modeli ponechávame ako signifikantné, ktoré členy z modelu je možné vylúčiť. Uvedeným testom testujeme prínos, ktorým dodatočne prispieva k -ta vysvetľujúca premenná k vysvetleniu variability závislej premennej. Význam tohto testu spočíva v tom, že v prípade zamietnutia nulovej hypotézy pri F -teste štatistickej významnosti regresného modelu uvedeného ďalej chceme vedieť, ktorá zo vstupných premenných má štatisticky významný a nevýznamný vplyv na závislú premennú (chceme vedieť, ktoré konkrétne premenné štatisticky významne prispievajú k modelu). Označením dodatočný príspevok k -tej vysvetľujúcej premennej rozumieme prínos tejto premennej za predpokladu, že sa už prv uvažovalo s $(k - 1)$ nezávislými (vysvetľujúcimi) premennými.

Testované hypotézy sú:

H_0 : Dodatočný príspevok k -tej vysvetľujúcej premennej na vysvetlenie variability vysvetľovanej premennej nie je štatisticky významný.

H_1 : Dodatočný príspevok k -tej vysvetľujúcej premennej na vysvetlenie variability vysvetľovanej premennej je štatisticky významný.

Testovacia štatistika:

$$F = \frac{\frac{SSR_{\text{úplný model}} - SSR_{\text{redukovaný model}}}{1}}{\frac{SSE_{\text{úplný model}}}{n - k - 1}} \sim F(1; n - k - 1),$$

kde $SSR_{\text{úplný model}}$ je suma štvorcov odchýlok od celkového priemeru vysvetlená úplným regresným modelom s k prediktormi, $SSR_{\text{redukovaný model}}$ je suma štvorcov odchýlok vysvetlená redukovaným regresným modelom s $k - 1$ prediktormi, ich rozdiel nazývame príspevok k -tej vysvetľujúcej premennej, n je počet nameraných dát a k je počet členov (prediktorov, vysvetľujúcich premenných) v úplnom regresnom modeli. Tento test je pravostranný, nakoľko chceme, aby bol prínos k -tej vysvetľujúcej premennej čo najväčší, v opačnom prípade je možné k -tu vysvetľujúcu premennú z modelu vylúčiť.

Výsledok uvedeného testu významnosti prínosu vieme získať v Minitabe, Excel tento test neposkytuje. Jeho závery týkajúce sa ponechania alebo vylúčenia člena z modelu sú totožné s výsledkom t-testu štatistickej významnosti regresného modelu, napriek tomu, že oba testy sú založené na inom princípe, t. j. testujú niečo iné.

ANOVA z Minitabu na obr. 127 poskytuje výsledky F testu štatistickej významnosti prínosu pre nami zvolené (ponechané) premenné. Ukážka výpočtu hodnoty príspevku cez rozdiel SSR pre model s k -tou vysvetľujúcou premennou a bez nej pre transformovaný faktor t_1 – medzera medzi elektródami v Exceli je na obr. 128.

Analysis of Variance

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	3	510563	170188	97,91	0,000
Linear	2	416161	208080	119,71	0,000
medzera	1	41311	41311	23,77	0,000
vykon na katode	1	374850	374850	215,66	0,000
2-Way Interactions	1	94403	94403	54,31	0,000
medzera*vykon na katode	1	94403	94403	54,31	0,000
Error	12	20858	1738		
Lack-of-Fit	4	2837	709	0,31	0,860
Pure Error	8	18021	2253		
Total	15	531421			

Obr. 127 Výstup Minitabu pre F test o štatistickej významnosti prínosu faktora medzera

Chceme za predpokladu, že sa už v predchádzajúcej časti uvažovalo o ostatných členoch modelu napr. na hladine významnosti 0,1, overiť štatistickú významnosť prínosu premennej medzery medzi elektródami na vysvetlenie variability rýchlosti nitridového leptania.

Testované hypotézy pre F test o štatistickej významnosti prínosu faktora medzera medzi elektródami sú:

H_0 : Dodatočný príspevok faktora medzera na vysvetlenie variability rýchlosti nitridového leptania nie je štatisticky významný.

H_1 : Dodatočný príspevok faktora medzera na vysvetlenie variability rýchlosti nitridového leptania je štatisticky významný.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2		t1	t3	t1*t3	yi	t1:	y predik s t1	y predik bez t1	(delta s t1)^2	(delta bez t1)^2
3	-1	-1	=A3*B3	550			=\$G\$25+\$G\$26*A3+\$G\$27*B3+\$G\$28*C3	=\$H\$25+\$H\$26*B3+\$H\$27*C3	=(G3-\$G\$25)^2	=(H3-\$G\$25)^2
4	-1	-1	=A4*B4	604			=\$G\$25+\$G\$26*A4+\$G\$27*B4+\$G\$28*C4	=\$H\$25+\$H\$26*B4+\$H\$27*C4	=(G4-\$G\$25)^2	=(H4-\$G\$25)^2
5	1	-1	=A5*B5	669			=\$G\$25+\$G\$26*A5+\$G\$27*B5+\$G\$28*C5	=\$H\$25+\$H\$26*B5+\$H\$27*C5	=(G5-\$G\$25)^2	=(H5-\$G\$25)^2
6	1	-1	=A6*B6	650			=\$G\$25+\$G\$26*A6+\$G\$27*B6+\$G\$28*C6	=\$H\$25+\$H\$26*B6+\$H\$27*C6	=(G6-\$G\$25)^2	=(H6-\$G\$25)^2
7	-1	-1	=A7*B7	633			=\$G\$25+\$G\$26*A7+\$G\$27*B7+\$G\$28*C7	=\$H\$25+\$H\$26*B7+\$H\$27*C7	=(G7-\$G\$25)^2	=(H7-\$G\$25)^2
8	-1	-1	=A8*B8	601			=\$G\$25+\$G\$26*A8+\$G\$27*B8+\$G\$28*C8	=\$H\$25+\$H\$26*B8+\$H\$27*C8	=(G8-\$G\$25)^2	=(H8-\$G\$25)^2
9	1	-1	=A9*B9	642			=\$G\$25+\$G\$26*A9+\$G\$27*B9+\$G\$28*C9	=\$H\$25+\$H\$26*B9+\$H\$27*C9	=(G9-\$G\$25)^2	=(H9-\$G\$25)^2
10	1	-1	=A10*B10	635			=\$G\$25+\$G\$26*A10+\$G\$27*B10+\$G\$28*C10	=\$H\$25+\$H\$26*B10+\$H\$27*C10	=(G10-\$G\$25)^2	=(H10-\$G\$25)^2
11	-1	1	=A11*B11	1037			=\$G\$25+\$G\$26*A11+\$G\$27*B11+\$G\$28*C11	=\$H\$25+\$H\$26*B11+\$H\$27*C11	=(G11-\$G\$25)^2	=(H11-\$G\$25)^2
12	-1	1	=A12*B12	1052			=\$G\$25+\$G\$26*A12+\$G\$27*B12+\$G\$28*C12	=\$H\$25+\$H\$26*B12+\$H\$27*C12	=(G12-\$G\$25)^2	=(H12-\$G\$25)^2
13	1	1	=A13*B13	749			=\$G\$25+\$G\$26*A13+\$G\$27*B13+\$G\$28*C13	=\$H\$25+\$H\$26*B13+\$H\$27*C13	=(G13-\$G\$25)^2	=(H13-\$G\$25)^2
14	1	1	=A14*B14	868			=\$G\$25+\$G\$26*A14+\$G\$27*B14+\$G\$28*C14	=\$H\$25+\$H\$26*B14+\$H\$27*C14	=(G14-\$G\$25)^2	=(H14-\$G\$25)^2
15	-1	1	=A15*B15	1075			=\$G\$25+\$G\$26*A15+\$G\$27*B15+\$G\$28*C15	=\$H\$25+\$H\$26*B15+\$H\$27*C15	=(G15-\$G\$25)^2	=(H15-\$G\$25)^2
16	-1	1	=A16*B16	1063			=\$G\$25+\$G\$26*A16+\$G\$27*B16+\$G\$28*C16	=\$H\$25+\$H\$26*B16+\$H\$27*C16	=(G16-\$G\$25)^2	=(H16-\$G\$25)^2
17	1	1	=A17*B17	729			=\$G\$25+\$G\$26*A17+\$G\$27*B17+\$G\$28*C17	=\$H\$25+\$H\$26*B17+\$H\$27*C17	=(G17-\$G\$25)^2	=(H17-\$G\$25)^2
18	1	1	=A18*B18	860			=\$G\$25+\$G\$26*A18+\$G\$27*B18+\$G\$28*C18	=\$H\$25+\$H\$26*B18+\$H\$27*C18	=(G18-\$G\$25)^2	=(H18-\$G\$25)^2
19									SS: =SUM(I3:I18)	=SUM(J3:J18)
20										
21										
22										
23										
24										
25										
26										
27										
28										

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	po vyluceni statisticky nevyznamnych faktorov:						t1:			
2		t1	t3	t1*t3	yi		y predik s t1	y predik bez t1	(delta s t1)^2	(delta bez t1)^2
3	-1	-1	-1	1	550		597	546,1875	32063,37891	52842,51563
4	-1	-1	-1	1	604		597	546,1875	32063,37891	52842,51563
5	1	-1	-1	-1	669		649	699,8125	16144,87891	5814,0625
6	1	-1	-1	-1	650		649	699,8125	16144,87891	5814,0625
7	-1	-1	-1	1	633		597	546,1875	32063,37891	52842,51563
8	-1	-1	-1	1	601		597	546,1875	32063,37891	52842,51563
9	1	-1	-1	-1	642		649	699,8125	16144,87891	5814,0625
10	1	-1	-1	-1	635		649	699,8125	16144,87891	5814,0625
11	-1	1	1	-1	1037		1056,75	1005,9375	78785,47266	52842,51563
12	-1	1	1	-1	1052		1056,75	1005,9375	78785,47266	52842,51563
13	1	1	1	1	749		801,5	852,3125	647,0664063	5814,0625
14	1	1	1	1	868		801,5	852,3125	647,0664063	5814,0625
15	-1	1	1	-1	1075		1056,75	1005,9375	78785,47266	52842,51563
16	-1	1	1	-1	1063		1056,75	1005,9375	78785,47266	52842,51563
17	1	1	1	1	729		801,5	852,3125	647,0664063	5814,0625
18	1	1	1	1	860		801,5	852,3125	647,0664063	5814,0625
19									SS: 510563,1875	469252,625
20										
21										
22										
23										
24										
25										
26										
27										
28										

Obr. 128 Výpočet prínosu t_1 pre F test o štatistickej významnosti prínosu t_1

Pre výpočet hodnoty testovacej štatistiky je potrebné dopočítať sumu reziduálnych štvorcov pre úplný model, t. j. s k vysvetľujúcimi premennými:

$SSE_{\text{úplný model}} = SS_{\text{Total}} - SSR_{\text{úplný model}}$, kde SS_{Total} je celková suma štvorcov odchýlok od priemeru, $SSR_{\text{úplný model}}$ je suma štvorcov odchýlok od celkového priemeru vysvetlená úplným regresným modelom s k prediktormi. Výpočet týchto hodnôt v Exceli je na obr. 129.

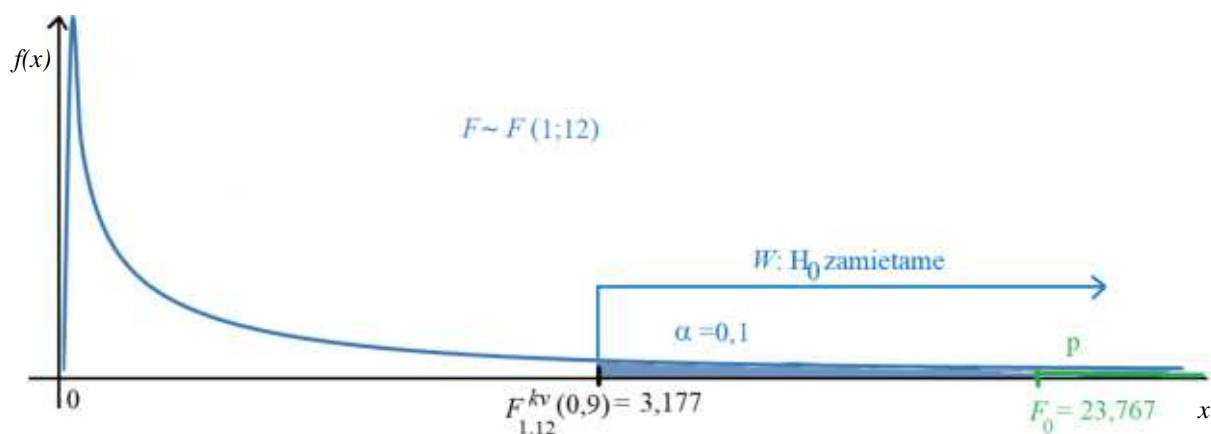
	A	B	C		A	B	C	D	E	F
1	ANOVA				1	ANOVA				
2		df	SS		2		df	SS	MS	F
3	Regression	3	510563,1875		3	Regression	3	510563,2	170187,7	97,91338
4	Residual	12	20857,75		4	Residual	12	20857,75	1738,146	1,05389E-08
5	Total	15	531420,9375		5	Total	15	531420,9		
6					6					
7					7					
8	prinos t1	41310,5625			8	prinos t1:	41310,56			
9	SSR pre t1	510563,1875			9	SSR pre t1:	510563,2			
10	SSE(t1):	=C5-B9			10	SSE(t1):	20857,75			
11	F0=	=(B8/1)/(B10/(16-3-1))			11	F0=	23,76703			

Obr. 129 Výpočet SSE pre úplný model pre F test o štatistickej významnosti prínosu t_1

$$\text{Realizácia testovacej štatistiky } F_0(t_1) = \frac{\frac{41\,310,56}{1}}{\frac{20\,857,75}{16-3-1}} = 23,76703.$$

Kritická oblasť bude pre $\alpha = 0,1$ ohraničená kritickou hodnotou $F_{(1,12)}^{kv}(0,9)$. Jej hodnotu vypočítame ako 90% kvantil Fisherovho rozdelenia, t. j. $F.INV(0,9; 1; 12) = 3,176549$. Kritická oblasť je potom $W = (3,177; \infty)$.

Pretože vypočítaná hodnota testovacej štatistiky $F_0(t_1) = 23,767$ leží v kritickej oblasti W (viď obr. 130), zamietame nulovú hypotézu H_0 a prijímame alternatívnu hypotézu H_1 .



Obr. 130 Grafické riešenie pre F test o štatistickej významnosti prínosu t_1

Pri vyhodnotení podľa p -hodnoty: $p = 1 - F(F_0) = 1 - F.DIST(23,767; 1; 12; 1) = 0,000382$. Vo výstupe Minitabu v časti ANOVA sa nachádza P-Value rovná 0,000 nakoľko daný softvér uvádza výsledky iba v tvare desatinného čísla s maximálne tromi platnými číslicami. Ak p -hodnotu porovnáme so zvolenou hladinou významnosti $\alpha = 0,1$, dostaneme rovnaký záver, t. j. zamietame H_0 a prijímame alternatívnu hypotézu H_1 .

Záver:

Na hladine významnosti $\alpha = 0,1$ za predpokladu, že sa už uvažovalo s premennou t_3 -výkon na katóde a interakciou t_1 a t_3 , t. j. vzájomným pôsobením faktorov medzera na elektróde a výkon na katóde, možno považovať dodatočný prínos premennej t_1 - medzera medzi elektródami štatisticky významný.

Obdobným spôsobom je možné testovať dodatočný prínos všetkých ostatných členov modelu, t. j. všetkých prediktorov.

Kvalita regresného modelu vyjadrená testom dostatočného prispôsobenie regresného modelu (testom Lack of Fit)

Pri teste Lack of Fit testujeme adekvátnosť (dostatočnosť) regresného modelu. Vzhľadom na to, že merania boli robené iba na dvoch úrovniach, je potrebné doplniť opakované merania (zvyčajne 3-5) v centrálnom bode so súradnicami [1cm; 162,5 cm³/min; 300 W]. Nech boli namerané tieto hodnoty: 779; 770; 775; 777; 760 [10⁻¹⁰ m/min].

Nech zvolená hladina významnosti je $\alpha = 0,05$.

Testované hypotézy pri tomto teste:

Nulová hypotéza je $H_0: SSLF = SSPE$. Možný je tiež zápis: No LOF – regresný model nie je nedostatočný.

Alternatívna hypotéza $H_1: SSLF > SSPE$, resp. iný zápis: LOF – regresný model je nedostatočný.

Testovacia štatistika:

$$F = \frac{\frac{SSLF}{df_{LF}}}{\frac{SSPE}{df_{PE}}} = \frac{MSLF}{MSPE} \sim F(df_{LF}; df_{PE}),$$

Pri tomto druhu testu rezíduá, resp. sumu štvorcov reziduálnych odchýlok SSE rozdeľujeme na také, ktoré vznikli chybou merania, t. j. v dôsledku čistej chyby (pure error), a také, ktoré vznikli z dôvodu nedostatočného prispôsobenia regresného modelu (lack of fit). V tomto prípade bude model tým lepšie vystihovať správanie dát, čím bude suma štvorcov odchýlok spôsobená nedostatočnosťou modelu čo najmenšia.

Excel výpočet testu Lack of Fit neposkytuje. Ukážka výpočtu veľkosti čistej chyby PE napr. pre bod [-1;-1] a prislúchajúce stupne voľnosti df je na obr. 131. Stupne voľnosti určíme ako počet meraní v danom bode zmenšený o jedna.

	A	B	C	D	E	F
1	po vylúčení statisticky nevýznamných faktorov:					
2	t1	t3	t1*t3	yi	PE	df pre PE
3	-1	-1	1	550	=DEVSQ(D3:D4;D7:D8)	3
4	-1	-1	1	604		
5	1	-1	-1	669	=DEVSQ(D5:D6;D9:D10)	3
6	1	-1	-1	650		
7	-1	-1	1	633		
8	-1	-1	1	601		
9	1	-1	-1	642		
10	1	-1	-1	635		
11	1	1	1	1037	=DEVSQ(D11:D12;D15:D16)	3
12	1	1	1	1052		
13	1	1	1	749	=DEVSQ(D13:D14;D17:D18)	3
14	1	1	1	868		
15	-1	1	-1	1075		
16	-1	1	-1	1063		
17	1	1	1	729		
18	1	1	1	860		
19	0	0	0	779	=DEVSQ(D19:D23)	4
20	0	0	0	770		
21	0	0	0	775		
22	0	0	0	777		
23	0	0	0	760		
24	=SUM(E3:E23)					16

	A	B	C	D	E	F
1	po vylúčení statisticky nevýznamných faktorov:					
2	t1	t3	t1*t3	yi	PE	df pre PE
3	-1	-1	1	550	3570	3
4	-1	-1	1	604		
5	1	-1	-1	669	646	3
6	1	-1	-1	650		
7	-1	-1	1	633		
8	-1	-1	1	601		
9	1	-1	-1	642		
10	1	-1	-1	635		
11	1	1	1	1037	784,75	3
12	1	1	1	1052		
13	1	1	1	749	15857	3
14	1	1	1	868		
15	-1	1	-1	1075		
16	-1	1	-1	1063		
17	1	1	1	729		
18	1	1	1	860		
19	0	0	0	779	230,8	4
20	0	0	0	770		
21	0	0	0	775		
22	0	0	0	777		
23	0	0	0	760		
24					21088,55	16

Máme 4 namerané hodnoty v bode [-1;-1], preto stupne voľnosti df pre tento bod sú rovné $4-1=3$.

Čistá chyba PE v bode [-1;-1] je vyjadrená ako suma štvorcov odchýlok nameraných hodnôt y od priemernej nameranej hodnoty 597.

Súčet PE a df pre všetkých 5 experimentálnych bodov dosádzame do tabuľky ANOVA.

Obr. 131 Výpočet čistej chyby a výpočet stupňov voľnosti pre čistú chybu

Tabuľku ANOVA v Exceli doplníme o dva riadky, ktoré predstavujú rozklad sumy štvorca reziduálnych odchýlok $SSE = SSLF + SSPE$, obr. 132.

	A	B	C	D	E	F	G
145		df	SS	MS	F	F krit	Significance F
146	Regression	3	510563,1875	170187,729166667	136,82378175	=F.INV(0,95;B146;B147)	4,20574614802358E-12
147	Residual	17	21145,3839285714	1243,84611344538			
148	Lack of fit	=B147-B149	=C147-C149	=C148/B148	=D148/D149	=F.INV(0,95;B148;B149)	=1-F.DIST(E148;B148;B149;1)
149	Pure error	=F24	=E24	=C149/B149			
150	Total	20	531708,571428571				

	A	B	C	D	E	F	G
142	$\alpha = 0,05$						
143	test Lack of fit (LOF)						
144	ANOVA						
145		df	SS	MS	F	F krit	Significance F
146	Regression	3	510563,188	170187,7	136,8238	3,196777	4,20575E-12
147	Residual	17	21145,3839	1243,846			
148	Lack of fit	1	56,8339286	56,83393	0,04312	4,493998	0,838119093
149	Pure error	16	21088,55	1318,034			
150	Total	20	531708,571				

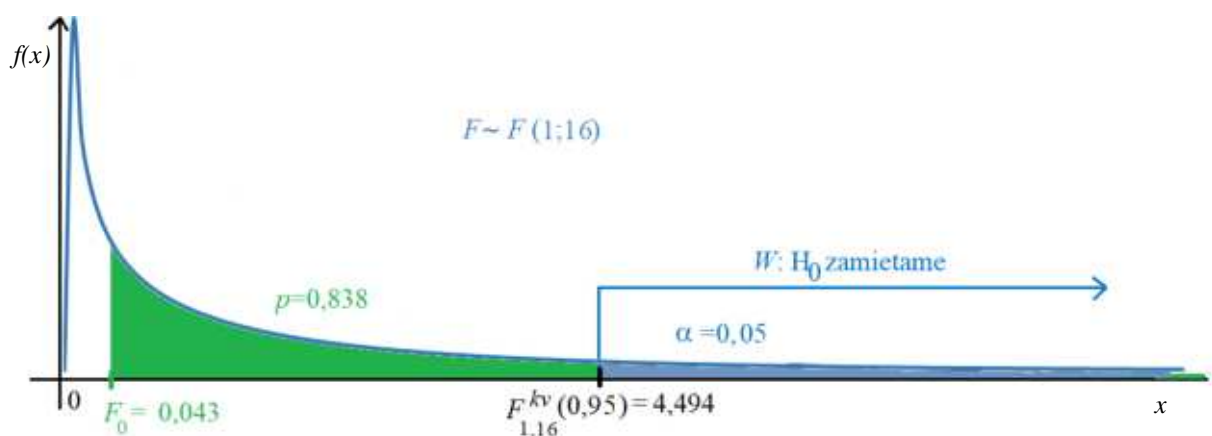
Obr. 132 Výpočet hodnôt potrebných pri teste Lack of Fit

Testovacia štatistika má Fisherovo-Snedecorovo rozdelenie s 1 a 16 stupňami voľnosti, pretože df_{PE} sme vypočítali rovné 16 a odtiaľ $df_{LF} = 17 - 16 = 1$.

$$\text{Realizácia testovacej štatistiky } F_0 = \frac{\frac{56,834}{21\,088,55}}{16} = \frac{56,834}{1\,318,034} = 0,04312$$

Test je jednostranný, preto kritická oblasť bude pre $\alpha = 0,05$ ohraničená kritickou hodnotou $F_{(1,16)}^{kv}(0,95)$. Jej hodnotu vypočítame ako 95% kvantil Fisherovho rozdelenia, t. j. $F.INV(0,95; 1; 16) = 4,493998$. Kritická oblasť je potom $W = (4,494; \infty)$.

Pretože vypočítaná hodnota testovacej štatistiky $F_0 = 0,043$ neleží v kritickej oblasti W (viď obr. 133), nezamietame, t. j. prijímame nulovú hypotézu H_0 .



Obr. 133 Grafické riešenie pre test o adekvátnosti regresného modelu

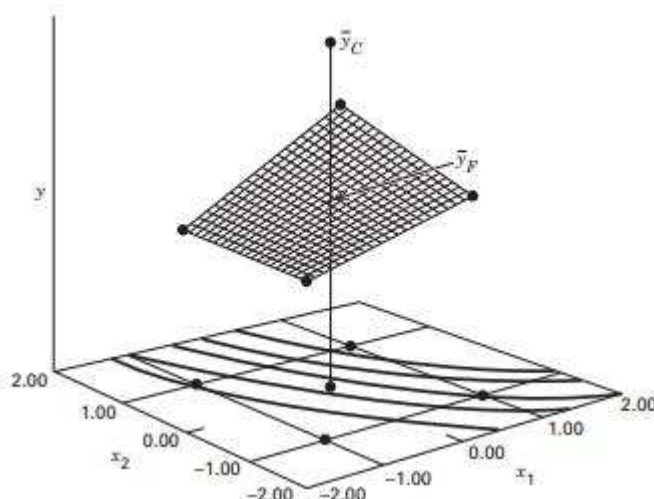
Pri vyhodnotení podľa p-hodnoty: $p = 1 - F(F_0) = 1 - F.DIST(0,043; 1; 16; 1) = 0,838119093$ túto hodnotu porovnávame so zvolenou hladinou významnosti $\alpha = 0,05$, pričom musíme dostať rovnaký záver, t. j. že nezamietame H_0 a zamietame alternatívnu hypotézu H_1 .

Záver:

Na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ možno konštatovať, že regresný model lineárneho typu nie je nedostatočný (je dostatočný) a nie je potrebné do modelu zaraďovať kvadratické členy.

Test krivosti

Na určenie toho, či je potrebné do modelu zaradiť kvadratické členy, sa používa aj test krivosti, ktorý porovnáva priemer odozvy vo faktoriálnych bodoch s nameraným priemerom odozvy v centrálnom bode, obr. 134.



Obr. 134 Experiment 2² s pridaným centrálnym bodom [9]

Všeobecný zápis úplného kvadratického modelu s k faktormi vyjadrenými v transformovaných jednotkách je $(\hat{f}_L)_t(t_1, t_2, t_3) = b_0 + \sum_{j=1}^k b_j t_j + \sum \sum_{i < j} b_{ij} t_i t_j + \sum_{j=1}^k b_{jj} t_j^2$. Chceme zistiť, či sú v regresnom modeli kvadratické členy signifikantné. Testujeme hypotézy:

Nulová hypotéza hovorí, že kvadratické členy v regresnom modeli nie sú potrebné, čo zapíšeme $H_0: \sum_{j=1}^k b_{jj} = 0$, alternatívna hypotéza tvrdí opak, t. j. $H_1: \sum_{j=1}^k b_{jj} \neq 0$.

Test je pravostranný.

Testovacia štatistika:

$$F = \frac{\frac{SSCPQ}{1}}{\frac{SSPE}{df_{PE}}} \sim F(1; df_{PE}), \text{ kde } SSCPQ = \frac{n_F n_C (\bar{y}_F - \bar{y}_C)^2}{n_F + n_C} \text{ je suma štvorcov čistého kvadratického}$$

zakrivenia a n_F je počet meraní vo faktoriálnych bodoch, n_C je počet replikácií v centrálnom bode, y_i sú namerané hodnoty v centrálnom bode, $\bar{y}_F$ je priemerná odozva vo faktoriálnych bodoch a $\bar{y}_C$ je priemerná odozva v centrálnom bode. Výpočet hodnoty testovacej štatistiky realizovaný v Exceli je na obr. 135. Čistú chybu PE bolo potrebné po pridaní nameraných hodnôt odozvy v centrálnom bode CP opätovne prepočítať, viď obr.136.

	A	B	C	D	E
1	central point	779		factorial point	1052
2		770			550
3		775			601
4		777			635
5		760			669
6	y priem=	=AVERAGE(B1:B5)			633
7	nC=	5			650
8					604
9					642
10	SSCPQ= ((E18*B7*(E17-B6)^2))/((E18*B7)				
11	F0= B10/(21088,55/16)				
12					749
13					860
14					868
15					1075
16					1063
17				y priem=	=AVERAGE(E1:E16)
18				nF=	16

	A	B	C	D	E
1	central point	779		factorial point	1052
2		770			550
3		775			601
4		777			635
5		760			669
6	y priem=	772,2			633
7	nC=	5			650
8					604
9					642
10	SSCPQ= 56,83393				
11	F0= 0,04312				
12					749
13					860
14					868
15					1075
16					1063
17				y priem=	776,0625
18				nF=	16

Obr. 135 Výpočet F_0 pri teste krivosti realizovaný v Exceli

	E	F	G	H	I
1	A	C	y	SS PE	df
2	-1	-1	550	=DEVSQ(G2:G3;G6;G7)	3
3	-1	-1	604		
4	1	-1	669	=DEVSQ(G4;G5;G8;G9)	3
5	1	-1	650		
6	-1	-1	633		
7	-1	-1	601		
8	1	-1	642		
9	1	-1	635		
10	-1	1	1037	=DEVSQ(G10;G11;G14;G15)	3
11	-1	1	1052		
12	1	1	749	=DEVSQ(G12;G13;G16;G17)	3
13	1	1	868		
14	-1	1	1075		
15	-1	1	1063		
16	1	1	729		
17	1	1	860		
18	0	0	779	=DEVSQ(G18:G22)	4
19	0	0	770		
20	0	0	775		
21	0	0	777		
22	0	0	760		
23				=SUM(H2:H22)	=SUM(I2:I22)

	E	F	G	H	I
1	A	C	y	SS PE	df
2	-1	-1	550	3570	3
3	-1	-1	604		
4	1	-1	669	646	3
5	1	-1	650		
6	-1	-1	633		
7	-1	-1	601		
8	1	-1	642		
9	1	-1	635		
10	-1	1	1037	784,75	3
11	-1	1	1052		
12	1	1	749	15857	3
13	1	1	868		
14	-1	1	1075		
15	-1	1	1063		
16	1	1	729		
17	1	1	860		
18	0	0	779	230,8	4
19	0	0	770		
20	0	0	775		
21	0	0	777		
22	0	0	760		
23				21088,55	16

Obr. 136 Výpočet čistej chyby PE pri teste krivosti

Test krivosti ako súčasť ANOVY v Minitabe je možné vidieť na obr. 137.

Analysis of Variance					
Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	4	510620	127655	96,85	0,000
Linear	2	416161	208080	157,87	0,000
A	1	41311	41311	31,34	0,000
C	1	374850	374850	284,40	0,000
2-Way Interactions	1	94403	94403	71,62	0,000
A*C	1	94403	94403	71,62	0,000
Curvature	1	57	57	0,04	0,838
Error	16	21089	1318		
Total	20	531709			

Obr. 137 Test krivosti realizovaný v Minitabe

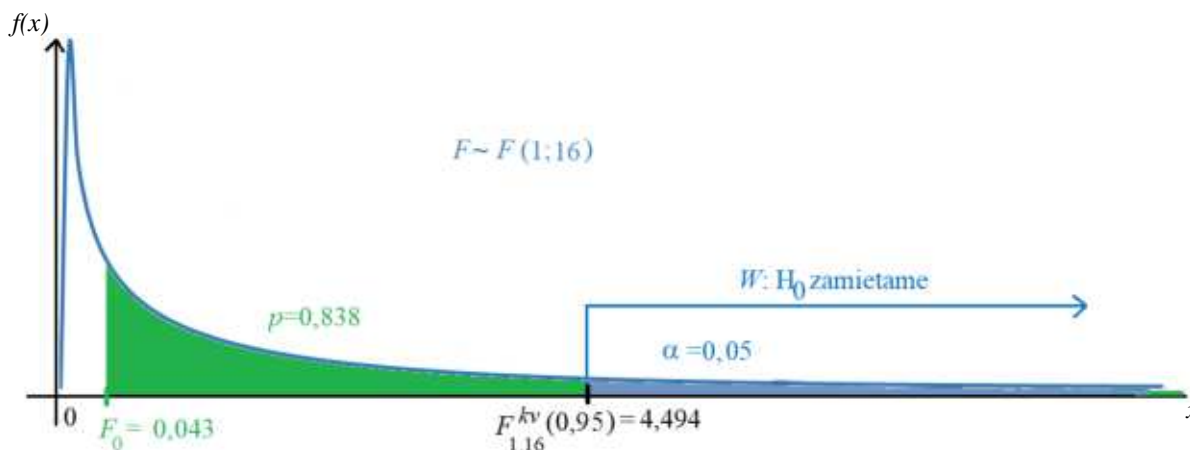
Realizácia testovacej štatistiky $F_0 = \frac{\frac{56,834}{1}}{\frac{21088,55}{16}} = 0,04312$.

Ak zvolíme $\alpha = 0,05$, potom je potrebné vypočítať $F_{1,16}^{kv}(0,95)$, pretože test je jednostranný. Túto hodnotu vypočítame ako 95% kvantil Fisherovho rozdelenia $F(1;16)$, teda $F.INV(0,95; 1; 16) = 4,493998$. Kritická oblasť je $W = (4,494; \infty)$. Pretože vypočítaná hodnota testovacej štatistiky $F_0 = 0,043$ neleží v kritickej oblasti W (viď obr. 138), nezamietame, teda prijímame nulovú hypotézu $H_0: \sum_{j=1}^k b_{jj} = 0$.

Pri vyhodnocovaní testu hypotéz podľa p-hodnoty:

$$p = 1 - F(F_0) = 1 - F.DIST(0,04312; 1; 16; 1) = 0,838119495.$$

Túto hodnotu porovnáваме so zvolenou hladinou významnosti $\alpha = 0,05$, pričom musíme dostať rovnaký záver, t. j. že nezamietame $H_0: \sum_{j=1}^k b_{jj} = 0$ a zamietame alternatívnu hypotézu $H_1: \sum_{j=1}^k b_{jj} \neq 0$.



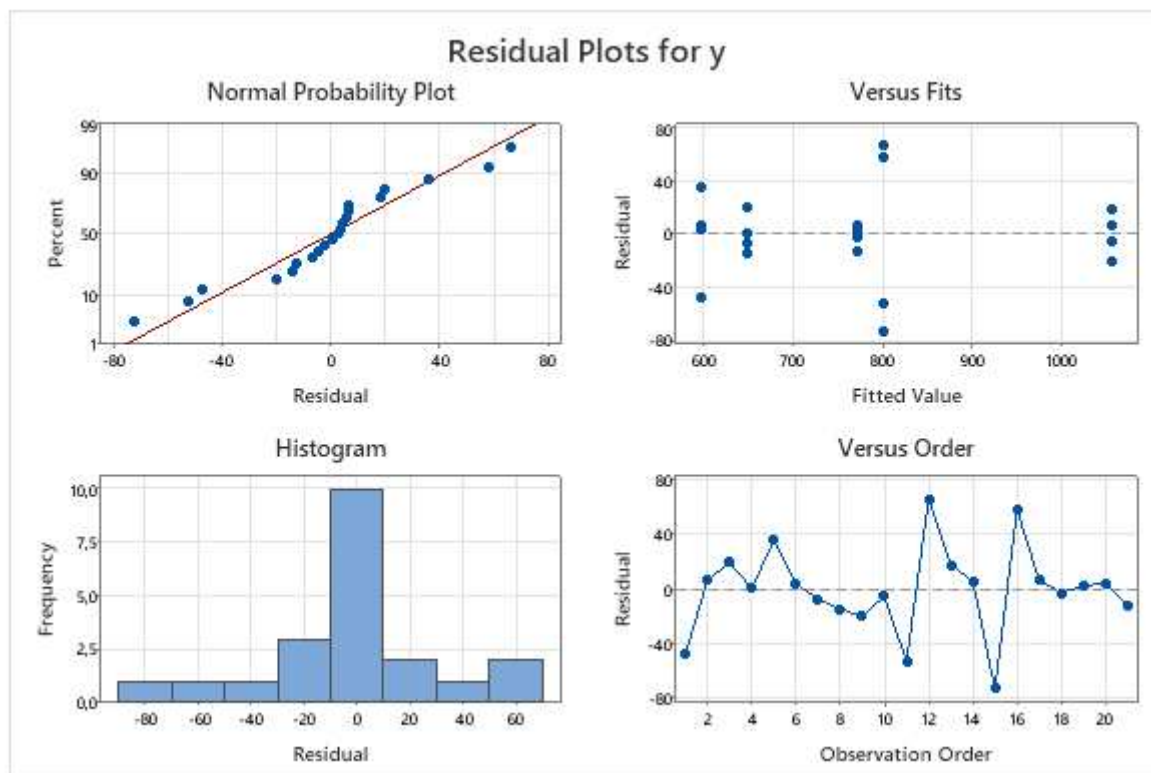
Obr. 138 Grafické riešenie pre test krivosti

Záver:

Na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ prijímame hypotézu, že do regresného modelu nie je potrebné zaraďovať kvadratické členy, nie je potrebný úplný kvadratický regresný model.

Grafická analýza rezíduí regresného modelu

Súčasťou posúdenia kvality akéhokoľvek regresného modelu by mala byť minimálne grafická analýza rezíduí, kedy vizuálne kontrolujeme normalitu a nezávislosť rezíduí. Výstup Minitabu s grafmi rezíduí je vidieť na obr. 139.



Obr. 139 Výstup Minitabu umožňujúci analýzu rezíduí

Vizuálnu kontrolu normálneho rozdelenia rezíduí umožňuje normálny pravdepodobnostný graf (Normal Probability Plot) a histogram (Histogram). Normálny pravdepodobnostný graf zobrazuje rozdelenie rezíduí oproti teoretickým kvantilom normálneho rozdelenia. Kvantily, t. j. percentily predstavujú podiel dát menších ako dané rezíduum, ak by rezíduá mali normálne rozdelenie. V ideálnom prípade by mali zobrazené body ležať na červenej diagonálnej priamke, čo interpretujeme ako splnenú normalitu analyzovaných dát. V tomto prípade sa rezíduá väčšinou nachádzajú blízko čiary, sú však viditeľné určité odchýlky v dolnej a hornej časti grafu, čo naznačuje mierne odchýlky od normálneho rozdelenia. Tieto odchýlky môžu naznačovať prítomnosť odľahlých hodnôt alebo systematických chýb. Ak na posúdenie normality rezíduí použijeme histogram, tento by mal mať pre normálne rozdelené rezíduá približne tvar zvona. Náš histogram ukazuje veľmi mierne asymetrické rozdelenie, čo môže naznačovať mierne skreslenie dát.

Graf rezíduí verzus fitované hodnoty (Residuals versus Fits) ukazuje, či existuje nejaká systematická závislosť medzi rezíduami a predikovanými hodnotami. Ideálne by rezíduá mali byť rozptýlené náhodne okolo nulovej osi dodržiavajúc zákon troch sigma. V našom prípade je viditeľný relatívne náhodný rozptyl rezíduí, ale je vidieť rôzne zhluky pre rôzne fitované hodnoty, čo môže naznačovať heteroskedasticitu (nekonzistentnosť rozptylu) rezíduí.

Z grafu rezíduí verzus poradie (Residuals vs Order) vieme zistiť, či existuje trend, nejaká funkčná závislosť v zaznamenanom časovom poradí rezíduí. Ideálne by mali byť hodnoty rezíduí náhodne rozptýlené, čo by naznačovalo absenciu autokorelácie. Správanie rezíduí v čase v našom prípade nenaznačuje žiadny trend. Rezíduá sú náhodne rozptýlené bez vzoru v poradí, čo naznačuje, že nie je prítomná autokorelácia.

Celkovo možno zhodnotiť, že grafy naznačujú, že model je vhodný a rezíduá majú požadované vlastnosti pre „dobré sediace“ model.

Test normality

Testy normality sú dôležité najmä preto, že mnohé štatistické testy a metódy predpokladajú splnenú podmienku normality dát. Existuje niekoľko rôznych testov normality, napr. test nulovej šikmosti, test nulovej špicatosti, kombinovaný test, Kolmogorov-Smirnov test a mnohé ďalšie. Každý z týchto testov má svoje špecifické podmienky a použitie. Cieľom testu normality v našom prípade je overiť, či rezíduá po fitovaní dát regresným modelom sledujú normálne rozdelenie, čo je dôležitý predpoklad pri analýze výsledkov regresného modelu pomocou ANOVY. V Minitabe sú k dispozícii, Ryan-Joiner test (modifikovaný Shapiro-Wilk test), Anderson-Darling test a Kolmogorov-Smirnovovho test:

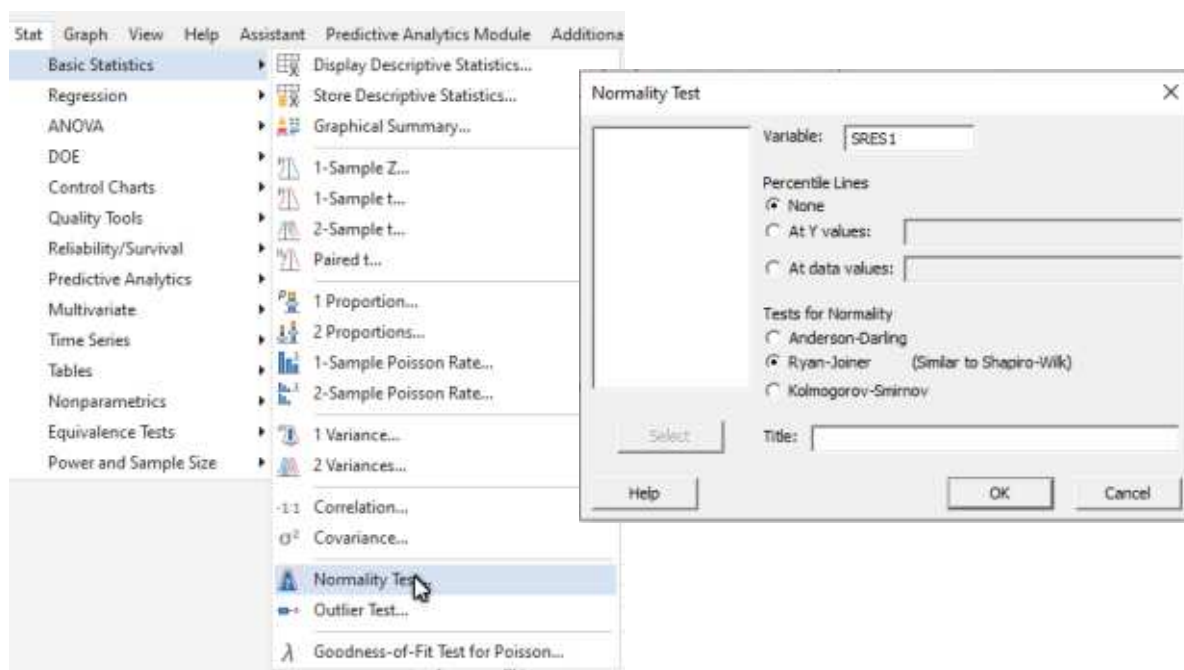
Shapiro-Wilk test (S-W test) je odporúčaný pre malé vzorky - zvyčajne do 50 údajov, pretože je citlivý na malé odchýlky od normality. Pre faktorový dizajn s replikáciami je Shapiro-Wilk test najčastejšie používaný vo väčšine štatistických programov (napríklad R, Python, SPSS atď.). Minitab poskytuje jeho modifikovanú verziu, tzv. **Ryan-Joiner test (R-J test)**. Shapiro-Wilk test (S-W test) sa zakladá na pomere variability, zatiaľ čo Ryan-Joiner test (R-J test) používa koreláciu medzi usporiadanými dátami a očakávanými kvantilmi.

Anderson-Darling test (A-D test) je tiež často používaný, najmä keď je dôležité zohľadniť extrémne hodnoty (outliers), pretože je citlivejší na odchýlky v chvostoch rozdelenia. Je považovaný za robustnejší ako Kolmogorov-Smirnov test (K-S test).

- Kolmogorov-Smirnov test (K-S test) môže byť použitý na zistenie zhody s normálnym rozdelením, avšak pre malé vzorky býva menej presný ako Shapiro-Wilk test.

Pri väčších vzorkách sú preferované Kolmogorov-Smirnov alebo Anderson-Darling, pretože poskytujú robustnejšie výsledky. Údaje by však nemali obsahovať extrémne odľahlé hodnoty (výrazne väčšie než očakávané rozmedzie 2 alebo 3 štandardné odchýlky od priemeru pre štandardizované rezíduá), pretože môžu výrazne ovplyvniť výsledky testu. Ak sú prítomné odľahlé hodnoty (Grubbsov a Dixonov test), je vhodné ich najskôr identifikovať a zvážiť ich vplyv.

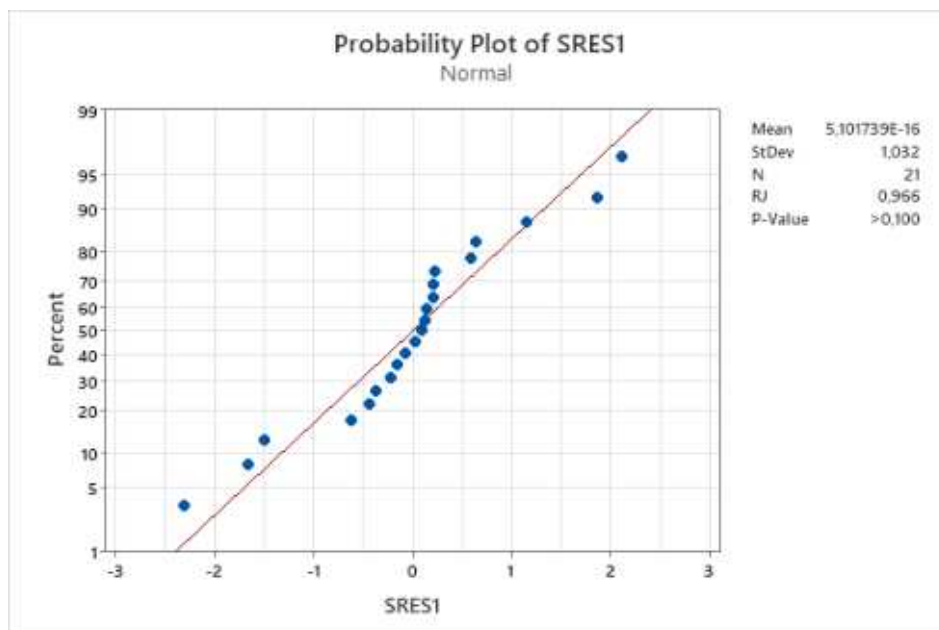
Pred testom normality rezíduí je potrebné hodnoty štandardizovaných rezíduí vypočítať a následne je možné ich rozdelenie testovať. Ponuka testov normality v Minitabe je na obr.140, štandardizované rezíduá boli zapísané v stĺpci SRES1. Excel v tomto prípade riešenie neposkytuje.



Obr. 140 Postup spustenia testov normality v Minitabe

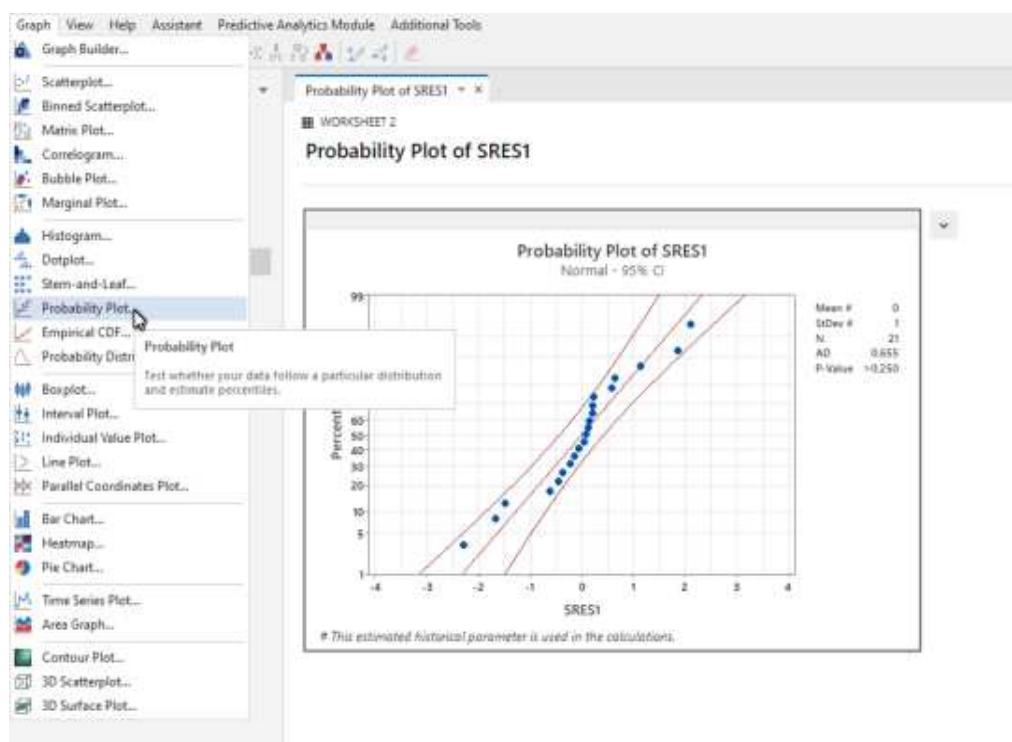
Výstup v podobe normálneho pravdepodobnostného grafu spolu s vypočítanou hodnotou testovacej štatistiky, p-hodnotou, parametrami rozdelenia a rozsahom súboru môžeme vidieť na obr. 141. Pre analyzovaných 21 hodnôt bola vypočítaná stredná hodnota $5,1 \cdot 10^{-16}$ a štandardná odchýlka 1,032. Na základe uvedeného analyzované dáta (štandardizované rezíduá) spĺňajú parametre štandardizovaného normálneho rozdelenia $N(0;1)$. Hodnota testovacej štatistiky je vyjadrená ako korelačný koeficient $r = 0,966$. Pretože vypočítaná p-hodnota $> 0,1$,

môžeme prijať nulovú hypotézu H_0 : Dáta pochádzajú z normálneho rozdelenia a zamietnuť alternatívnu hypotézu H_1 : Dáta nepochádzajú z normálneho rozdelenia.



Obr. 141 Normálny pravdepodobnostný graf s výstupom zvoleného Ryan-Joiner testu

K rovnakému záveru sa dostaneme pomocou grafického zobrazenia normálneho pravdepodobnostného grafu, kde je prednastavený Anderson-Darlingov test (obr. 142).



Obr. 142 Normálny pravdepodobnostný graf s výstupom Anderson-Darling testu

Grafy hlavných efektov faktorov a interakcií faktorov

Cieľom DOE býva porovnať veľkosť vplyvu faktorov a ich interakcií na skúmanú odozvu y . Porovnávame, ktoré faktory a interakcie medzi faktormi majú najvýznamnejší, t. j. najväčší vplyv na výslednú nameranú hodnotu experimentu. Veľkosť vplyvu faktora na odozvu kvantifikujeme efektom faktora. Hlavný efekt faktora A vyjadruje zmenu priemernej hodnoty odozvy, ktorá sa prejaví pri zmene úrovne tohto faktora z dolnej na hornú, keď ostatné faktory zostávajú konštantné, čo zapíšeme vzťahom $ef(A) = \bar{y}_{A+} - \bar{y}_{A-}$. Ak je hlavný efekt faktora kladný, potom pri zmene faktora z dolnej na hornú úroveň odozva y narastie, ak je záporný, hodnota odozvy y klesne. Hlavný efekt faktora zobrazujeme úsečkou.

Grafy hlavných efektov skúmaných faktorov sú na obr. 143. Hlavný efekt faktora $A_{\text{medzera medzi elektródami}}$ je záporný, t. j. zmenou z dolnej na hornú úroveň faktora nameraná rýchlosť nitrídového leptania klesla. Hlavné efekty faktorov $B_{\text{prietok plynu}}$ a $C_{\text{výkon na katóde}}$ sú kladné, t. j. zmenou z dolnej na hornú úroveň faktora rýchlosť nitrídového leptania narástla. Veľkosť vplyvu faktora na odozvu je v prípade faktora $B_{\text{prietok plynu}}$ v porovnaní s ostatnými faktormi zanedbateľný. Pre vizuálne porovnanie veľkosti vplyvov faktorov na odozvu je potrebné na y-ovej osi zvoliť rovnaký rozsah, obr. 144.

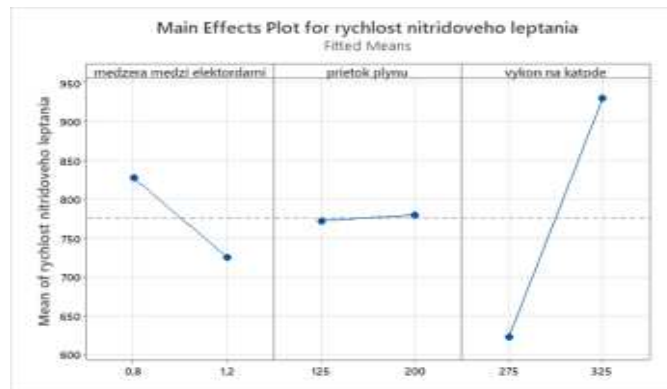


Obr. 143 Zobrazenie grafov hlavných efektov skúmaných faktorov v Exceli



Obr. 144 Vizuálne porovnanie veľkosti hlavných efektov skúmaných faktorov umožňuje nastavenie rovnakej mierky y-ovej osi v Exceli

Prehľadné porovnanie veľkosti vplyvov skúmaných faktorov na odozvu zobrazuje výstup Minitabu na obr. 145. Výpočet priemerných hodnôt odozvy na jednotlivých úrovniach faktorov v Exceli spolu vypočítanými veľkosťami efektov je na obr. 146.



Obr. 145 Grafy hlavných efektov skúmaných faktorov v Minitabe

	A	B	C	H	I	J	K	L
1	A_t1	B_t2	C_t3	yi				
2	-1	-1	-1	550			hlavny efekt faktora	
3	-1	-1	-1	604			-1	=AVERAGE(H2:H3;H6:H7;H10:H11;H14:H15)
4	1	-1	-1	669			1	=AVERAGE(H4:H5;H8:H9;H12:H13;H16:H17)
5	1	-1	-1	650				ef(A)= =L4-L3
6	-1	1	-1	633				
7	-1	1	-1	601				
8	1	1	-1	642			hlavny efekt faktora	
9	1	1	-1	635			-1	=AVERAGE(H2:H5;H10:H13)
10	-1	-1	1	1037			1	=AVERAGE(H6:H9;H14:H17)
11	-1	-1	1	1052				ef(B)= =L10-L9
12	1	-1	1	749				
13	1	-1	1	868				
14	-1	1	1	1075			hlavny efekt faktora	
15	-1	1	1	1063			-1	=AVERAGE(H2:H9)
16	1	1	1	729			1	=AVERAGE(H10:H17)
17	1	1	1	860				ef(C)= =L16-L15

	A	B	C	H	I	J	K	L	M
1	A_t1	B_t2	C_t3	yi					
2	-1	-1	-1	550			hlavny efekt faktora A_medzera		
3	-1	-1	-1	604			-1	826,875	
4	1	-1	-1	669			1	725,25	
5	1	-1	-1	650				ef(A)=	-101,625
6	-1	1	-1	633					
7	-1	1	-1	601					
8	1	1	-1	642			hlavny efekt faktora B_prietok		
9	1	1	-1	635			-1	772,375	
10	-1	-1	1	1037			1	779,75	
11	-1	-1	1	1052				ef(B)=	7,375
12	1	-1	1	749					
13	1	-1	1	868					
14	-1	1	1	1075			hlavny efekt faktora C_vykon na katode		
15	-1	1	1	1063			-1	623	
16	1	1	1	729			1	929,125	
17	1	1	1	860				ef(C)=	306,125

Obr. 146 Výpočet hlavných efektov faktorov v Exceli. Hlavný efekt faktora je rozdiel v priemernej odozve, keď sa faktor mení z dolnej úrovne na hornú, pričom ostatné faktory zostávajú konštantné.

Okrem hlavného efektu faktorov skúmame veľkosť vplyvu interakcie faktorov na odozvu, kedy nehodnotíme len samotný vplyv faktora, ale aj to, ako jeho účinok ovplyvňuje kombinácia s inými faktormi. Grafy interakcie faktorov v dvojúrovňových experimentoch zobrazujú pomocou dvoch úsečiek pre faktor a jeho úroveň (na vodorovnej osi) priemernú nameranú hodnotu odozvy pre obe úrovne druhého faktora (v legende). Ak sú úsečky v grafe paralelné, potom neexistuje interakcia medzi faktormi. Vplyv jedného faktora na odozvu je rovnaký pre všetky úrovne druhého faktora. Rôznobežné úsečky naznačujú, že existuje interakcia medzi faktormi, t. j. vplyv jedného faktora závisí od úrovne druhého faktora. Čím väčší je rozdiel v sklone úsečiek, tým silnejšia je interakcia. Výpočet priemerov odozvy pre zvolené úrovne faktorov je v nasledujúcich tabuľkách na obr. 147 - 149.

	A	B	C	D	E	F
1	A_t1	B_t2	C_t3	yi		
2	-1	-1	-1	550		
3	-1	-1	-1	604		
4	1	-1	-1	669		
5	1	-1	-1	650		
6	-1	1	-1	633		
7	-1	1	-1	601		
8	1	1	-1	642		
9	1	1	-1	635		
10	-1	-1	1	1037		
11	-1	-1	1	1052		
12	1	-1	1	749		
13	1	-1	1	868		
14	-1	1	1	1075		
15	-1	1	1	1063		
16	1	1	1	729		
17	1	1	1	860		
18						
19	efekt interakcie faktora A a C - počítame efekt faktora C pri konstantnej úrovni faktora A alebo naopak					
20						
21			A			
22			0,8	1,2		
23			-1	1		
24	C	275	-1	=AVERAGE(D2:D3;D6:D7)	=AVERAGE(D4:D5;D8:D9)	=AVERAGE(E25;D24)
25		325	1	=AVERAGE(D10:D11;D14:D15)	=AVERAGE(D12:D13;D16:D17)	=AVERAGE(D25;E24)
26			ef(AC)= =F24-F25			

19	efekt interakcie faktora A a C - počítame efekt faktora C pri konstantnej úrovni faktora A alebo naopak					
20						
21			A			
22			0,8	1,2		
23			-1	1		
24	C	275	-1	597	649	699,25
25		325	1	1056,75	801,5	852,875
26			ef(AC)=		-153,625	

Obr. 147 Tabuľka s výpočtom priemerov odoziev pre zvolené úrovne faktorov A a C

28	efekt interakcie faktora A a B - pocitame efekt faktora B pri konstantnej urovni faktora A alebo naopak					
29						
30				A		
31				0,8	1,2	
32				-1	1	
33	B	125	-1	=AVERAGE(D2;D3;D10;D11)	=AVERAGE(D4;D5;D12;D13)	=AVERAGE(E34;D33)
34		200	1	=AVERAGE(D6;D7;D14;D15)	=AVERAGE(D8;D9;D16;D17)	=AVERAGE(D34;E33)
35						ef(AB)= =F33-F34

28	efekt interakcie faktora A a B - pocitame efekt faktora B pri konstantnej urovni faktora A alebo naopak					
29						
30				A		
31				0,8	1,2	
32				-1	1	
33	B	125	-1	810,75	734	763,625
34		200	1	843	716,5	788,5
35						ef(AB)= -24,875

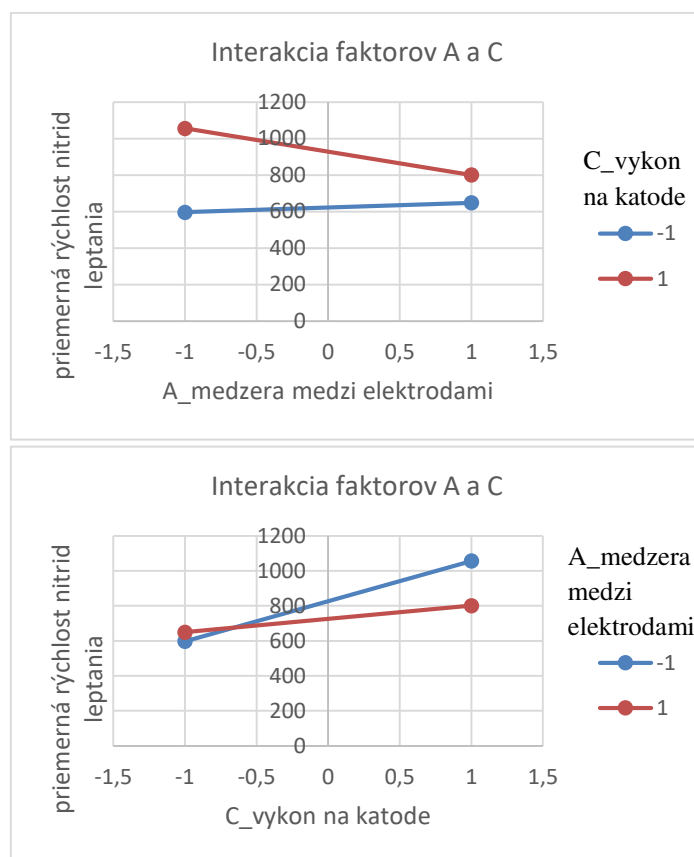
Obr. 148 Tabuľka s výpočtom priemerov odoziev pre zvolené úrovne faktorov A a B

37	efekt interakcie faktora B a C - pocitame efekt faktora C pri konstantnej urovni faktora B alebo naopak					
38						
39				B		
40				125	200	
41				-1	1	
42	C	275	-1	=AVERAGE(D2;D3;D4;D5)	=AVERAGE(D6;D7;D8;D9)	=AVERAGE(E43;D42)
43		325	1	=AVERAGE(D10;D11;D12;D13)	=AVERAGE(D14;D15;D16;D17)	=AVERAGE(D43;E42)
44						ef(BC)= =F42-F43

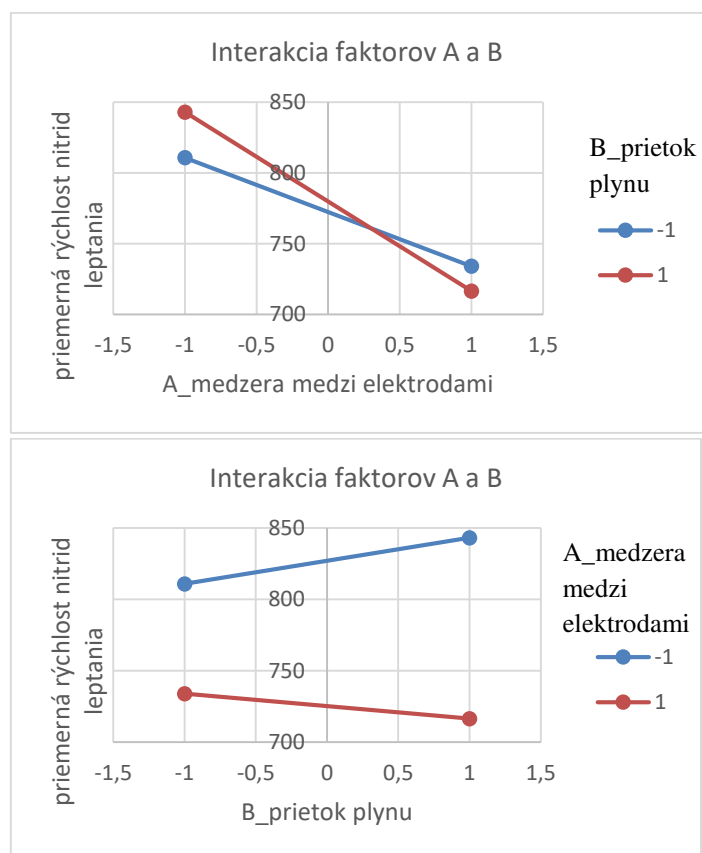
37	efekt interakcie faktora B a C - pocitame efekt faktora C pri konstantnej urovni faktora B alebo naopak					
38						
39				B		
40				125	200	
41				-1	1	
42	C	275	-1	618,25	627,75	775
43		325	1	926,5	931,75	777,125
44						ef(BC)= -2,125

Obr. 149 Tabuľka s výpočtom priemerov odoziev pre zvolené úrovne faktorov B a C

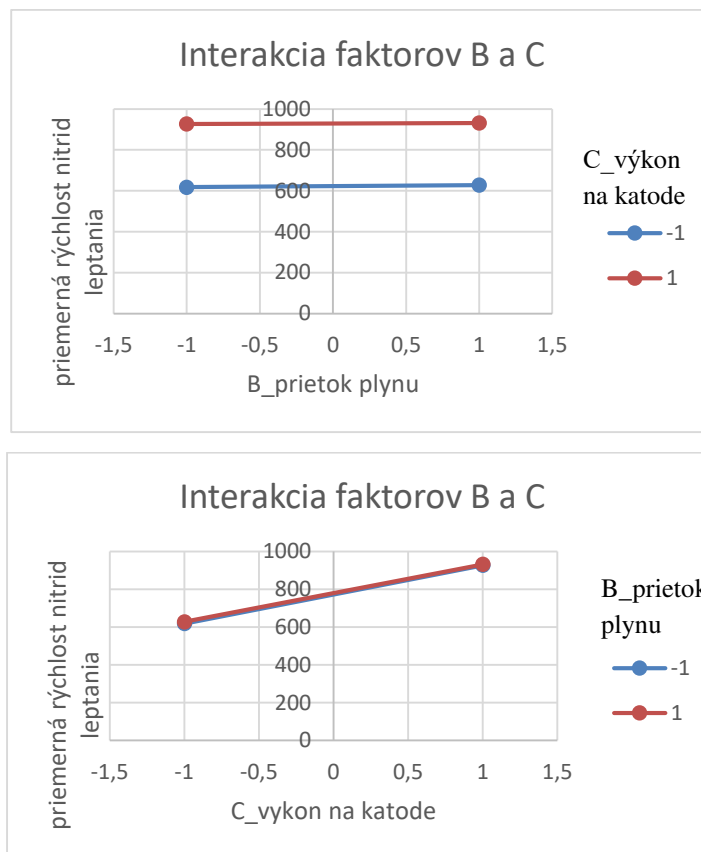
Pri zobrazovaní grafov interakcie faktorov (na obr.150-152) po označení príslušnej celej tabuľky s vypočítanými hodnotami priemerov odoziev pre zvolené úrovne faktorov volíme ponuku *Vložiť* → *Závislosť*: *bodový graf s priamkami a značkami*. Po naformátovaní grafu (napr. v ponuke *Zdrojové údaje*) vieme graf interakcií jednoduchým spôsobom skopírovať a zmeniť prepnutím riadku a stĺpca v ponuke *Nástroje pre grafy* v časti *Návrh*. Rovnako ako pri hlavných efektoch aj v prípade interakcie dvoch faktorov každá úsečka zobrazuje efekt faktora, ktorého úrovne sú vynesené na vodorovnej osi, pričom legenda poskytuje informáciu o tom, na akej úrovni bol nastavený druhý faktor vystupujúci v uvažovanej interakcii.



Obr. 150 Grafy interakcie faktorov *A_medzera medzi elektrodami* a *C_výkon na katóde*

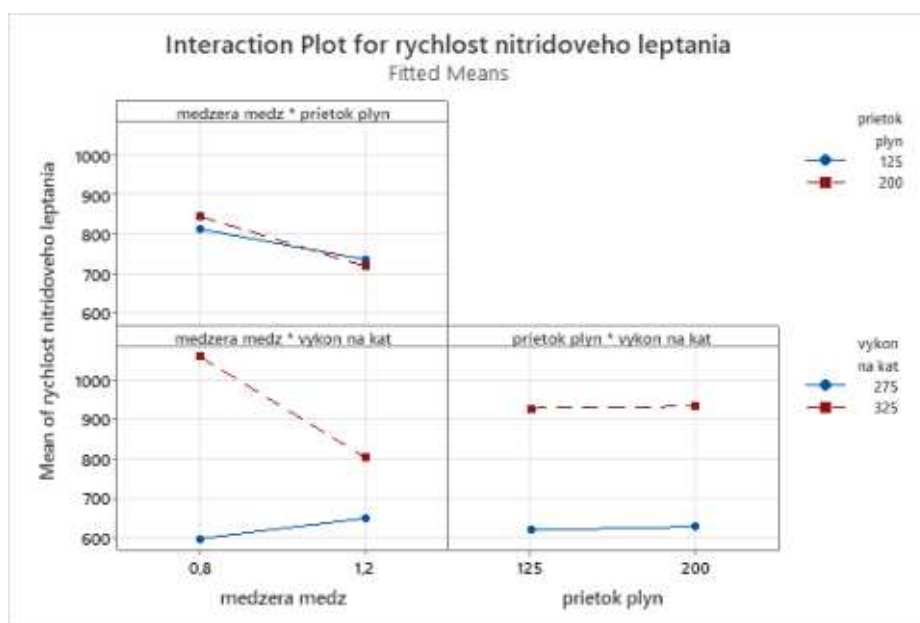


Obr. 151 Grafy interakcie faktorov *A_medzera medzi elektrodami* a *B_prietok plynu*



Obr. 152 Grafy interakcie faktorov B_prietok plynu a C_výkon na katóde

Prehľadný graf s interakciami všetkých kombinácií dvojíc faktorov, v ktorom je možné jednoducho porovnávať rôznobežnosť zobrazovaných úsečiek, teda veľkosť interakcie uvažovaných faktorov, poskytuje výstup Minitabu zobrazený na obr. 153.



Obr. 153 Grafy interakcií faktorov v Minitabe

Z grafu interakcie faktorov vyplýva:

- 1) medzi B_prietokom plynu a C_výkonom na katóde nie je prítomná interakcia – zobrazené úsečky sú rovnobežné;
- 2) medzi A_medzerou medzi elektródami a C_výkonom na katóde je pozorovaná najväčšia interakcia – uhol medzi úsečkami je najväčší;
- 3) najväčšiu odozvu možno očakávať pri nastavení faktora A__medzera medzi elektródami na dolnú úroveň, faktora C_výkon na katóde na hornú úroveň a faktor B_prietok plynu na hornú úroveň, pričom vplyv faktora B možno považovať za zanedbateľný.
- 4) najmenšiu odozvu možno očakávať pri nastavení faktora A__medzera medzi elektródami na dolnú úroveň, faktora C_výkon na katóde na dolnú úroveň, vplyv faktora B_prietok plynu možno zanedbať.

Pareto graf – porovnanie veľkosti efektov faktorov a interakcií

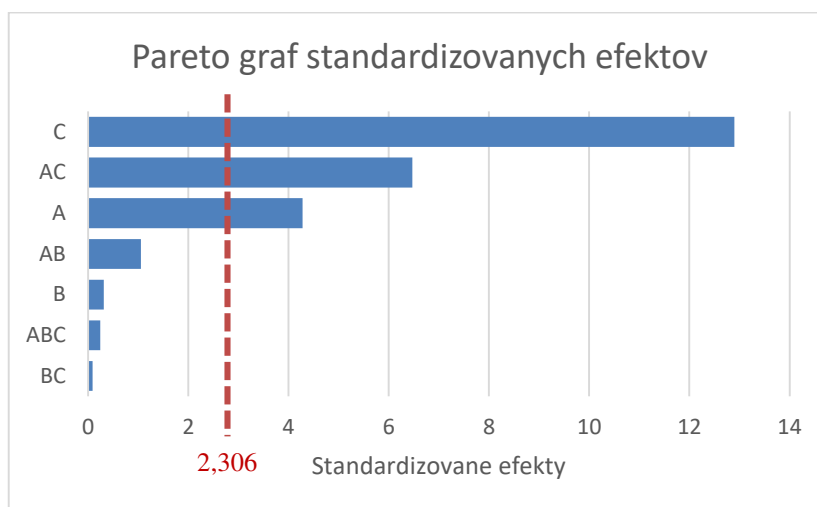
Na vizuálne porovnanie veľkosti vplyvu jednotlivých faktorov a ich interakcií na výslednú premennú (odozvu) experimentu je vhodné použiť Pareto graf, vid' obr.154 alebo obr.155. Pareto graf zobrazuje absolútne hodnoty štandardizovaných veľkostí efektov zoradených zostupne ako pruhový graf. Štandardizované efekty sú t-štatistiky, ktoré testujú nulovú hypotézu, že regresný koeficient je 0. Zobrazované pruhy (alebo stĺpce) sú zoradené podľa veľkosti, preto je ľahké identifikovať faktory a interakcie s najvýznamnejším vplyvom. Platí pravidlo, čím väčší je pruh (alebo stĺpec) pre určitý faktor alebo interakciu, tým väčší je jeho vplyv na odozvu. Typicky býva v grafe zobrazená aj kritická hodnota (critical value) CV ako referenčná čiara, ktorá odlišuje významné efekty od nevýznamných. Pri výpočte hodnoty CV rozlišujeme, či vieme určiť stupne voľnosti pre experimentálnu chybu, t. j. rozlišujeme, či experiment mal alebo nemal replikácie.

Kritická hodnota pre experiment bez replikácií sa počíta podľa vzťahu:

$CV = PSE \cdot t_{m/3}^{kv}(1 - \alpha)$, kde PSE je pseudoštandardná chyba (Lenth's PSE) založená na skutočnosti, že smerodajnú odchýlku vzorky z rozdelenia $N(0, \sigma^2)$ možno odhadnúť ako 1,5 násobok mediánu absolútnych hodnôt. Významné efekty sú pri spresňujúcich výpočtoch vylúčené ako extrémne hodnoty prevyšujúce 2,5 násobok mediánu.

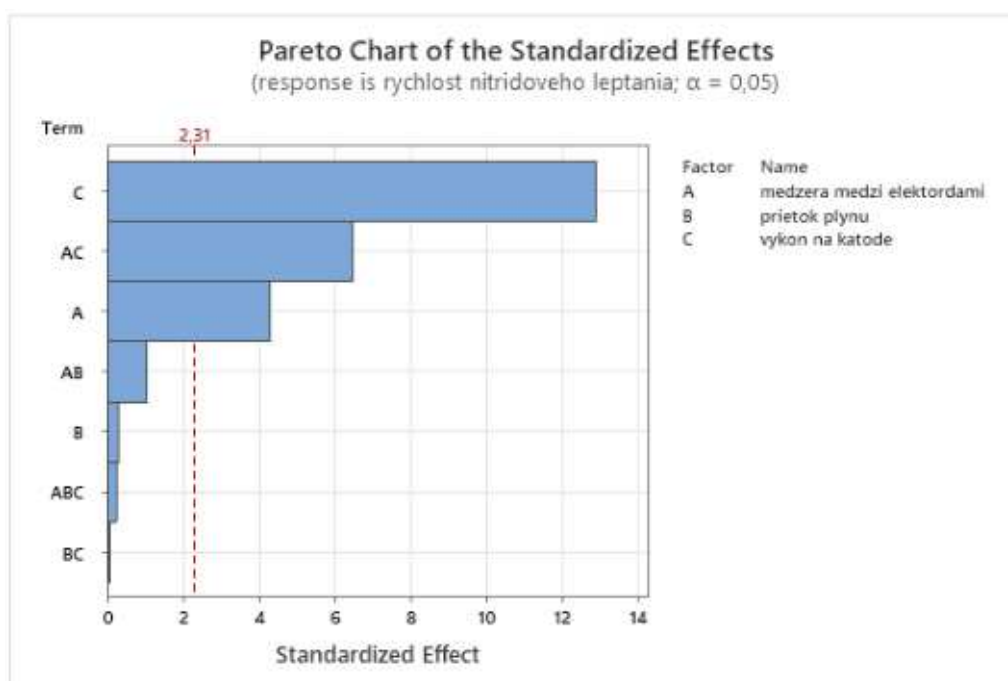
Kvantil Studentovho t-rozdelenia $t_{m/3}^{kv}(1 - \alpha)$ má počet stupňov voľnosti $df = \frac{m}{3}$, pričom m je celkový počet odhadov efektov a interakcií.

Pre experiment s replikáciami je kritická hodnota CV rovná kvantilu Studentovho t-rozdelenia $t_{(m-1),2^k}^{kv}(1 - \alpha/2)$, kde k je počet faktorov a m je počet replikácií v každom experimentálnom bode. Pre zvolené $\alpha = 0,05$ je 97,5% kvantil $t_{(2-1),2^3}^{kv}(1 - \alpha/2) = T.INV(0,975;8)=2,306004$.



Obr. 154 Pareto graf štandardizovaných efektov v Exceli

Poznámka: Z Pareto grafu, ktorý zobrazuje absolútne hodnotu štandardizovaných efektov, je možné určiť, ktoré efekty sú veľké, ale nemôžeme určiť, ktoré efekty zvyšujú alebo znižujú odozvu. Veľkosť a smer účinkov je možné zistiť z tabuľky, ktorá obsahuje bodové odhady koeficientov. Ak sú niektoré faktory alebo interakcie významné, je vhodné sa pri ďalšom skúmaní alebo hľadaní optimálneho riešenia na ne zamerať a ostatné nevýznamné členy zanedbať.



Obr. 155 Pareto graf štandardizovaných efektov v Minitabe

Zhrnutie:

Z grafov hlavných efektov vyplýva, že v prípade, ak by nebola prítomná interakcia faktorov, potom by na rýchlosť nitridového leptania najviac vplýval faktor C_výkon na katóde, pričom tento efekt faktora je pozitívny, t. j. faktor zvyšuje odozvu. Rovnako pozitívny vplyv má aj faktor B_prietok plynu, ale veľkosť tohto vplyvu na odozvu je v porovnaní s ostatnými faktormi zanedbateľný. Naopak vplyv faktora A_medzera medzi elektródami na odozvu je negatívny, pretože faktor znižuje odozvu. Vplyv tohto faktora na rýchlosť nitridového leptania je menší ako vplyv faktora C_výkon na katóde a súčasne väčší ako vplyv faktora B_prietok plynu.

Z grafov interakcií faktorov však vyplýva, že možno očakávať vzájomné pôsobenie faktorov A_medzera medzi elektródami a B_prietok plynu a rovnako faktorov A_medzera medzi elektródami a C_výkon na katóde na odozvu, preto analýzu vplyvu faktorov na odozvu nemožno považovať za smerodajnú. Interakcia faktorov B_prietok plynu a C_výkon na katóde nebude prítomná, pretože zobrazené úsečky sú rovnobežné.

Z grafov interakcie faktorov A_medzera medzi elektródami a C_výkon na katóde na obr.1.53 vyplýva, že odozva bola vždy vyššia pri hornej úrovni faktora C_výkon na katóde, t. j. pri zvolenom vyššom výkone na katóde bez ohľadu na zvolenú úroveň faktora A_medzera medzi elektródami. Zvýšenie C_výkonu na katóde má oveľa väčší vplyv na rýchlosť leptania, keď je A_medzera medzi elektródami menšia. Ak nastavíme C_výkon na katóde na dolnú úroveň, potom zmena A_medzery medzi elektródami vplýva na zmenu hodnoty odozvy minimálne. V hornom grafe modrá úsečka zobrazuje efekt faktora A_medzera medzi elektródami, keď je C_výkon na katóde nastavený na dolnú úroveň -1. Zvýšenie A_medzery medzi elektródami vedie len k miernemu zvýšeniu priemernej rýchlosti nitridového leptania. Tento nárast je kladný, ale nie je výrazný. Červená úsečka zobrazuje efekt faktora A_medzera medzi elektródami, keď je C_výkon na katóde nastavený na hornú úroveň +1. Zvýšenie A_medzery medzi elektródami vedie k výraznejšiemu poklesu rýchlosti nitridového leptania. Tento efekt je silnejší ako pri zvolenej nižšej hodnote výkonu na katóde. V dolnom grafe modrá úsečka zobrazuje efekt faktora C_výkon na katóde, keď je faktor A_medzera medzi elektródami nastavený na dolnú úroveň -1. Červená úsečka zobrazuje efekt faktora C_výkon na katóde, keď je faktor A_medzera medzi elektródami nastavený na hornú úroveň +1. Keď je A_medzera medzi elektródami nastavená na dolnú úroveň -1, zvýšenie výkonu na katóde vedie

k väčšiemu nárastu rýchlosti nitridového leptania ako pri nastavení A_medzery medzi elektródami na hornú úroveň +1.

Najväčšiu hodnotu odozvy sme podľa grafu interakcie faktorov A a C dosiahli, ak bola zvolená medzera medzi elektródami minimálna a výkon na katóde maximálny.

Z grafov interakcie faktorov A_medzera medzi elektródami a B_prietok plynu na obr.1.54 vyplýva, že odozva bola vždy vyššia pri dolnej úrovni faktora A_medzera medzi elektródami, t. j. pri zvolenej nižšej medzere medzi elektródami bez ohľadu na zvolenú úroveň faktora B_prietok plynu. Zväčšenie medzery medzi elektródami vždy znižuje rýchlosť nitridového leptania, v prípade vyššieho prietoku plynu je táto zmena výraznejšia. Ak nastavíme medzeru medzi elektródami na dolnú úroveň, potom zvýšenie prietoku plynu zvyšuje rýchlosť nitridového leptania, ak nastavíme medzeru medzi elektródami na hornú úroveň, potom zvýšenie prietoku plynu zníži rýchlosť nitridového leptania, pričom táto zmena je menšia. V hornom grafe modrá úsečka zobrazuje efekt faktora A_medzera medzi elektródami, keď je B_prietok plynu nastavený na dolnú úroveň -1. Červená úsečka zobrazuje efekt faktora A_medzera medzi elektródami, keď je B_prietok plynu nastavený na hornú úroveň +1.

V dolnom grafe modrá úsečka zobrazuje efekt faktora B_prietok plynu, keď je faktor A_medzera medzi elektródami nastavený na dolnú úroveň -1. Červená úsečka zobrazuje efekt faktora B_prietok plynu, keď je faktor A_medzera medzi elektródami nastavený na hornú úroveň +1. Nastavenie úrovne faktora A_medzera medzi elektródami určuje, či bude efekt faktora pozitívny (pre úroveň -1) alebo negatívny (pre úroveň +1).

Najväčšiu hodnotu odozvy sme podľa grafu interakcie faktorov A a B dosiahli, ak bola zvolená medzera medzi elektródami minimálna a prietok plynu maximálny.

Z grafov interakcie faktorov B_prietok plynu a C_výkon na katóde na obr.1.55 je vidieť, že interakcia medzi týmito faktormi nie je prítomná. Na odozvu vplýva iba faktor C_výkon na katóde. Jeho efekt je kladný.

Overenie regresného modelu pomocou kontrolného merania

Po nájdení regresného modelu je potrebné vykonať kontrolné meranie, pričom volíme body z daného experimentálneho priestoru, kde preferujeme úrovne faktorov, ktoré neboli súčasťou pôvodných kombinácií úrovní faktorov v pôvodných experimentálnych meraniach. Ak toto nie je možné realizovať, náhodne vyberieme rovnaké body experimentálneho priestoru, ktoré boli použité pri hľadaní regresného modelu. Týmto spôsobom získame nové hodnoty pre hodnoty odozvy y .

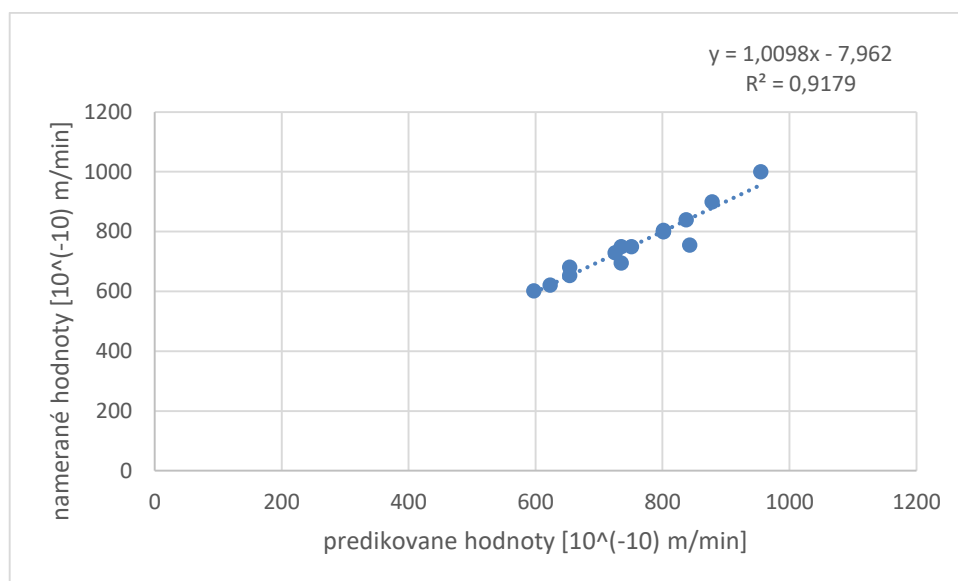
Po vykonaní kontrolných meraní pre vybrané úrovne faktorov boli získané nasledovné hodnoty rýchlosti nitridového leptania [10^{-10} m/min]:

$f(0,8;125;275)=602$; $f(1,2;200;325)=804$; $f(0,9;150;300)=800$; $f(1;130;280)=681$;
 $f(0,9;190;310)=900$; $f(1,1;130;320)=755$; $f(0,8;140;290)=750$; $f(1;190;310)=840$;
 $f(1;160;275)=621$; $f(1,1;180;300)=750$; $f(1,2;160;300)=730$; $f(0,9;130;300)=800$;
 $f(1;180;280)=654$; $f(0,8;190;290)=695$; $f(0,9;150;320)=1000$;

Tabuľka 5 Porovnanie výsledkov kontrolných meraní s predikciou

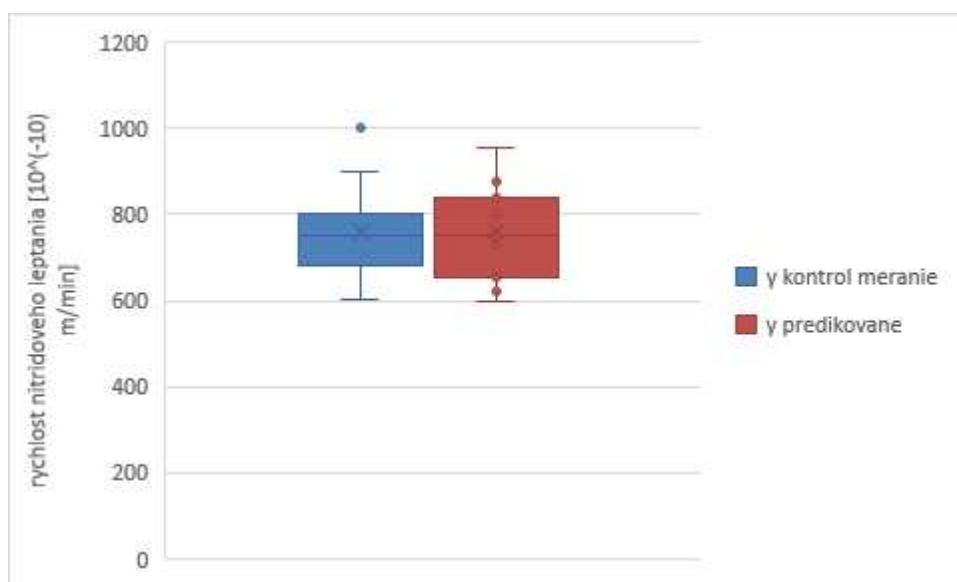
Kontrolne meranie:					predikcia_povodne jednotky			
p.c.	x1	x2	x3	y	x1	x2	x3	y predik
1	0,8	125	275	602	0,8	125	275	597
2	1,2	200	325	804	1,2	200	325	801,5
3	0,9	150	300	800	0,9	150	300	801,46875
4	1	130	280	681	1	130	280	653,6125
5	0,9	190	310	900	0,9	190	310	878,05625
6	1,1	130	320	755	1,1	130	320	842,38125
7	0,8	140	290	750	0,8	140	290	734,925
8	1	190	310	840	1	190	310	837,2875
9	1	160	275	621	1	160	275	623
10	1,1	180	300	750	1,1	180	300	750,65625
11	1,2	160	300	730	1,2	160	300	725,25
12	0,9	130	300	800	0,9	130	300	801,46875
13	1	180	280	654	1	180	280	653,6125
14	0,8	190	290	695	0,8	190	290	734,925
15	0,9	150	320	1000	0,9	150	320	954,64375

Porovnaním hodnôt získaných z regresného modelu (predikovaných hodnôt) s kontrolným meraním (vid'. tabuľka 5) overujeme, či je regresný model dostatočne presný na predikciu hodnôt nitridového leptania. Vizuálnou kontrolou v bodovom grafe na obr. 156 možno pozorovať, že modelované hodnoty zodpovedajú skutočným kontrolným nameraným hodnotám. Okrem toho koeficient determinácie $R^2 = 91,79\%$ ukazuje, že lineárny model veľmi dobre fituje dané údaje. Pearsonov koeficient korelácie $r = \sqrt{R^2} = 0,958055$ ako miera tesnosti lineárnej závislosti medzi modelovanými a kontrolnými nameranými hodnotami má hodnotu blízku 1, čo naznačuje vysoký stupeň priamej lineárnej závislosti medzi nimi.



Obr. 156 Validácia regresného modelu

Na obr. 157 sú zobrazené Box ploty, ktoré porovnávajú rozdelenie hodnôt kontrolného merania s predikovanými hodnotami, ktoré zodpovedajú rovnakým úrovňam vstupných parametrov. V kontrolnom meraní sme zaznamenali jednu extrémnu hodnotu $1000 \cdot 10^{-10}$ m/min. Vzhľadom na namerané rýchlosti nitrídového leptania pri realizácii experimentu a bodový graf na obr. 1.59 nie je potrebné túto hodnotu ďalej riešiť.



Obr. 157 Box ploty porovnávajúce hodnoty kontrolného merania s predikciou

Okrem bežného a jednoduchého vizuálneho prístupu pomocou bodového grafu a porovnania Box plotov a štatistík r a R^2 uvedených vyššie, existuje aj kontrola pomocou tzv. porovnania parametrov smernice a priesečníka y -ovej osi po preložení vynesných bodov

priamkou. Ak majú byť modelované hodnoty v porovnaní s kontrolnými nameranými v pomere 1:1, fitovaná priamka by mala sklon 45° a pretínať os y v nule. Vo výslednom lineárnom regresnom modeli $y = b_0 + b_1x$ preto očakávame, že parameter $b_1 = 1$ a $b_0 = 0$. Na základe tejto myšlienky testujeme, či regresný koeficient b_1 je rovný jednej a lokujúca konštanta b_0 je rovná nule.

Testujeme hypotézy $H_0: b_1 = 1 \leq H_1: b_1 \neq 1$. Nech hladina významnosti $\alpha = 0,05$. Z výstupu regresnej analýzy v Exceli na obr. 158 môžeme použiť bodový odhad regresného koeficientu b_1 a jeho 95% interval spoľahlivosti.

SUMMARY OUTPUT						
Regression Statistics						
Multiple R	0,9580551					
R Square	0,9178696					
Adjusted R Square	0,9115519					
Standard Error	31,376231					
Observations	15					
ANOVA						
	df	SS	MS	F	Significance F	
Regression	1	143028,3173	143028,3	145,2849	1,9813E-08	
Residual	13	12798,08272	984,4679			
Total	14	155826,4				
	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%
Intercept	-7,962006	64,12743812	-0,12416	0,903089	-146,500913	130,576902
X Variable 1	1,009802	0,083777228	12,05342	1,98E-08	0,828812292	1,19079169

Obr. 158 Výstup regresnej analýzy pri lineárnom regresnom modeli v Exceli

Testovacia štatistika $t(b_1) = \frac{\hat{b}_1 - 1}{SE(\hat{b}_1)} \sim t(n - 2)$. Vzhľadom na obojstrannú alternatívu p hodnotu určíme podľa vzťahu $p(b_1) = 2 * \min\{F(t_0(b_1)); 1 - F(t_0(b_1))\}$. Vzhľadom na zvolené riziko intervalového odhadu α , obojstranný $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ interval spoľahlivosti určíme podľa vzťahu $\hat{b}_1 \pm \Delta$, kde $\Delta = SE(\hat{b}_1) \cdot t_{n-2}^{kv} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$.

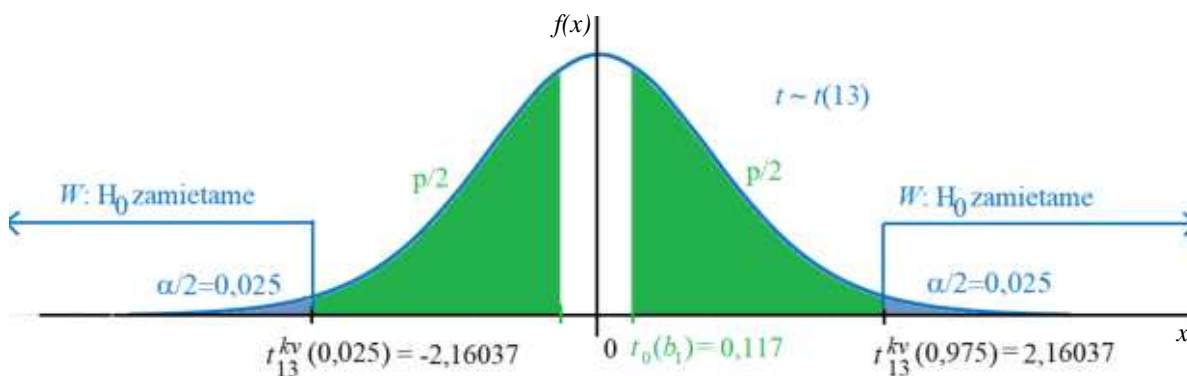
Výpočet uvedených hodnôt v Exceli je zobrazený na nasledujúcom obr. 159. Nie je možné použiť údaje z riadku pre bodový odhad koeficientu $\hat{b}_1$ s výnimkou intervalu spoľahlivosti, pretože testovacia štatistika i p-hodnota testuje nulovosť regresného koeficientu b_1 , t. j. hypotézu $H_0: b_1 = 0$ oproti hypotéze $H_1: b_1 \neq 0$.

	C	D	E
57		<i>Coefficients</i>	<i>Standard Error</i>
58	Intercept	-7,96200563754076	64,1274381168403
59	X Variable 1	1,00980199012169	0,0837772283084262
60			
61	H0: b1=1 ><H1: b1 ≠ 1		
62	t0= =(D59-1)/E59		
63	t ₁₃ ^{kv} (0,975)= =T.INV(0,975;13)		
64	p= =2*MIN(T.DIST(D62;13;1);1-T.DIST(D62;13;1))		
65	delta= =E59*D63		
66	95%IS pre b1:		
67	=D59-D65	=D59+D65	

61	H0: b1=1 ><H1: b1 ≠ 1	
62	t0=	0,1170006
63	t ₁₃ ^{kv} (0,975)=	2,1603687
64	p=	0,9086478
65	delta=	0,1809897
66	95%IS pre b1:	
67	0,828812292	1,1907917

Obr. 159 Testovanie regresného koeficienta b_1 v Exceli

Grafické riešenie je na obr. 160.



Obr. 160 Grafické riešenie pre testovanie hypotézy o koeficiente b_1

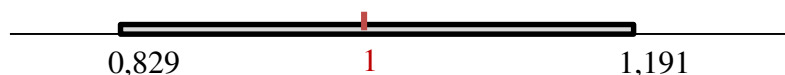
Kritická oblasť $W = (-\infty; -2,16) \cup (2,16, \infty)$, kde 97,5% kvantil $t_{13}^{kv}(0,975) = T.INV(0,975; 13) = 2,16037$. Platí $|t_0(b_1)| = \frac{1,009802-1}{0,083777228} = 0,1170006 < 2,16037 = t_{13}^{kv}(0,975)$.

Z grafického riešenia pre test hypotézy o koeficiente $H_0 : b_1 = 1$ na obr. 160 realizácia testovacej štatistiky $t_0(b_1) = 0,117 \notin W$, preto testovanú hypotézu $H_0 : b_1 = 1$ nezamietame. Naopak hypotézu $H_1 : b_1 \neq 1$ zamietame.

P-hodnota vypočítaná podľa vzťahu $p(b_1) = 2 * \min\{F(t_0(b_1)); 1 - F(t_0(b_1))\}$ je rovná $p(b_1) = 2 * \text{MIN}(\text{T. DIST}(0,117; 13; 1); 1 - \text{T. DIST}(0,117; 13; 1)) = 0,90865$
 $p = 0,90865 > 0,05 = \alpha$, preto $H_0 : b_1 = 1$ nezamietame.

Graficky p-hodnota predstavuje dvojnásobok veľkosti plochy pod krivkou hustoty rozdelenia Studentovho rozdelenia $t(13)$ od realizácie testovacej štatistiky $t_0(b_3)$ vpravo.

95% IS pre koeficient b_1 je podľa vzťahu $\hat{b}_1 \pm \Delta$ rovný $1,009802 \pm 0,1509897$. Rovnako z výstupu regresnej analýzy na obr. 162 vidíme, že 95% IS pre koeficient b_1 je rovný $(0,829; 1,191)$



Obr. 161 1 patrí do 95% IS pre koeficient b_1

Keďže $1 \in (0,829; 1,191)$, so spoľahlivosťou 95% môžeme hypotézu $H_0 : b_1 = 1$ prijať (obr.161).

Záver:

Na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ možno prijať hypotézu, že regresný koeficient b_1 je rovný jednej.

V nasledujúcom kroku testujeme hypotézy $H_0 : b_0 = 0 \leq H_1 : b_0 \neq 0$ pri zvolenej hladine významnosti $\alpha = 0,05$. Môžeme použiť výstup regresnej analýzy na obr. 1.61, konkrétne riadok prislúchajúci lokujúcej konštante b_0 označený „Intercept“, viď obr. 1.65.

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%
Intercept	-7,96200563754076	64,1274381168403	-0,124159109	0,903088541	-146,50091296442	130,576901689338
X Variable 1	1,00980199012169	0,0837772283084262	12,053418458	1,981304394	0,828812291958836	1,19079168828454

Obr. 162 Tabuľka s bodovými odhadmi koeficientov a im prislúchajúcimi hodnotami

Testovacia štatistika $t(b_0) = \frac{\hat{b}_0}{SE((b_0))} \sim t(n - 2)$. Vzhľadom na obojstrannú alternatívu p-hodnotu učíme podľa vzťahu $p(b_0) = 2 * \min\{F(t_0(b_0)); 1 - F(t_0(b_0))\}$. Vzhľadom na zvolené riziko intervalového odhadu α , obojstranný $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ interval spoľahlivosti určíme podľa vzťahu $\hat{b}_0 \pm \Delta$, kde $\Delta = SE(\hat{b}_0) \cdot t_{n-2}^{kv} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$.

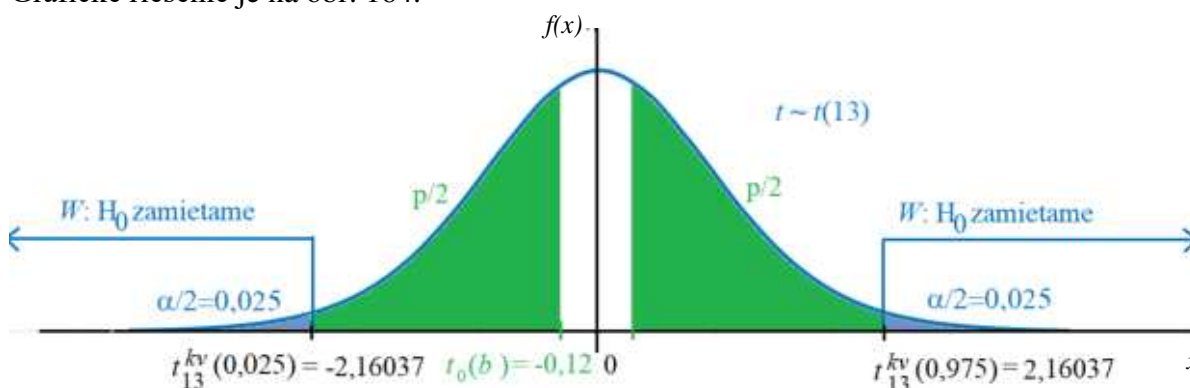
Výpočet uvedených hodnôt v Exceli je zobrazený na nasledujúcom obr.163. Pri testovaní hypotéz je možné použiť všetky údaje z riadku pre bodový odhad koeficientu $\hat{b}_0$.

	C	D	E	F	G	H	I
57		Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%
58	Intercept	-7,96200563754076	64,1274381168403	-0,124159109	0,903088541	-146,50091296442	130,576901689338
59	X Variable 1	1,00980199012169	0,0837772283084262	12,053418458	1,981304394	0,828812291958836	1,19079168828454
60							
61	H0: b0=0 ><H1: b0≠0						
62	t0= =D58/E58						
63	t ₁₃ ^{kv} (0,975)= =T.INV(0,975;13)						
64	p= =2*MIN(T.DIST(D62;13;1);1-T.DIST(D62;13;1))						
65	delta= =E58*D63						
66	95%IS pre b1:						
67	=D58-D65 =D58+D65						

61	H0: b0=0 ><H1: b0≠0	
62	t0= -0,124159	
63	t ₁₃ ^{kv} (0,975)= 2,1603687	
64	p= 0,9030885	
65	delta= 138,53891	
66	95%IS pre b1:	
67	-146,500913	130,5769

Obr. 163 Testovanie lokujúcej konštanty b_0 v Exceli

Grafické riešenie je na obr. 164.



Obr. 164 Grafické riešenie pre testovanie hypotézy o koeficiente b_0

Kritická oblasť bude rovnaká, t. j. $W = (-\infty; -2,16) \cup (2,16; \infty)$, kde 97,5% kvantil $t_{13}^{kv}(0,975) = T.INV(0,975; 13) = 2,16037$. Platí $|t_0(b_1)| = \left| \frac{-7,962006}{64,127438} \right| = 0,12416 < 2,16037 = t_{13}^{kv}(0,975)$.

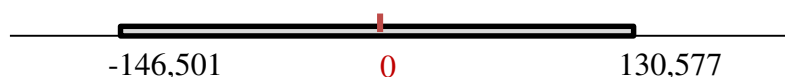
x

Z grafického riešenia pre test hypotézy o koeficiente $H_0 : b_0 = 0$ na obr. 164 realizácia testovacej štatistiky $t_0(b_0) = -0,124 \notin W$, preto testovanú hypotézu $H_0 : b_0 = 0$ nezamietame. Naopak hypotézu $H_1 : b_0 \neq 0$ zamietame.

P-hodnota vypočítaná podľa vzťahu $p(b_0) = 2 * \min\{F(t_0(b_0)); 1 - F(t_0(b_0))\}$ je rovná $p(b_0) = 2 * \text{MIN}(T.DIST(-0,124; 13; 1); 1 - T.DIST(-0,124; 13; 1)) = 0,90309$

Vypočítaná i tabuľková hodnota $p = 0,90309 > 0,05 = \alpha$, preto $H_0 : b_0 = 0$ nezamietame. Graficky p-hodnota predstavuje dvojnásobok veľkosti plochy pod krivkou hustoty rozdelenia Studentovho rozdelenia $t(13)$ od realizácie testovacej štatistiky $t_0(b_3)$ vľavo.

95% IS pre koeficient b_0 je podľa vzťahu $\hat{b}_0 \pm \Delta$ rovný $-7,962006 \pm 138,53891$. Vypočítaný 95% IS pre koeficient b_0 i interval uvedený v tabuľke je rovný $(-146,501; 130,577)$.



Obr. 165 Číslo 0 patrí do 95% IS pre koeficient b_0

Keďže $0 \in (-146,501; 130,577)$, so spoľahlivosťou 95% môžeme hypotézu $H_0 : b_0 = 0$ prijať (obr.165).

Záver:

Na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ možno prijať hypotézu, že koeficient b_0 je rovný nule. Vzhľadom na to, že je možné prijať hypotézu, že lokujúca konštanta b_0 je rovná nule, to znamená preložená priamka prechádza začiatkom súradnicovej sústavy a súčasne regresný koeficient b_1 , t. j. smernica preloženej priamky je rovná jednej, môžeme prijať tvrdenie, že predikované hodnoty nitridového leptania získané z nájdeného regresného modelu a hodnoty namerané pri kontrolnom meraní pre rovnaké úrovne nami skúmaných parametrov sú v pomere 1:1. Toto možno tvrdiť so spoľahlivosťou 95%.

Predikcia

Na základe predchádzajúcej časti môže byť nájdený regresný model použitý na predikciu hodnôt odozvy alebo na hľadanie optimálneho riešenia. Predikciu i optimalizáciu by sme však mali robiť iba v rámci skúmaného experimentálneho priestoru.

Použitie Excelu na výpočet predikovaných hodnôt je vidieť na nasledujúcom obr. 166. Napríklad, ak chceme pomocou nami získaného regresného modelu odhadnúť hodnotu nitridového leptania, ak zvolíme faktor A_medzera medzi elektródami na úroveň 0,9 cm, faktor B_prietok plynu na úroveň 150 cm³/min a faktor C_výkon na katóde na úroveň 280W, potom po dosadení do regresného modelu vyjadreného v pôvodných jednotkách, dostaneme hodnotu odozvy 648,2938. 10⁻¹⁰ m/min. Ak je funkčná závislosť rýchlosti nitridového leptania od týchto faktorov vyjadrená v kódovaných jednotkách, t. j. pracujeme s modelom, pomocou ktorého sme

testovali jednotlivé hypotézy, potom je potrebné pred dosadením do získaného predpisu transformovať úrovne faktorov, pre ktoré chceme odozvu predikovať. Použijeme pritom rovnaké transformačné vzťahy, ktoré sme použili na začiatku experimentu. Predikovaná (modelovaná) hodnota musí vyjsť v oboch prípadoch rovná.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Predikcia odozvy pre zvolene hodnoty vstupov:								
2	$y_L(t_1, t_3) =$	776,0625	+	-50,8125	*t1+	153,0625	*t3+	-76,8125	*t1*t3
3									
4	$x_1=0,9 \rightarrow t_1 = (0,9-1)/0,2$			776,0625	1				
5	$x_2=150 \rightarrow t_2 = (150-162,5)/37,5$			-50,8125	=B4				
6	$x_3=280 \rightarrow t_3 = (280-300)/25$			153,0625	=B6				
7	$y_L(-0,5; -0,8) =$	=D4+D5*B4+D6*B6+D7*B4*B6		-76,8125	=B4*B6				
8					=SUMPRODUCT(D4:D7				
9	$y_L(x_1, x_3) =$	-5415,375	+	4354,6875	*x1+	21,485	*x3+	-15,3625	*x1*x3
10	$y_L(0,9; 280) =$	=B9+D9*0,9+F9*280+H9*0,9*280							
11									
12		=B9		1					
13		=D9		0,9					
14		=F9		280					
15		=H9		=C13*C14					
16				=SUMPRODUCT(B12:B15;C12:C15)					

1	Predikcia odozvy pre zvolene hodnoty vstupov:								
2	$y_L(t_1, t_3) =$	776,0625	+	-50,8125	*t1+	153,063	*t3+	-76,8125	*t1*t3
3									
4	$x_1=0,9 \rightarrow t_1 = -0,5$			776,0625	1				
5	$x_2=150 \rightarrow t_2 = -0,3333$			-50,8125	-0,5000				
6	$x_3=280 \rightarrow t_3 = -0,8000$			153,0625	-0,8000				
7	$y_L(-0,5; -0,8) =$	648,29375		-76,8125	0,4				
8					648,29375				
9	$y_L(x_1, x_3) =$	-5415,375	+	4354,688	*x1+	21,485	*x3+	-15,3625	*x1*x3
10	$y_L(0,9; 280) =$	648,29375							
11									
12		-5415,375		1					
13		4354,6875		0,9					
14		21,485		280					
15		-15,3625		252					
16				648,29375					

Obr. 166 Predikcia odozvy pre zvolené hodnoty úrovní parametrov

Optimalizácia

Pri hľadaní optimálneho riešiteľa v Exceli používame jeho doplnok *Riešiteľ* (*Solver*), ktorý je potrebné pred prvým použitím spustiť rovnako ako *Analytické nástroje*. Následne tento doplnok otvárame postupnosťou krokov *Údaje* → *Riešiteľ*. Pred samotným aktivovaním dialógového okna *Riešiteľa* musia byť pripravené údaje, ktoré súvisia s výpočtom predikovanej hodnoty, ktorú chceme optimalizovať. Na výpočet predikovanej hodnoty je možné použiť

funkciu **=SUMPRODUCT**, ktorá počíta skalárny súčin vektora koeficientov nami nájdeného regresného modelu a vektora úrovni vstupných faktorov, ktoré vystupujú v predpise regresného modelu. Pri optimalizácii sme použili transformovaný regresný model $(\hat{f}_L)_t(t_1, t_3) = 776,0625 - 50,8125t_1 + 153,0625t_3 - 76,8125t_1t_3$, preto úrovne faktorov t_1 a t_3 musia byť vyjadrené v kódovaných hodnotách, viď obr. 167.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
17	koeficienty regresného modelu								
18	Optimalizácia v Exceli - hľadáme požadovanú hodnotu odozvy, napr. $800 \cdot 10^{-10}$ m/min - riešenie cez Solver								
19	Intercept	776,0625	1						
20	t1	-50,8125							
21	t3	153,0625							
22	t1*t3	-76,8125	=C20*C21						
23	y modelovane=		776,0625						

Obr. 167 Výpočet predikovanej hodnoty odozvy pre zvolené úrovne faktorov pred spustením dialógového okna Riešiteľa

V dialógovom okne *Riešiteľa* (obr. 168) určíme cieľovú bunku, ktorú chceme optimalizovať, identifikujeme bunky s premennými, ktoré sa budú meniť, aby sa dosiahol cieľ, môžeme určiť obmedzenia a metódu riešenia.

Ako cieľová bunka je vybraná predikovaná hodnota

Ako cieľovú hodnotu si možno zvolit' maximum, minimum alebo presnú hodnotu

Obmedzenia určujúce nájdenie požadovanej hodnoty vstupov v rámci skúmaného experimentálneho priestoru

Hodnota 800 je zvolená ako cieľová hodnota

Identifikácia buniek s premennými, ktoré sa budú meniť

Tlačidlo na spustenie hľadania optimálneho riešenia

Obr. 168 Dialógové okno Riešiteľa

Excel našiel optimálne riešenie s hodnotou odozvy 799,9999, na obr. 169.

	A	B	C	D
17				
18	Optimalizacia v Exceli - hľadame požadovanú hodnotu odozvy, napr. $800 \cdot 10^{-10}$ m/min - riešenie cez Solver			
19	Intercept	776,0625	1	
20	t1	-50,8125	-0,0458146612192204	
21	t3	153,0625	0,138007504835749	
22	t1*t3	-76,8125	=C20*C21	
23	y modelovane=		=SUMPRODUCT(B19:B22;C19:C22)	- je požadovaná hodnota odozvy

Optimalizacia v Exceli - hľadame požadovanú hodnotu odozvy, napr. $800 \cdot 10^{-10}$ m/min - riešenie cez Solver				
Intercept	776,0625			
t1	-50,8125	-0,04581		
t3	153,0625	0,138008		
t1*t3	-76,8125	-0,00632		
y modelovane=		799,9999		- je požadovaná hodnota odozvy

Obr. 169 Nájdené optimálne riešenie v Exceli

Záver:

Hľadali sme úrovně faktorov, na ktoré máme A_medzeru medzi elektródami a C_výkon na katóde nastaviť, aby rýchlosť nitrídového leptania dosahovala požadovanú hodnotu. Zvolili sme rýchlosť nitrídového leptania $800 \cdot 10^{-10}$ m/min. Podľa nájdeného riešenia má byť A_medzera medzi elektródami nastavená na hodnotu -0,046 a C_výkon na katóde na 0,138. Vzhľadom na to, že toto sú kódované úrovně faktorov, spätnou transformáciou vieme vyjadriť úrovně faktorov v pôvodných jednotkách, t. j. faktor A_medzera medzi elektródami je potrebné nastaviť na 0,991 cm a faktor C_výkon na 103,45 W. Riešenie je na obr. 170.

	A	B	C	D	E	F	G	H
25	uroven faktora v kodovanych jednotkach				uroven faktora v povodnych jednotkach			
26	t1		-0,045814849		x1	=0,2*C26+1		
27	t3		0,138008077		x2	=25*C27+100		

	A	B	C	D	E	F	G	H
25	uroven faktora v kodovanych jednotkach				uroven faktora v povodnych jednotkach			
26	t1		-0,045814849		x1	0,99084		
27	t3		0,138008077		x2	103,45		

Obr. 170 Spätná transformácia umožňuje výpočet úrovni faktorov v pôvodných jednotkách

Príloha C obsahuje popis postupu riešenia v softvéri Minitab.

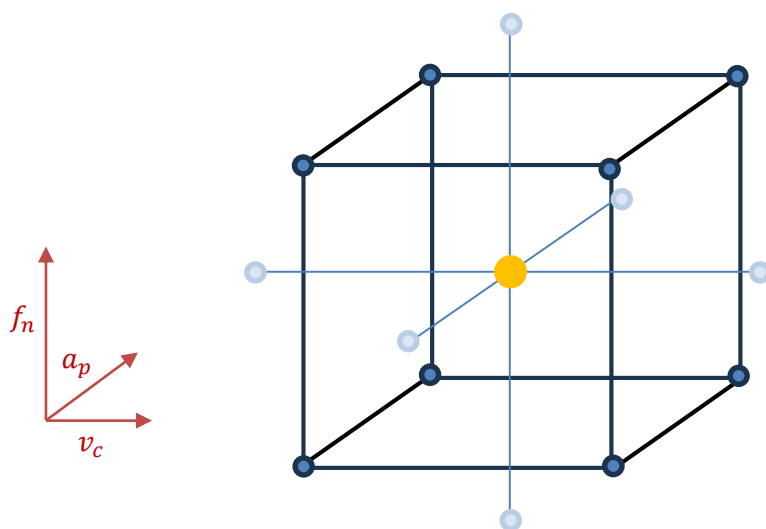
9 CENTRÁLNY KOMPOZITNÝ PLÁN (CENTRAL COMPOSITE DESIGN – CCD) – RIEŠENÝ VZOROVÝ PRÍKLAD

Bolo skúmané, aký vplyv majú parametre rezná rýchlosť, hĺbka rezu a posuv na kvalitu obrábania obrobku na CNC sústruhu, pričom boli zvolené premenné $x_1 \in \langle 80,68; 299,32 \rangle$ ako rezná rýchlosť v_c v m.min^{-1} , $x_2 \in \langle 1,1; 2,31 \rangle$ ako hĺbka rezu a_p v mm, $x_3 \in \langle 0,1; 0,39 \rangle$ posuv f_n v mm.ot^{-1} . Bolo merané ako od týchto zvolených faktorov závisia hodnoty drsnosti povrchu R_a a R_z , kde R_a predstavuje priemernú aritmetickú odchýlku posudzovaného profilu obrobku a R_z najväčšiu výšku nerovnosti profilu obrobku. Experiment zrealizoval a namerané hodnoty poskytol Bc. Michal Vincúr. Pri uvažovanom experimente bol použitý centrálny kompozitný plán (Central composite design CCD), t. j. k ôsmim faktorovým bodom v úplnom faktorovom pláne 2^3 bolo pridaných 6 axiálnych bodov a jeden centrálny bod. Pri plánovaní experimentu boli zvolené 2 replikácie, t. j. pri experimente bolo nameraných 40 hodnôt každej odozvy, kde 16 hodnôt je z faktorových bodov, 12 hodnôt z axiálnych bodov a 12 hodnôt je z vypočítanej replikácie v centrálnom bode. V naplánovaných 15 (8+6+1) bodoch experimentálneho priestoru boli namerané hodnoty drsnosti R_a a R_z v μm uvedené v tabuľke 6. Drsnosti boli v týchto bodoch merané trikrát a následne boli vyhodnocované ich priemerné hodnoty.

Tabuľka 6											
Tabuľka nameraných hodnôt drsností po randomizácii											
VSTUPNÉ PARAMETRE				MERANÉ PARAMETRE							
	REZNÁ RÝCHLOSŤ v_c [m.min ⁻¹]	HĽBKA REZU a_p [mm]	POSUV f_n [mm.ot ⁻¹]	DRSNOSŤ POVRCHU R_a (Priemerná aritmetická odchýlka posudzovaného profilu)				DRSNOSŤ POVRCHU R_z (Najväčšia výška nerovnosti profilu)			
				1. meranie	2. meranie	3. meranie	Priemer	1. meranie	2. meranie	3. meranie	Priemer
1	255,00	1,10	0,16	2,133	2,121	2,122	2,125	8,569	8,555	8,452	8,525
2	255,00	1,10	0,33	6,155	6,169	6,176	6,167	23,459	23,867	23,453	23,593
3	190,00	2,31	0,25	4,554	4,567	4,568	4,563	17,267	17,226	17,270	17,254
4	80,68	1,55	0,25	4,430	4,410	4,406	4,415	16,797	16,834	16,811	16,814
5	125,00	1,10	0,16	2,231	2,211	2,208	2,220	9,040	8,684	8,662	8,795
6	255,00	2,00	0,33	6,054	6,069	6,064	6,062	21,665	21,733	21,686	21,695
7	125,00	1,10	0,33	6,047	6,050	6,051	6,049	22,494	22,431	22,400	22,442
8	125,00	1,10	0,33	6,062	6,039	6,056	6,052	23,741	23,823	23,809	23,791
9	190,00	1,55	0,25	4,272	4,284	4,280	4,279	16,293	16,144	16,099	16,179
10	190,00	0,79	0,25	4,463	4,489	4,283	4,412	16,680	16,698	16,429	16,602
11	190,00	1,55	0,25	4,465	4,461	4,470	4,465	15,897	16,002	15,887	15,929
12	255,00	1,10	0,16	1,849	1,847	1,963	1,886	7,646	7,608	7,611	7,622
13	190,00	1,55	0,10	0,562	0,669	0,654	0,628	4,097	3,780	3,688	3,855
14	190,00	1,55	0,25	4,398	4,390	4,385	4,391	16,543	16,520	16,552	16,538

15	255,00	2,00	0,16	1,887	1,888	1,893	1,889	7,783	7,767	7,784	7,778
16	299,32	1,55	0,25	4,217	4,205	4,200	4,207	15,919	15,617	15,602	15,713
17	125,00	2,00	0,16	2,157	2,161	2,162	2,160	8,907	8,869	8,844	8,873
18	190,00	1,55	0,25	4,417	4,402	4,401	4,407	16,469	16,407	16,372	16,416
19	80,68	1,55	0,25	4,350	4,199	4,304	4,284	16,010	15,814	16,939	16,254
20	190,00	1,55	0,25	4,427	4,456	4,277	4,387	17,095	16,489	15,930	16,505
21	190,00	1,55	0,25	2,659	2,565	2,620	2,615	16,668	13,830	14,274	14,924
22	125,00	2,00	0,33	3,987	3,850	3,859	3,899	17,109	18,113	19,078	18,100
23	125,00	1,10	0,16	2,499	2,490	2,476	2,488	10,836	11,436	11,506	11,259
24	190,00	1,55	0,25	3,065	3,079	3,059	3,068	13,184	14,534	14,520	14,079
25	190,00	1,55	0,39	5,023	4,663	4,369	4,685	23,162	22,851	22,752	22,922
26	190,00	0,79	0,25	4,786	4,808	4,817	4,804	18,592	18,987	19,375	18,985
27	190,00	2,31	0,25	3,360	3,268	3,347	3,325	16,629	17,267	16,956	16,951
28	190,00	1,55	0,10	1,211	1,287	1,268	1,255	5,890	6,309	6,374	6,191
29	299,32	1,55	0,25	3,054	2,949	2,970	2,991	14,504	13,660	13,859	14,008
30	190,00	1,55	0,25	3,284	3,329	3,333	3,315	16,112	16,301	14,857	15,757
31	190,00	1,55	0,25	2,939	2,673	2,722	2,778	12,792	12,566	13,106	12,821
32	255,00	1,10	0,33	5,718	5,764	5,741	5,741	26,141	26,162	26,217	26,173
33	255,00	2,00	0,33	4,235	4,240	4,225	4,233	18,341	18,246	18,099	18,229
34	255,00	2,00	0,16	2,292	2,273	2,269	2,278	11,075	10,968	10,952	10,998
35	190,00	1,55	0,39	6,773	6,800	6,717	6,763	30,726	27,323	26,730	28,260
36	125,00	2,00	0,33	4,690	4,550	4,464	4,568	23,223	20,360	19,938	21,174
37	125,00	2,00	0,16	1,571	1,576	1,580	1,576	8,197	8,553	8,516	8,422
38	190,00	1,55	0,25	3,048	3,261	3,312	3,207	14,174	14,576	15,685	14,812
39	190,00	1,55	0,25	3,437	3,530	3,535	3,501	15,594	15,453	15,496	15,514
40	190,00	1,55	0,25	2,911	2,905	2,907	2,908	15,193	15,103	15,113	15,136

Body experimentálneho priestoru, v ktorých bolo realizované meranie drsností R_a a R_z sú zobrazené na obr. 171.



Obr. 171 Zobrazenie experimentálneho priestoru s bodmi, v ktorých realizujeme meranie pri centrálnom kompozitnom pláne pre tri faktory

Každý faktor bol meraný na 5 úrovniach, vid' tabuľka 7, kde $\alpha = 1,68179$.

Tabuľka 7 Vstupné nezávislé faktory a ich úrovne					
Faktory	v kódovaných jednotkách				
	$-\alpha$	-1	0	1	α
	v pôvodných jednotkách				
A _{vc} [m.min ⁻¹]	80,68	125	190	255	299,32
B _{ap} [mm]	0,79	1,1	1,55	2	2,31
C _{fn} [mm.ot ⁻¹]	0,1	0,16	0,25	0,33	0,39

Poznámka: Hodnota α pre CCD pre viac ako jeden faktor závisí od počtu faktorov a typu dizajnu (či má byť **rotabilný** alebo nie). Pre požadovanú rotabilitu pri troch faktoroch sa α vypočíta podľa vzorca $\alpha = (\text{počet faktorových bodov})^{1/4}$. Pre 3 faktory je počet faktorových bodov rovný 2^3 , preto $\alpha = \sqrt[4]{8} = 1,68179$.

Pri plánovaní experimentu je častokrát potrebné z dôvodu realizovateľnosti merania zohľadniť, že pôvodne uvažované hranice intervalov faktorov budú po kódovaní zodpovedať intervalu $(-\alpha; \alpha)$, preto je potrebné dopočítať reálne súradnice faktorových bodov, ktoré sú vyjadrené v kódovaných hodnotách pomocou ± 1 . Napríklad pre reznú rýchlosť, t. j. pre faktor A_{vc}, vypočítame súradnice faktorových bodov nasledovným spôsobom:

$$\begin{array}{ccccccc}
 -\alpha & -1 & & 0 & & 1 & \alpha \\
 | & | & & | & & | & | \\
 \hline
 80 & x_1 & & 190 & & x_2 & 300
 \end{array}$$

Pre reznú rýchlosť v_c platí $\frac{\alpha}{1} = \frac{300-190}{x_2-190} \Rightarrow x_2 \doteq 255 \Rightarrow x_1 = 190 - 65 = 125$

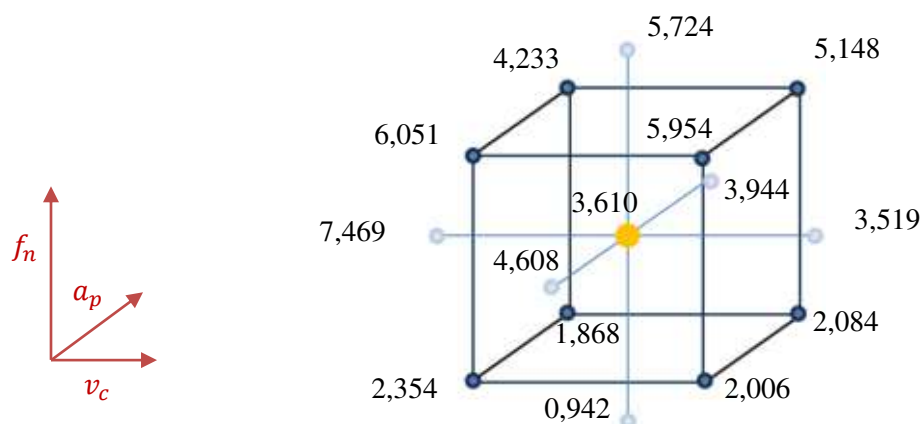
Pôvodné nami určené hranice intervalu pre reznú rýchlosť (80;300) v m/min následne korigujeme pre $\alpha = 1,68179$ na interval (80,68;299,32) v m/min.

Rovnakým spôsobom postupujeme aj pri výpočtoch súradníc pre zvyšné dva faktory B a C:

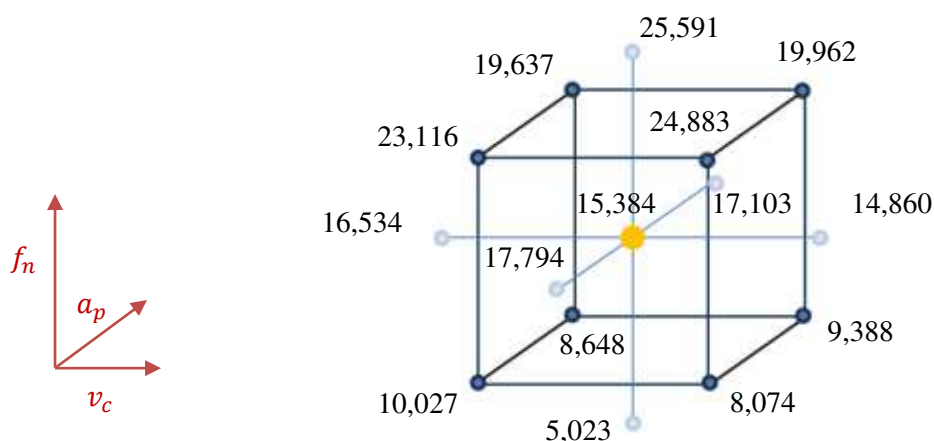
Pre hĺbku rezu a_p platí $\frac{\alpha}{1} = \frac{2,31-1,55}{x_2-1,55} \Rightarrow x_2 \doteq 2 \Rightarrow x_1 = 1,55 - 0,45 = 1,1$

Pre posuv f_n platí $\frac{\alpha}{1} = \frac{0,39-0,25}{x_2-0,25} \Rightarrow x_2 \doteq 0,33 \Rightarrow x_1 = 0,25 - 0,08 = 0,16$

Cplot na obr. 172 a 173 s vypočítanou priemernou nameranou hodnotou odozvy v jednotlivých experimentálnych bodoch poskytuje vizuálnu predstavu o výsledkoch experimentu vzhľadom na zvolené kombinácie úrovní faktorov.



Obr. 172 Grafické znázornenie priemerných nameraných hodnôt odozvy drsnosti Ra v jednotlivých experimentálnych bodoch pri experimente CCD s tromi faktormi



Obr. 173 Grafické znázornenie priemerných nameraných hodnôt odozvy drsnosti Rz v jednotlivých experimentálnych bodoch pri experimente CCD s tromi faktormi

Vzhľadom na súčasne sledované dve odozvy – drsnosť povrchu Ra a Rz je potrebné vyhodnocovať namerané výsledky samostatne pre každú z nich.

Analýza výsledkov pre odozvu Ra

Hierarchický model a identifikácia štatistickej významnosti lineárneho a kvadratického vplyvu skúmaných faktorov a ich interakcií

Centrálny kompozitný plán CCD je prioritne zameraný na hľadanie úplného kvadratického regresného modelu, prostredníctvom ktorého hľadáme optimálne riešenie. Pri výpočte v Exceli je potrebné pôvodné úrovne faktorov zapísať v kódovaných jednotkách.

Nekódované jednotky neumožňujú správne štatistické vyhodnotenie. V analytických nástrojoch (*Data→Data analysis→Regression*) musí byť ako „nezávislá premenná“ X zapísaná súvislá oblasť, ktorá obsahuje stĺpce predstavujúce všetky členy, ktoré majú v regresnom modeli vystupovať, t. j. členy predstavujúce lineárny aj kvadratický vplyv faktorov a ich uvažované interakcie. Všetky kombinácie úrovní musia byť vyjadrené v kódovaných jednotkách. Korektný spôsob zápisu je na obr. 174 a 175. Význam jednotlivých stĺpcov je popísaný v prvom riadku. Stĺpce A, B, C s úrovňami faktorov predstavujú lineárny vplyv faktorov, stĺpce D, E, F kvadratický vplyv faktorov, stĺpce G, H, I interakcie faktorov.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	vc	ap	fn	vc*vc	ap*ap	fn*fn	vc*ap	vc*fn	ap*fn	drsnosť Ra	drsnosť Rz
2	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	2,125	8,525
3	1	-1	1	1	1	1	-1	1	-1	6,167	23,593
4	0	1,68179	0	0	2,82842712	0	0	0	0	4,563	17,254
5	-1,68179	0	0	2,8284271	0	0	0	0	0	4,415	16,814
6	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	2,220	8,795
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	6,062	21,695
8	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	6,049	22,442
9	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	6,052	23,791
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4,279	16,179
11	0	-1,68179	0	0	2,82842712	0	0	0	0	4,412	16,602
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4,465	15,929
13	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1,886	7,622
14	0	0	-1,68179	0	0	2,82843	0	0	0	0,628	3,855
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4,391	16,538
16	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1,889	7,778
17	1,68179	0	0	2,8284271	0	0	0	0	0	4,207	15,713
18	-1	1	-1	1	1	1	-1	1	-1	2,160	8,873
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4,407	16,416
20	-1,68179	0	0	2,8284271	0	0	0	0	0	4,284	16,254
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4,387	16,505
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,615	14,924
23	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	1	3,899	18,100
24	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	2,488	11,259
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3,068	14,079
26	0	0	1,68179	0	0	2,82843	0	0	0	4,685	22,922
27	0	-1,68179	0	0	2,82842712	0	0	0	0	4,804	18,985
28	0	1,68179	0	0	2,82842712	0	0	0	0	3,325	16,951
29	0	0	-1,68179	0	0	2,82843	0	0	0	1,255	6,191
30	1,68179	0	0	2,8284271	0	0	0	0	0	2,991	14,008
31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3,315	15,757
32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,778	12,821
33	1	-1	1	1	1	1	-1	1	-1	5,741	26,173
34	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4,233	18,229
35	1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	2,278	10,998
36	0	0	1,68179	0	0	2,82843	0	0	0	6,763	28,260
37	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	1	4,568	21,174
38	-1	1	-1	1	1	1	-1	1	-1	1,576	8,422
39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3,207	14,812
40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3,501	15,514
41	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,908	15,136

Obr. 174 Zadávanie kombinácií úrovní faktorov, v ktorých bolo realizované meranie odoziev pre CCD musí byť v Exceli doplnené fiktívnymi premennými, ktoré predstavujú členy regresného modelu

Ako odozva Y je zvolený iba stĺpec s nameranými hodnotami drsnosti Ra

Ako nezávislá premenná X je zvolená súvislá oblasť v stĺpcoch A až I

The screenshot shows the 'Regression' dialog box in Excel. The 'Input Y Range' is set to '\$J\$1:\$J\$41' and the 'Input X Range' is set to '\$A\$1:\$I\$41'. The 'Labels' checkbox is checked. The 'Output Range' is set to '\$A\$43'. The 'Confidence Level' is 95%.

Obr. 175 Zadávanie vstupných údajov použité pri regresnej analýze s viacerými vstupnými parametrami v dialógovom okne v Exceli

Výstup regresnej analýzy v Exceli je na obr. 176. Môžeme ho rozdeliť do troch častí.

Regression Statistics						
Multiple R	0,91834185					
R Square	0,84335175					
Adjusted R Square	0,79635727					
Standard Error	0,66774436					
Observations	40					
ANOVA						
	df	SS	MS	F	Significance F	
Regression	9	72,01532343	8,0017026	17,94576363	8,77805E-10	
Residual	30	13,37647609	0,44588254			
Total	39	85,39179953				
	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%
Intercept	3,61524662	0,192572327	18,7734483	3,93261E-18	3,221961466	4,00853178
vc	-0,04226565	0,127767353	-0,33080164	0,743093745	-0,303201395	0,2186701
ap	-0,30372293	0,127767353	-2,37715604	0,024023043	-0,564658679	-0,04278719
fn	1,54629147	0,127767353	12,1023989	4,51139E-13	1,285355726	1,80722722
vc*vc	0,09423727	0,124378065	0,75766795	0,454560446	-0,159776622	0,34825117
ap*ap	0,2007747	0,124378065	1,61422913	0,116948346	-0,053239201	0,45478859
fn*fn	-0,13256723	0,124378065	-1,06584088	0,294998748	-0,386581123	0,12144667
vc*ap	0,19692708	0,166936091	1,17965553	0,247407674	-0,144001898	0,53785606
vc*fn	0,11871875	0,166936091	0,71116287	0,482476537	-0,222210231	0,45964773
ap*fn	-0,27690625	0,166936091	-1,65875604	0,107585677	-0,617835231	0,06402273

Obr. 176 Výstup regresnej analýzy v Exceli

Z prvej časti výstupu Excelu z tabuľky so všeobecnými štatistikami vyplýva údaj, že regresný model dokáže vysvetliť 84,34% variability nameraných hodnôt odozvy drsnosti R_a , 15,66% variability meraných dát zostalo modelom nevysvetlených. Upravený index determinácie sa výrazne od $R^2 = 84,34\%$ nelíši, je rovný 79,64%. Štandardná chyba, ktorej sme sa dopustili je 0,67, pozorovaných (vyhodnocovaných) hodnôt bolo 40.

Tabuľka ANOVA v druhej časti poskytuje informácie o sume štvorcov odchýlok od celkového priemeru - a to celkovej, vysvetlenej aj nevysvetlenej regresným modelom s predpisom $f_t(t_1, t_2, t_3) = b_0 + b_1t_1 + b_2t_2 + b_3t_3 + b_{11}t_1^2 + b_{22}t_2^2 + b_{33}t_3^2 + b_{12}t_1t_2 + b_{13}t_1t_3 + b_{23}t_2t_3$. Z podielu rozptylu vysvetleného a nevysvetleného regresným modelom je vypočítaná realizácia testovacej štatistiky pre celkový F-test o štatistickej významnosti regresného modelu $F_0 = 17,95$. Vzhľadom na kvantil $F_{9,30}^{kv}(0,95) = 2,21$ a kritickú oblasť $W = (2,21; \infty)$, do ktorej realizácia testovacej štatistiky F_0 nepatrí a rovnako podľa p-hodnoty $= 8,78 \cdot 10^{-10}$ možno na hladine významnosti 0,05 prijať záver, že nájdený regresný model je signifikantný.

Z tretej časti tabuľky s údajmi týkajúcimi sa regresných koeficientov možno napríklad podľa p-hodnoty zodpovedajúcej jednotlivým regresným koeficientom rozhodnúť, že pre drsnosť R_a bude na hladine významnosti 0,05 signifikantný iba lineárny vplyv faktora B hĺbka rezu a_p a faktora C posun f_n . K rovnakým záverom dospejeme porovnaním 95%-ných intervalov spoľahlivosti pre jednotlivé regresné koeficienty.

Rovnaký záver, týkajúci sa kvality regresného modelu, vyplýva aj z výstupu softvéru Minitab. Index determinácie $R^2 = 84,34\%$, upravený index determinácie $\text{adj } R^2 = 79,64\%$, ale tiež prediktívny index determinácie $\text{pred } R^2 = 72,91\%$, vyjadrujú kvalitu regresného modelu, vid'. obr. 177.

Model Summary			
S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)
0,667744	84,34%	79,64%	72,91%

Obr. 177 Kvalita modelu vyjadrená pomocou rôznych R square v Minitabe

Tabuľka s bodovými odhadmi koeficientov úplného kvadratického regresného modelu v Minitabe na obr. 178 poskytuje realizácie testovacích štatistík t-testov štatistickej významnosti regresných koeficientov, p-hodnoty a faktor VIF. Bodové odhady $\hat{b}$ koeficientov

transformovanej regresnej funkcie pre úplný kvadratický regresný model s predpisom $f_t(t_1, t_2, t_3) = b_0 + b_1t_1 + b_2t_2 + b_3t_3 + b_{11}t_1^2 + b_{22}t_2^2 + b_{33}t_3^2 + b_{12}t_1t_2 + b_{13}t_1t_3 + b_{23}t_2t_3$ sú: $\hat{b}_0 = 3,615$, $\hat{b}_1 = -0,042$, $\hat{b}_2 = -0,304$, $\hat{b}_3 = 1,546$, $\hat{b}_{11} = 0,094$, $\hat{b}_{22} = 0,201$, $\hat{b}_{33} = -0,133$, $\hat{b}_{12} = 0,197$, $\hat{b}_{13} = 0,119$, $\hat{b}_{23} = -0,277$.

Faktor VIF má hodnoty rovné alebo veľmi blízke 1, čo hovorí, že medzi skúmanými faktormi nie je prítomná korelácia.

Pri rozhodovaní o ďalšom ponechaní, resp. vylúčení faktorov v ďalšom skúmaní môžeme napríklad pomocou p-hodnoty v stĺpci *P-Value* identifikovať, ktoré koeficienty, a tým aj ktoré členy modelu v ňom majú zostať a ktoré môžeme vylúčiť. Rozhodneme, ktorý lineárny a ktorý kvadratický vplyv faktora či interakcie faktorov sú, či nie sú štatisticky významné (signifikantné) vzhľadom na skúmanú drsnosť Ra. V našom prípade možno na hladine významnosti 0,05 ponechať v ďalšom skúmaní iba faktory hĺbka rezu a_p a posuv f_n , pretože ich p-hodnota je menšia ako nami zvolené $\alpha = 0,05$, obr.178. Po vylúčení nevýznamných členov z pôvodného regresného modelu dostaneme regresný model, ktorý spĺňa vlastnosť hierarchie.

Coded Coefficients

Term	Coef	SE Coef	T-Value	P-Value	VIF
Constant	3,615	0,193	18,77	0,000	
vc	-0,042	0,128	-0,33	0,743	1,00
ap	-0,304	0,128	-2,38	0,024	1,00
fn	1,546	0,128	12,10	0,000	1,00
vc*vc	0,094	0,124	0,76	0,455	1,02
ap*ap	0,201	0,124	1,61	0,117	1,02
fn*fn	-0,133	0,124	-1,07	0,295	1,02
vc*ap	0,197	0,167	1,18	0,247	1,00
vc*fn	0,119	0,167	0,71	0,482	1,00
ap*fn	-0,277	0,167	-1,66	0,108	1,00

Obr. 178 Výstup Minitabu obsahujúci bodové odhady koeficientov regresného modelu s výsledkami t-testu ich štatistickej významnosti

K rovnakým záverom sa dostaneme aj z časti tabuľky ANOVA na obr. 179. Je rozšírenou verziou ANOVY v Exceli, pretože vysvetlenú variabilitu dát v rámci regresného modelu Minitab rozdeľuje na lineárnu a kvadratickú zložku a na časť predstavujúcu interakcie druhého rádu. Vzhľadom na to, že daná zložka rozptylov je vždy porovnávaná s reziduálnym rozptylom $\text{Adj MS} = 0,4459$, umožňuje rozhodnúť, ktorú zložku regresného modelu možno považovať za signifikantnú. Z porovnania p-hodnoty s hladinou významnosti $\alpha = 0,05$ v modeli ponechávame ako štatisticky významnú iba lineárnu zložku regresného modelu.

V rámci nej je možné z modelu vylúčiť ako nevýznamný lineárny vplyv faktora rezná rýchlosť v_c s p-hodnotou 0,743. V regresnom modeli ponechávame iba faktory hĺbka rezu a_p a posuv f_n .

Analysis of Variance

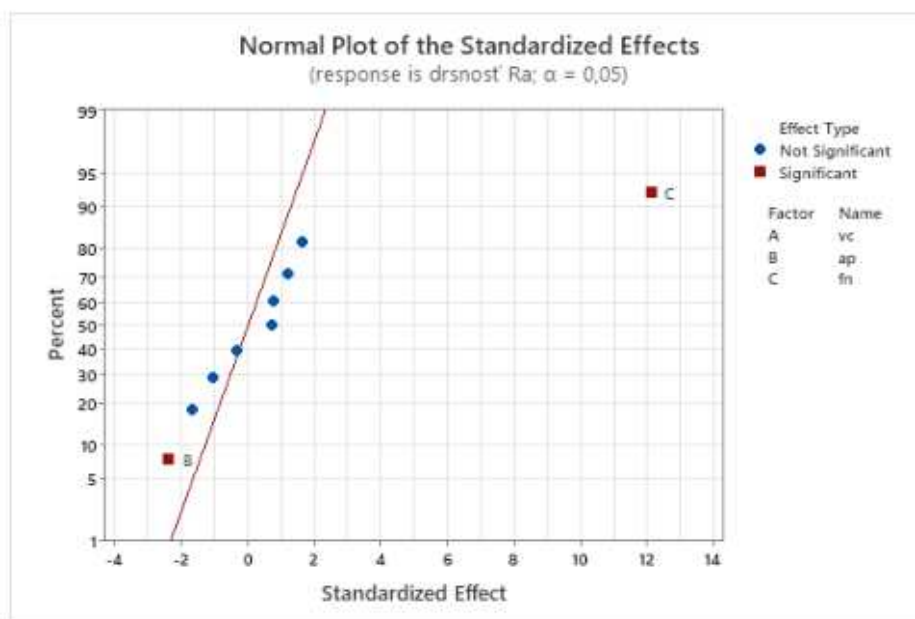
Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	9	72,0153	8,0017	17,95	0,000
Linear	3	67,8760	22,6253	50,74	0,000
vc	1	0,0488	0,0488	0,11	0,743
ap	1	2,5196	2,5196	5,65	0,024
fn	1	65,3075	65,3075	146,47	0,000
Square	3	2,0665	0,6888	1,54	0,223
vc*vc	1	0,2560	0,2560	0,57	0,455
ap*ap	1	1,1619	1,1619	2,61	0,117
fn*fn	1	0,5065	0,5065	1,14	0,295
2-Way Interaction	3	2,0728	0,6909	1,55	0,222
vc*ap	1	0,6205	0,6205	1,39	0,247
vc*fn	1	0,2255	0,2255	0,51	0,482
ap*fn	1	1,2268	1,2268	2,75	0,108
Error	30	13,3765	0,4459		
Lack-of-Fit	5	1,3725	0,2745	0,57	0,721
Pure Error	25	12,0040	0,4802		
Total	39	85,3918			

Vplyv faktora v_c možno v rámci lineárnej zložky regresného modelu považovať za štatisticky nevýznamný; vplyv faktorov a_p a f_n za štatisticky významný.

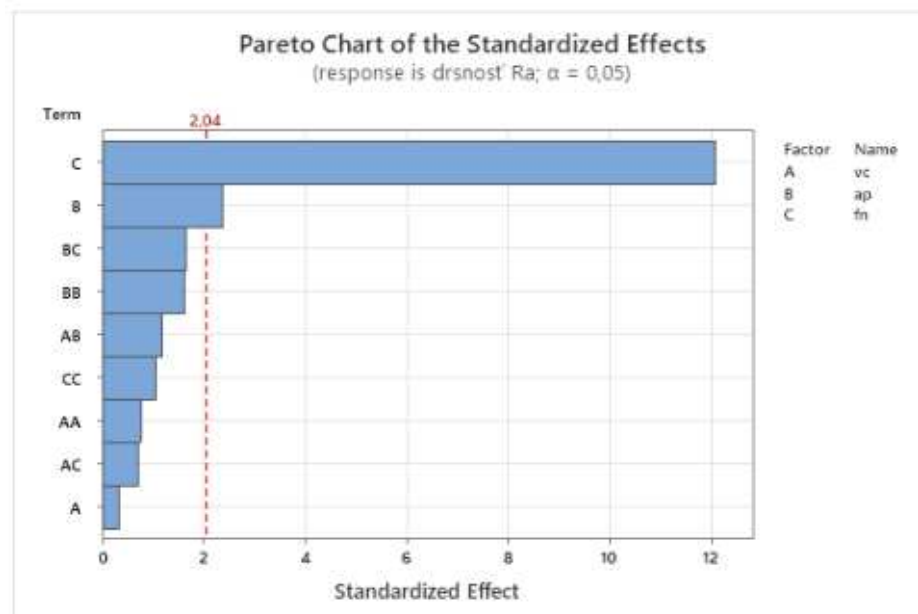
Časť týkajúca sa testu Lack of fit

Obr. 179 Tabuľka ANOVA, ktorá je súčasťou výstupu analýzy CCD v Minitabe

Uvedené rozhodnutie potvrdzuje normálny pravdepodobnostný graf efektov, kde je označený ako signifikantný samostatný vplyv faktorov B a C na obr. 180. To isté ukazuje Pareto graf na obr. 181, v ktorom iba efekty faktorov B a C presiahli kritickú hodnotu 2,04.

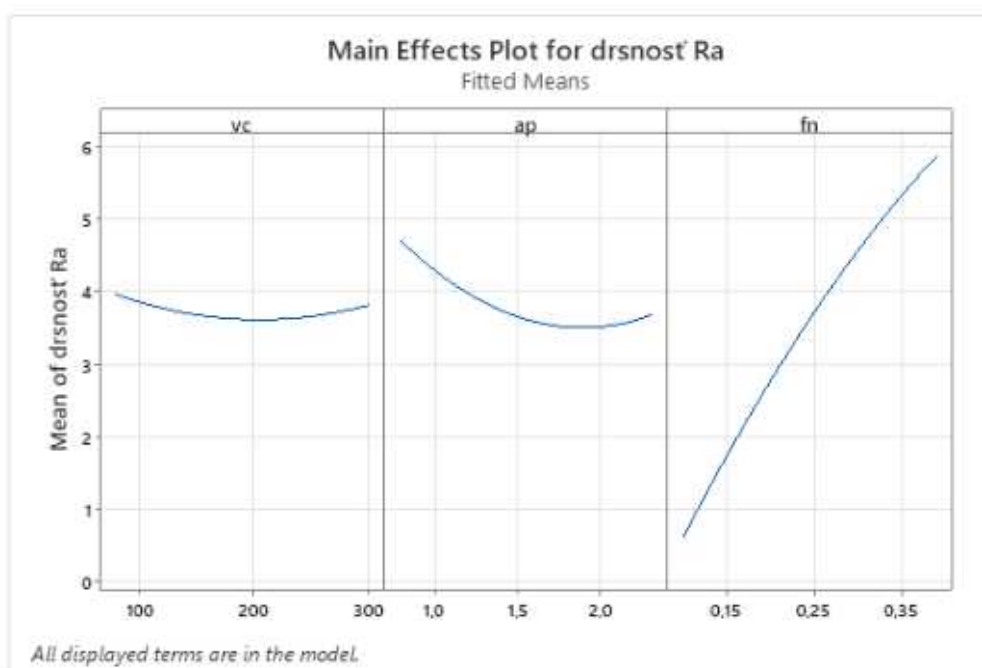


Obr. 180 Normálny pravdepodobnostný graf v Minitabe rozdeľuje vplyv faktorov a ich interakcií na signifikantný a nesignifikantný



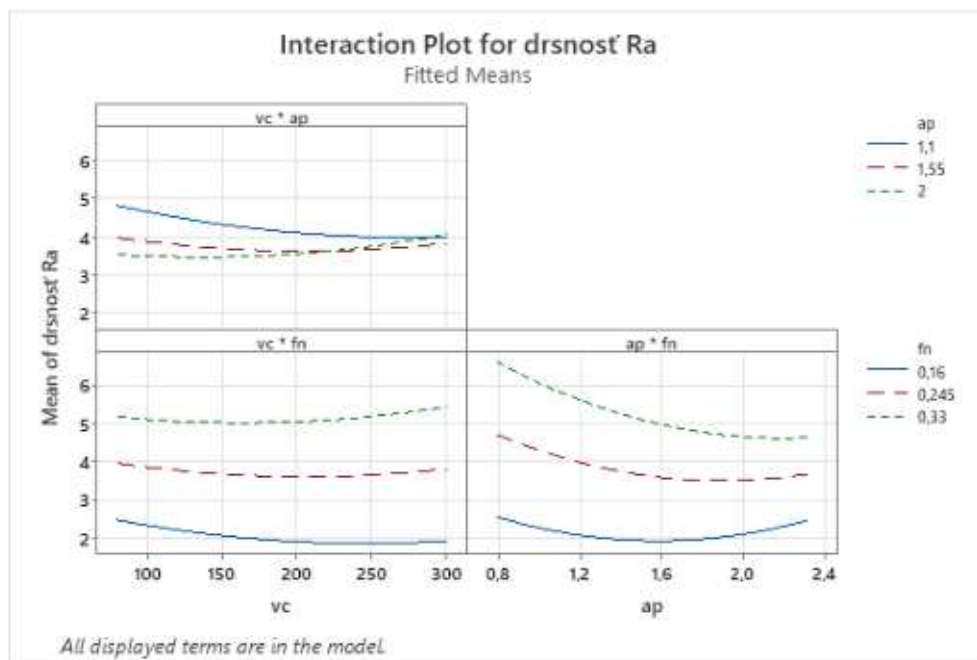
Obr. 181 Pareto graf v Minitabe porovnáva veľkosti efektov

Grafy hlavných efektov na obr. 182 nie sú zobrazené ako úsečky, ale ako krivky alebo lomené čiary, pretože hodnoty odozvy boli merané na viacerých (piatich) úrovniach každého faktora. Z porovnania kriviek vidieť, že najmenší sklon má krivka pri faktore A_ rezná rýchlosť v_c , t. j. najmenší vplyv na drsnosť Ra pri zanedbaní vplyvu interakcie má rezná rýchlosť v_c . Hlavný efekt faktora B_hĺbka rezu a_p je negatívny a hlavný efekt faktora C_posuv f_n je pozitívny, pričom pri zanedbaní interakcie medzi faktormi možno považovať vplyv faktora C_posuv f_n na odozvu Ra za najväčší.



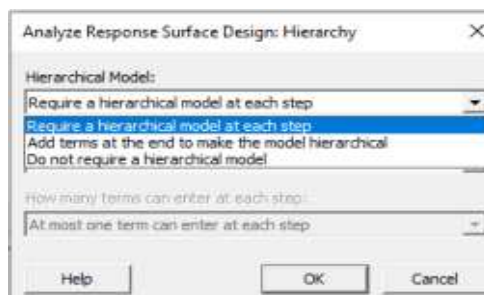
Obr. 182 Grafy hlavných efektov v Minitabe

Grafy interakcie faktorov z výstupu Minitabu sú na obr. 183. Uvedené krivky možno s výnimkou krivky faktora v_c pre $a_p = 2$ považovať za takmer rovnobežné, preto neočakávame, že interakcia medzi skúmanými faktormi bude signifikantná.

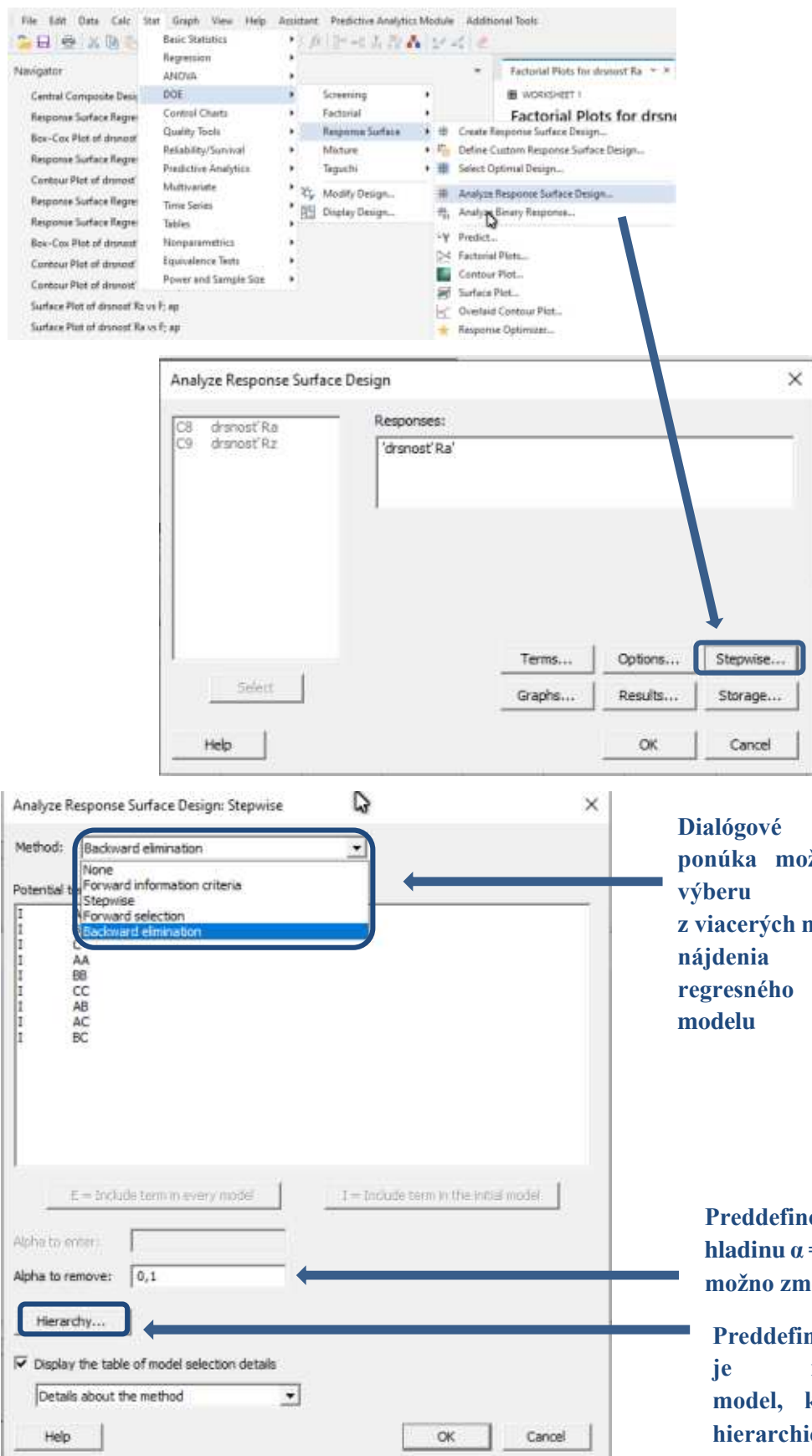


Obr. 183 Grafy interakcie faktorov v Minitabe

V prípade, že chceme z regresného modelu vylúčiť štatisticky nevýznamné (nesignifikantné) členy pomocou softvéru Minitab, môžeme to urobiť ručne v časti Terms, alebo volíme metódu postupnej spätnej eliminácie (Backward elimination), kedy softvér postupne s prepočítaním všetkých hodnôt štatistickej významnosti v každom kroku z regresného modelu vylúči štatisticky nevýznamné členy na zvolenej hladine významnosti α . Preddefinovaná je hodnota $\alpha = 0,01$, ktorá zabezpečuje dostatočnú robustnosť, v princípe je možné túto hodnotu α zmeniť, napr. môžeme zvoliť $\alpha = 0,05$. Postup spustenia spätnej eliminačnej metódy v Minitabe je naznačený na obr. 184. Pri opätovnom spustení analýzy Response Surface Design v časti Stepwise volíme Backward elimination. Softvér nájde regresný model, ktorý je hierarchický, obr. 185.



Obr. 184 Preddefinovaná vlastnosť hierarchie pri hľadaní regresného modelu



Obr. 185 Postup spustenia spätnej eliminačnej metódy pri hľadaní hierarchického modelu v softvéri Minitab

Výstup Minitabu po spustení spätnej eliminačnej metódy vypíše všetky členy, ktoré v regresnom modeli zostali po vylúčení štatisticky nevýznamných členov pri dodržaní hierarchie regresného modelu, obr. 186.

Backward Elimination of Terms

α to remove = 0,05

Coded Coefficients

Term	Coef	SE Coef	T-Value	P-Value	VIF
Constant	3,726	0,109	34,20	0,000	
ap	-0,304	0,132	-2,30	0,027	1,00
fn	1,546	0,132	11,73	0,000	1,00

Obr. 186 Výstup spätnej eliminačnej metódy po vylúčení štatisticky nevýznamných členov v Minitabe

Obr. 187 zobrazuje kvalitu nového regresného modelu podľa rôznych R^2 . Vidíme, že rozdiely medzi týmito charakteristikami sa v porovnaní s modelom, ktorý obsahoval i nevýznamné členy, zmenšili. Nový regresný model vie vysvetliť 79,43% nameraných hodnôt drsnosti R_a . Je zrejmé, že podiel vysvetlenej variability meranej odozvy bude v porovnaní s pôvodným regresným modelom menší vzhľadom na menší počet členov regresného modelu. Pozitívne hodnotíme, že rozdiel medzi indexom determinácie a upraveným indexom determinácie sa zmenšil. Schopnosť regresného modelu predikovať hodnoty odozvy sa v porovnaní s pôvodným regresným modelom zväčšila.

Model Summary

S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)
0,688999	79,43%	78,32%	75,72%

Obr. 187 Kvalita regresného modelu po vylúčení štatisticky nevýznamných členov v Minitabe

Štatistickú významnosť jednotlivých členov nového regresného modelu vidíme na obr. 186 i v tabuľke ANOVA na obr. 188. V časti tabuľky 186, ktorá obsahuje bodové odhady kódovaných koeficientov, sú vypočítané hodnoty, ktoré súvisia s t-testom štatistickej významnosti regresných koeficientov (testujeme „nulovosť“ regresných koeficientov pri a_p a f_n). Výstupom ANOVY na obr.188, ktorá analyzuje zložky rozptylu, sú realizácie F testu dodatočného príspevku k -tej vysvetľujúcej premennej a im prislúchajúce p-hodnoty, ktoré sa zhodujú s výsledkom t-testov štatistickej významnosti daných regresných koeficientov. Realizácia testovacej štatistiky F_0 pre celkový F test

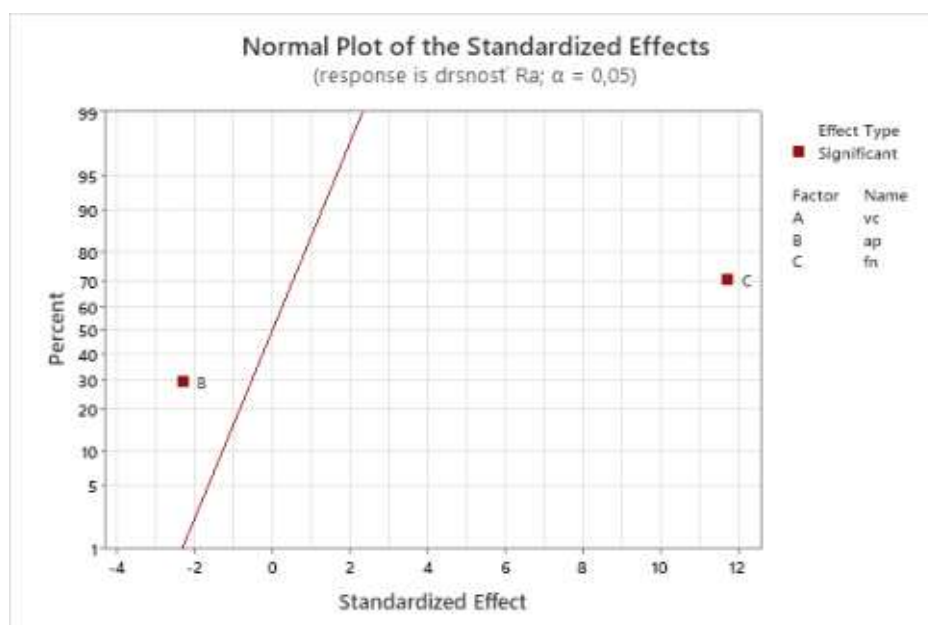
štatistickej významnosti regresného modelu 71,44 leží v kritickej oblasti ($F_{2,37}^{kv}(1 - \alpha); \infty$) a rovnako p-hodnota = 0,000 je menšia ako zvolené α , preto možno považovať nájdený regresný model za štatisticky významný na danej hladine významnosti. Súčasťou tabuľky ANOVA je aj test Lack of Fit, na základe ktorého možno vzhľadom na p-hodnotu rovnú 0,505 považovať regresný model za dostatočný.

Analysis of Variance

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	2	67,827	33,9136	71,44	0,000
Linear	2	67,827	33,9136	71,44	0,000
ap	1	2,520	2,5196	5,31	0,027
fn	1	65,308	65,3075	137,57	0,000
Error	37	17,565	0,4747		
Lack-of-Fit	12	5,561	0,4634	0,97	0,505
Pure Error	25	12,004	0,4802		
Total	39	85,392			

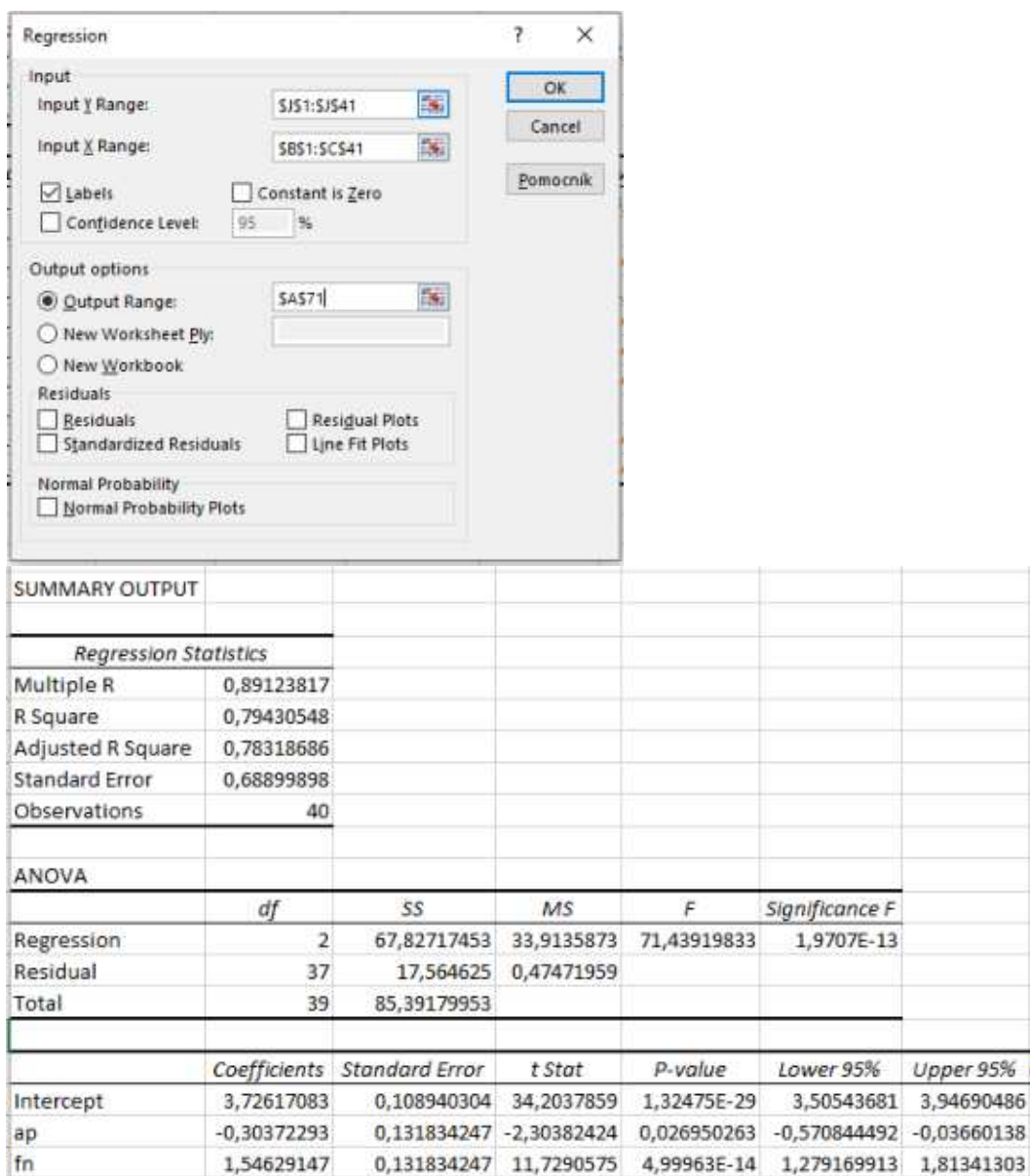
Obr. 188 ANOVA pre regresný model získaný po vylúčení štatisticky nevýznamných členov

Štatistickú významnosť vplyvu ponechaných faktorov na odozvu ukazuje aj normálny pravdepodobnostný graf pre standardizované efekty. Vplyv ponechaných faktorov B_hĺbka rezu a_p a C_posuv f_n je podľa tohto grafu signifikantný.



Obr. 189 Normálny pravdepodobnostný graf efektov s ponechanými členmi hierarchického regresného modelu

Postup riešenia s výstupom v Exceli naznačuje obr. 190. Po vylúčení štatisticky nevýznamných členov regresného modelu, analýza dát musí byť opätovne spustená. Ako nezávislá premenná X sú označené iba susedné stĺpce B a C, v ktorých sú zapísané kombinácie úrovni faktorov B _ hĺbka rezu a_p aj C _ posuv f_n , ku ktorým bola nameraná zodpovedajúca drsnosť R_a . Výstup regresnej analýzy v Exceli je totožný s výstupom v Minitabe.



Obr. 190 Spustenie a výstup regresnej analýzy v Exceli po vylúčení štatisticky nevýznamných členov

Bodový odhad transformovanej lineárnej regresnej funkcie $\hat{f}_t(t_2, t_3)$, ktorú dostaneme po vylúčení štatisticky nevýznamných členov je

$$(\hat{f}_L)_t(t_1, t_3) = 3,73 - 0,30t_2 + 1,55t_3$$

Odtiaľ bodový odhad lineárnej regresnej funkcie $\hat{f}(x_2, x_3)$ v neupravenom tvare po spätnom dosadení transformačných vzťahov pre ponechané faktory bude:

$$\hat{f}_L(x_2, x_3) = 3,73 - 0,30 \frac{x_2 - 1,55}{0,9} + 1,55 \frac{x_3 - 0,25}{0,085}$$

Po úprave

$$\hat{f}_L(x_2, x_3) = -0,312 - 0,333x_2 + 18,235x_3$$

Testovanie hypotéz

Ďalšia časť je zameraná na výpočet riešenia vybraných testov hypotéz. Uvádzaný je podrobný postup pri zvolenom teste hypotézy spolu s jeho grafickým riešením.

Individuálne t-testy štatistickej významnosti regresných koeficientov

Ak chceme napríklad otestovať, či má hĺbka rezu a_p výrazný vplyv na drsnosť R_a , môžeme použiť individuálny t -test štatistickej významnosti regresných koeficientov. Volíme ľubovoľnú malú chybu I. druhu α , ktorej sa môžeme dopustiť pri vyhodnocovaní hypotéz, najčastejšie $\alpha = 0,05$. Na zvolenej hladine významnosti 5% chceme otestovať, či je vplyv samostatného pôsobenia faktora x_2 – hĺbka rezu a_p na hodnotu lineárnej regresnej funkcie $f(x_2, x_3) = b_0 + b_2x_2 + b_3x_3$ štatisticky významný.

Pri testovaní používame kódované hodnoty, resp. transformovanú lineárnu regresnú funkciu, preto samostatné pôsobenie faktora x_2 na hodnotu $f(x_2, x_3)$ vyhodnocujeme ako samostatné pôsobenie transformovaného faktora t_2 na hodnotu $f_t(t_2, t_3) = b_0 + b_2t_2 + b_3t_3$. Samostatné pôsobenie transformovaného faktora t_2 testujeme pomocou koeficientu b_2 , ktorý pri ňom stojí. Nulová hypotéza H_0 hovorí, že regresný koeficient b_2 nie je štatisticky významný, oproti stojí obojstranná alternatívna hypotéza H_1 , ktorá hovorí, že regresný koeficient b_2 je štatisticky významný: $H_0: b_2 = 0 \leq H_1: b_2 \neq 0$.

Z výstupu Excelu na obr.191 použijeme riadok, v ktorom sa nachádzajú údaje súvisiace s koeficientom b_2 , ktorý stojí pri faktore a_p vyjadrenom v kódovaných jednotkách.

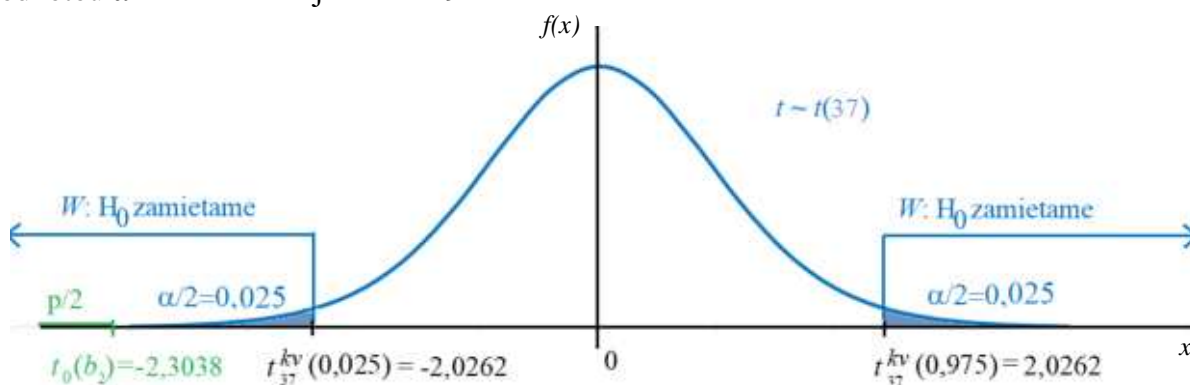
	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%
Intercept	3,72617083	0,108940304	34,2037859	1,32475E-29	3,50543681	3,94690486
a_p	-0,30372293	0,131834247	-2,30382424	0,026950263	-0,570844492	-0,03660138
f_n	1,54629147	0,131834247	11,7290575	4,99963E-14	1,279169913	1,81341303

Obr. 191 Tabuľka s bodovými odhadmi koeficientov a im prislúchajúcimi hodnotami

Testovacia štatistika $t(b_2) = \frac{\hat{b}_2}{SE(b_2)} \sim t(n - k - 1)$, kde $\hat{b}_2$ je bodový odhad regresného koeficientu b_2 : $\hat{b}_2 = -0,30372293$, $SE(b_2) = 0,131834247$ je štandardná chyba tohto odhadu, $n = 40$ je celkový počet nameraných hodnôt, $k = 2$ je počet členov testovaného regresného modelu (máme dva lineárne členy $b_2 t_2$ a $b_3 t_3$). Odtiaľ $n - k - 1 = 40 - 2 - 1 = 37$ je parameter Studentovho t-rozdelenia, ktorým sa riadi naša testovacia štatistika. Zápis $t(b_i) \sim t(37)$ čítame: testovacie štatistiky pre koeficienty b_i majú Studentovo rozdelenie s 37 stupňami voľnosti.

Na základe analyzovaných údajov vypočítaná hodnota testovacej štatistiky pre regresný koeficient b_2 , t. j. realizácia testovacej štatistiky $t_0(b_2) = \frac{-0,30372293}{0,131834247} \doteq -2,30382424$. Túto hodnotu nájdeme v stĺpci *t Stat* v tabuľke na obr. 191.

Vizuálnu predstavu o rozdelení testovacej štatistiky $t(b_2)$ o umiestnení hodnoty testovacej štatistiky t_0 vzhľadom na kritickú oblasť W zamietnutia nulovej hypotézy H_0 , ktorú sme určili podľa zvolenej hladiny významnosti α , o veľkosti p-hodnoty v porovnaní s hodnotou α dáva nasledujúci obr. 192.



Obr. 192 Grafické riešenie pre testovanie hypotézy o koeficiente b_2

O výsledku testu hypotéz rozhodujeme 3 spôsobmi, pričom vždy musíme dostať rovnaký záver:

- Pomocou kritickej oblasti (kritického oboru) $W = (-\infty; -2,0262) \cup (2,0262, \infty)$, kde pre obojstrannú alternatívu určíme kritickú hodnotu pomocou kvantilu $t_{n-k-1}^{kv} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$, t. j. vypočítame 97,5% kvantil $t_{37}^{kv}(0,975) = T.INV(0,975; 37) = 2,0261925$.
 - možnosť vyhodnotenia – geometricky – porovnaním vzdialenosti od 0 pomocou absolútnej hodnoty: $|t_0(b_2)| = |-2,3038| > t_{37}^{kv}(0,975)$ alebo
 - možnosť vyhodnotenia: ak vypočítaná hodnota testovacej štatistiky padla do kritickej oblasti W , potom nulovú hypotézu H_0 zamietame, ak hodnota testovacej štatistiky

do kritickej oblasti W nepadla, potom H_0 nezamietame. Nakoľko realizácia testovacej štatistiky $t_0(b_1) = -2,3038 \in W$, testovanú nulovú hypotézu $H_0 : b_2 = 0$ zamietame.

b) Vyhodnotenie pomocou p-hodnoty.

Túto p-hodnotu nájdeme v stĺpci *P-value*. P-hodnota predstavuje pravdepodobnosť, že dostaneme rovnaký alebo ešte extrémnejší výsledok ako v prípade, ak by platila nulová hypotéza H_0 . Jej číselnú hodnotu vieme vypočítať pomocou distribučnej funkcie.

$$p(b_2) = 2 * \min\{F(t_0(b_2)); 1 - F(t_0(b_2))\} = 0,026950263$$

Výpočet p-hodnoty v Exceli je na obr. 193 a zhoduje sa hodnotou v stĺpci *P-value* na obr. 191.

F(t0)=	=T.DIST(-2,30382424;37;1)	F(t0)=	0,01347513
1-F(t0)=	=1-D91	1-F(t0)=	0,98652487
p=	=2*MIN(D91:D92)	p=	0,02695026

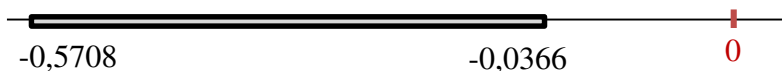
Obr. 193 Výpočet p-hodnoty pomocou distribučnej funkcie

Čím je p-hodnota menšia, tým viac sme presvedčení, že nulovú hypotézu možno zamietnuť.

$$p = 0,027 < 0,05 = \alpha, \text{ preto zamietame } H_0 : b_2 = 0$$

c) Vyhodnotenie pomocou $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ intervalu spoľahlivosti alebo tzv. konfidenčného intervalu.

Pri vyhodnotení testov hypotéz pomocou intervalu spoľahlivosti o prijatí alebo zamietnutí nulovej hypotézy rozhodujeme na základe toho, či 0 patrí alebo nepatrí do $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ IS. V našom prípade $\alpha = 0,05$, preto počítame 95% IS pre koeficient b_2 . Dolnú hranicu intervalu nájdeme vo výstupe regresnej analýzy v tabuľke na obr. 191 v stĺpci *Lower 95%* a hornú hranicu v stĺpci *Upper 97%*. 95% IS pre koeficient b_1 je: (-0,5708; -0,0366).



Obr. 194 0 nepatrí do 95% IS pre koeficient b_2

Na výpočet hraníc použijeme vzťah $b_2 \pm \Delta$, kde $\Delta = SE(b_1) \cdot t_{n-k-1}^{kv} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$, obr. 195.

	C	D		C	D
95	b2=	-0,30372293	95	b2=	-0,30372293
96	SE(b2)=	0,13183425	96	SE(b2)=	0,13183425
97	t kv 37(0,975)=	=T.INV(0,975;37)	97	t kv 37(0,975)=	2,02619246
98	delta=	=D96*D97	98	delta=	0,26712156
99	b2-delta=	=D95-D98	99	b2-delta=	-0,57084449
100	b2+delta=	=D95+D98	100	b2+delta=	-0,03660138

Obr. 195 Výpočet 95% intervalu spoľahlivosti pre koeficient b_2 v Exceli

Nulová hypotéza $H_0 : b_2 = 0$ hovorí, že regresný koeficient b_2 je nulový, preto sme overovali, či 0 patrí alebo nepatrí do daného 95% konfidenčného intervalu pre koeficient b_2 . Keďže $0 \notin (-0,5708; -0,0366)$, vid' obr. 194, so spoľahlivosťou 95% môžeme hypotézu $H_0 : b_2 = 0$ zamietnuť.

Záver:

Na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ možno konštatovať, že regresný koeficient b_2 je štatisticky významný, t. j. samostatný vplyv faktora t_2 na hodnotu transformovanej regresnej funkcie $(f)_t(t_2, t_3)$ je štatisticky významný, t. j. nemožno ho zanedbať. Hĺbka rezu a_p je dôležitý faktor pre drsnosť Ra.

Ak chceme zistiť, či má posuv f_n výrazný vplyv na drsnosť povrchu obrobnku Ra, budeme testovať, či je samostatné pôsobenie faktora x_3 – posuv f_n na hodnotu lineárnej regresnej funkcie štatisticky významné. Zvolíme hladinu významnosti, najčastejšie 5%.

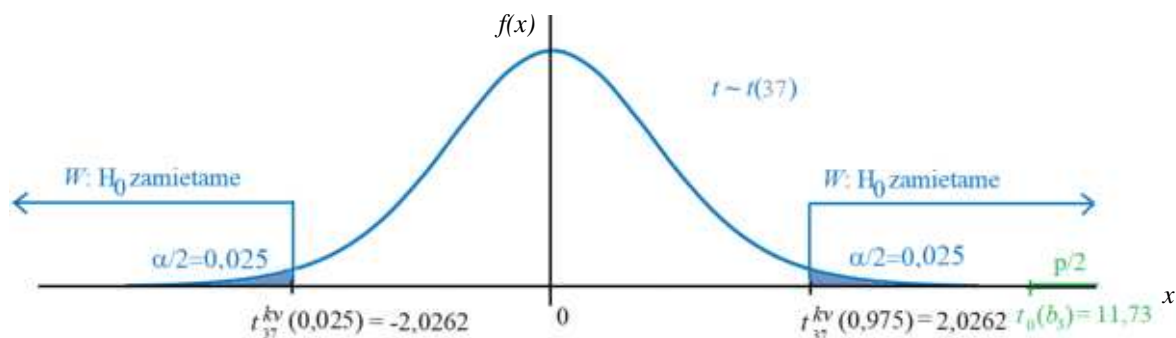
Pretože samostatné pôsobenie kódovaného faktora t_3 vystupuje v transformovanej lineárnej regresnej funkcii $(f)_t(t_2, t_3) = b_0 + b_2 t_2 + b_3 t_3$ v člene $b_3 t_3$, t. j. budeme testovať nulovosť regresného koeficientu b_3 . Testujeme hypotézy $H_0: b_3 = 0 \leq H_1: b_3 \neq 0$.

Z výstupu Excelu použijeme riadok, v ktorom sa nachádzajú údaje súvisiace s koeficientom b_3 , obr. 196.

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%
Intercept	3,72617083	0,108940304	34,2037859	1,32475E-29	3,50543681	3,94690486
ap	-0,30372293	0,131834247	-2,30382424	0,026950263	-0,570844492	-0,03660138
fn	1,54629147	0,131834247	11,7290575	4,99963E-14	1,279169913	1,81341303

Obr. 196 Tabuľka s bodovými odhadmi koeficientov a im prislúchajúcimi hodnotami

Grafické riešenie je na obr. 197.



Obr. 197 Grafické riešenie pre testovanie hypotézy o koeficiente b_3

Kritická oblasť je vzhľadom na rovnaké $\alpha = 0,05$ opäť rovnaká $W = (-\infty; -2,0262) \cup (2,0262, \infty)$. Platí $|t_0(b_3)| = 11,73 > 2,0262 = t_{37}^{kv}(0,975)$. Z grafického riešenia pre test hypotézy o koeficiente b_3 na obr. 197 realizácia testovacej štatistiky $t_0(b_3) = 11,73 \in W$, preto zamietame $H_0 : b_3 = 0$.

Rovnako p-hodnota $p = 4,99 \cdot 10^{-14} < 0,05 = \alpha$, preto zamietame $H_0 : b_3 = 0$.

Výpočet p-hodnoty je:

$$p(b_3) = 2 * \min\{F(t_0(b_3)); 1 - F(t_0(b_3))\} = 2 * \text{MIN}(T.DIST(11,73; 37; 1); 1 - T.DIST(11,73; 37; 1)) = 4,99 \cdot 10^{-14}.$$

Graficky p-hodnota predstavuje dvojnásobok veľkosti plochy pod krivkou hustoty rozdelenia Studentovho t-rozdelenia $t(37)$ od realizácie testovacej štatistiky $t_0(b_3)$ vpravo, viď obr. 197.

Výpočet 95% IS pre koeficient b_3 je na obr.198.

	F	G
94		
95	b3=	0,02695026
96	SE(b3)=	-0,57084449
97	t kv 37(0,975)=	=T.INV(0,975;37)
98	delta=	=G96*G97
99	b3-delta=	=G95-G98
100	b3+delta=	=G95+G98

	F	G
94		
95	b3=	0,02695026
96	SE(b3)=	-0,57084449
97	t kv 37(0,975)=	2,02619246
98	delta=	-1,15664081
99	b3-delta=	1,18359107
100	b3+delta=	-1,12969054

Obr. 198 Výpočet intervalu spoľahlivosti pre koeficient b_3 v Exceli

Z tabuľky na obr. 196 je 95% IS pre koeficient b_3 : (1,279; 1,813)



Obr. 199 0 nepatrí do 95% IS pre koeficient b_3

Na obr.199 vidíme, že $0 \notin (1,279; 1,813)$, preto so spoľahlivosťou 95% môžeme nulovú hypotézu $H_0 : b_3 = 0$ zamietnuť.

Záver:

Na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ je možné konštatovať, že regresný koeficient b_3 je štatisticky významný, t. j. samostatný vplyv faktorov t_3 na hodnotu transformovanej regresnej funkcie $(f)_t(t_2, t_3)$ je štatisticky významný, preto ho nemožno zanedbať. Posuv f_n je dôležitý faktor pre drsnosť Ra.

Kvalita modelu vyjadrená pomocou R^2 a celkovej štatistickej významnosti a adekvátnosti regresného modelu

Kvalitu regresného modelu získaného po vylúčení štatisticky nevýznamných členov je vyjadrená pomocou indexu determinácie R^2 , označovaná tiež *R Square* a upraveného indexu determinácie *Adjusted R Square* z výstupu regresnej analýzy v Exceli na obr. 200 je totožná s výstupom Minitabu, t. j. $R^2 = 0,79430548$ a $\text{adjusted } R^2 = 0,78318686$. Síce nepatrí medzi časť testovania hypotéz, ale patrí medzi základné techniky porovnania rôznych regresných modelov.

SUMMARY OUTPUT	
Regression Statistics	
Multiple R	0.89123817
R Square	0.79430548
Adjusted R Square	0.78318686
Standard Error	0.68899898
Observations	40

Obr. 200 Štatistiky R^2 a $\text{adjusted } R^2$ týkajúce sa získaného regresného modelu ako výstup regresnej analýzy v Exceli

Číselná hodnota indexu determinácie R^2 je vypočítaná z tabuľky ANOVA (obr. 201), nakoľko index determinácie vyjadruje, aký je podiel variability závislej premennej, ktorý vieme vyjadriť získaným regresným modelom. V našom prípade suma štvorcov odchýlok nameraných hodnôt drsnosti Ra od celkového vypočítaného priemeru je $SS\ Total = 85,39179953$. Z celkovej variability je regresným modelom vysvetlená variabilita $SS\ Regression = 67,82717453$.

ANOVA					
	df	SS	MS	F	Significance F
Regression	2	67,82717453	33,9135873	71,43919833	1,9707E-13
Residual	37	17,564625	0,47471959		
Total	39	85,39179953			

Obr. 201 ANOVA ako súčasť výstupu regresnej analýzy v Exceli

Podiel variability nameraných dát drsnosti Ra, ktorý vieme vysvetliť získaným modelom je $R^2 = \frac{67,82717453}{85,39179953} = 0,79430548$, čo interpretujeme: 79,43% variability nameraných hodnôt drsnosti Ra vieme vysvetliť lineárnym regresným modelom, 20,57% variability nameraných hodnôt zostalo modelom nevysvetlenej. Upravený index determinácie R^2_{adj} uvádzaný ako *Adjusted R Square*, ktorý penalizuje regresný model za nadbytočné členy v modeli, má hodnotu

$R_{adj}^2 = 0,78318686$ vyjadruje mieru zhody nameraných dát a fitovaných hodnôt (78,32%), ale zohľadňuje pritom počet členov (prediktorov) v modeli.

Kvalitu modelu vyhodnocujeme tiež celkovým F testom štatistickej významnosti regresného modelu, testom adekvátnosti (testom Lack of fit) a analýzou rezíduí.

Celkovým F testom štatistickej významnosti nášho regresného modelu $(f)_t(t_2, t_3) = b_0 + b_2t_2 + b_3t_3$ testujeme nulovú hypotézu, že regresný model nie je štatisticky významný, t. j. všetky jeho koeficienty sú nulové oproti alternatívnej hypotéze, že regresný model je štatisticky významný, t. j. aspoň jeden koeficient je nenulový. Zápis je nasledovný:

$$H_0: b_2 = b_3 = 0 \leq H_1: \text{existuje aspoň jedno } b_i \neq 0$$

Pri celkovom F teste štatistickej významnosti regresného modelu pre testovaciu charakteristiku (štatistiku) platí:

$$F = \frac{\frac{SSR}{k}}{\frac{SSE}{n - k - 1}} \sim F(k; n - k - 1),$$

kde n je počet nameraných dát a k je počet členov v regresnom modeli. Testovacia štatistika F má Fisherovo-Snedecorovo rozdelenie so stupňami voľnosti k a $n - k - 1$. Testovacia štatistika porovnáva rozptyl dát vysvetlený regresným modelom s rozptylom, ktorý zostal modelom nevysvetlený. Čím je tento podiel väčší, tým regresný model lepšie vystihuje správanie skúmaných dát. Tento test je jednostranný (pravostranný).

Realizáciu testovacej štatistiky, stupne voľnosti, p -hodnotu vieme získať z regresnej analýzy z tabuľky ANOVA na obr. 202. Pri výpočte testovacej štatistiky používame hodnoty $SSR = SS$ Regression, a $SSE = SS$ Residual a údaje z nich vypočítané.

ANOVA					
	<i>df</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>Significance F</i>
Regression	2	67,82717453	33,9135873	71,43919833	1,9707E-13
Residual	37	17,564625	0,47471959		
Total	39	85,39179953			

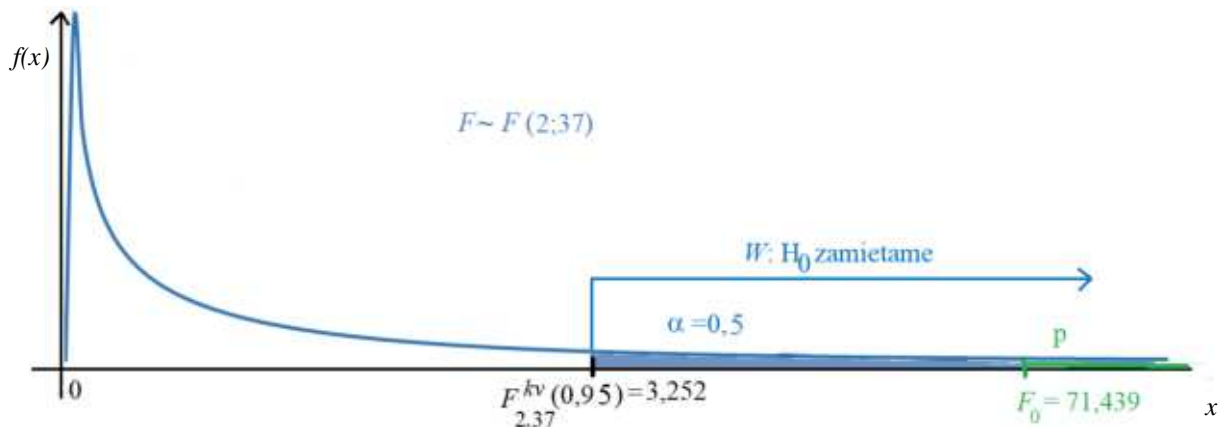
Obr. 202 ANOVA ako súčasť výstupu regresnej analýzy v Exceli

Ak zvolíme hladinu významnosti napr. $\alpha = 0,05$, kritická oblasť bude ohraničená kritickou hodnotou $F_{2,37}^{kv}(0,95)$. Jej hodnotu vypočítame ako 95% kvantil Fisherovho rozdelenia $F.INV(0,95; 2; 37) = 3,25192385$. Kritická oblasť je na základe toho $W = (3,252; \infty)$.

Realizácia testovacej štatistiky F_0 sa nachádza v tabuľke na obr. 202 v stĺpci F .

$$F_0 = \frac{\frac{67,827117453}{2}}{\frac{17,564625}{37}} = \frac{33,9135873}{0,47471959} = 71,43919833 > 3,252 = F_{2,37}^{kv}(0,95)$$

Pretože $F_0 = 71,439 \in W$ (vid' obr. 203), zamietame nulovú hypotézu $H_0: b_2 = b_3 = 0$ a prijímame alternatívnu hypotézu H_1 : existuje aspoň jedno $b_i \neq 0$.



Obr. 203 Grafické riešenie pre celkový F test o štatistickej významnosti regresného modelu

Pri vyhodnotení podľa p -hodnoty, jej číselnú hodnotu nájdeme v tabuľke na obr. 202 v stĺpci *Significance F*, alebo vypočítame pomocou distribučnej funkcie v realizácii testovacej štatistiky F_0 : $p = 1 - F(F_0) = 1 - \text{F.DIST}(71,43919833; 2; 37; 1) = 1,971 \cdot 10^{-13}$.

Ak p -hodnotu porovnáme so zvolenou hladinou významnosti $\alpha = 0,05$, dostaneme rovnaký záver o tom, že zamietame nulovú hypotézu $H_0: b_2 = b_3 = 0$ a prijímame alternatívnu hypotézu H_1 : existuje aspoň jedno $b_i \neq 0$.

Záver:

Na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ možno konštatovať, že lineárny regresný model typu je štatisticky významný.

F test štatistickej významnosti prínosu k -tej vysvetľujúcej premennej

Súčasťou ANOVY, ktorá obsahuje celkový F test štatistickej významnosti regresného modelu, zvyčajne bývajú aj F testy štatistickej významnosti prínosu k -tych vysvetľujúcich premenných. Rovnako ako pri individuálnych t -testoch štatistickej významnosti regresných koeficientov na základe uvedených testov vieme rozhodnúť, ktorý faktor a interakciu faktorov v regresnom modeli ponechávame ako signifikantné a ktoré členy je možné z modelu vylúčiť. Uvedeným testom testujeme prínos, ktorým dodatočne prispieva k -ta vysvetľujúca premenná k

vysvetleniu variability závislej premennej. Význam tohto testu spočíva v tom, že v prípade zamietnutia nulovej hypotézy pri F -teste štatistickej významnosti regresného modelu uvedeného ďalej chceme hneď vedieť, ktorá zo vstupných premenných má štatisticky významný a nevýznamný vplyv na závislú premennú (chceme vedieť, ktoré konkrétne premenné štatisticky významne prispievajú k vysvetleniu variability závislej premennej v rámci modelu). Označením dodatočný príspevok k -tej vysvetľujúcej premennej rozumieme prínos tejto premennej za predpokladu, že sa už prv uvažovalo s $(k - 1)$ nezávislými (vysvetľujúcimi) premennými.

Testované hypotézy sú:

H_0 : Dodatočný príspevok k -tej vysvetľujúcej premennej na vysvetlenie variability vysvetľovanej premennej nie je štatisticky významný.

H_1 : Dodatočný príspevok k -tej vysvetľujúcej premennej na vysvetlenie variability vysvetľovanej premennej je štatisticky významný.

Testovacia štatistika:

$$F = \frac{\frac{SSR_{\text{úplný model}} - SSR_{\text{redukovaný model}}}{1}}{\frac{SSE_{\text{úplný model}}}{n - k - 1}} \sim F(1; n - k - 1),$$

kde $SSR_{\text{úplný model}}$ je suma štvorcov odchýlok od celkového priemeru vysvetlená úplným regresným modelom s k prediktormi, $SSR_{\text{redukovaný model}}$ je suma štvorcov odchýlok vysvetlená redukovaným regresným modelom s $k - 1$ prediktormi, ich rozdiel nazývame príspevok k -tej vysvetľujúcej premennej, n je počet nameraných dát a k je počet členov (prediktorov, vysvetľujúcich premenných) v úplnom regresnom modeli. Tento test je pravostranný, nakoľko chceme, aby bol prínos k -tej vysvetľujúcej premennej čo najväčší, v opačnom prípade je možné k -tu vysvetľujúcu premennú z modelu vylúčiť.

Výsledok uvedeného testu významnosti prínosu vieme získať v Minitabe, Excel tento test neposkytuje. Jeho závery týkajúce sa ponechania alebo vylúčenia člena z modelu sú vždy totožné s výsledkom t -testu štatistickej významnosti regresného modelu napriek tomu, že oba testy sú založené na inom princípe, t. j. testujú niečo iné.

Na obr. 204 v tabuľke ANOVA môžeme vidieť, že Minitab poskytuje okrem F testu štatistickej významnosti regresného modelu aj výsledky F testov štatistickej významnosti prínosu pre nami zvolené (ponechané) premenné a test Lack of Fit.

Analysis of Variance						
	Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
	Model	2	67,827	33,9136	71,44	0,000
1. →	Linear	2	67,827	33,9136	71,44	0,000
2. →	ap	1	2,520	2,5196	5,31	0,027
3. →	F	1	65,308	65,3075	137,57	0,000
	Error	37	17,565	0,4747		
4. →	Lack-of-Fit	12	5,561	0,4634	0,97	0,505
	Pure Error	25	12,004	0,4802		
	Total	39	85,392			

Obr. 204 ANOVA po vylúčení štatisticky nevýznamných členov - výstup Minitabu bude použitý pre rôzne F testy štatistickej významnosti prínosu k-tej vysvetľujúcej premennej

Vyhodnotenie výsledkov tabuľky ANOVA:

1. F test štatistickej významnosti prínosu lineárnej zložky vyjadrujúcej celkový lineárny vplyv faktora B hĺbka rezu a_p a faktora C posuv f_n v regresnom modeli

Nech $\alpha = 0,05$. Testované hypotézy pre F test o štatistickej významnosti prínosu lineárnej zložky regresného modelu sú:

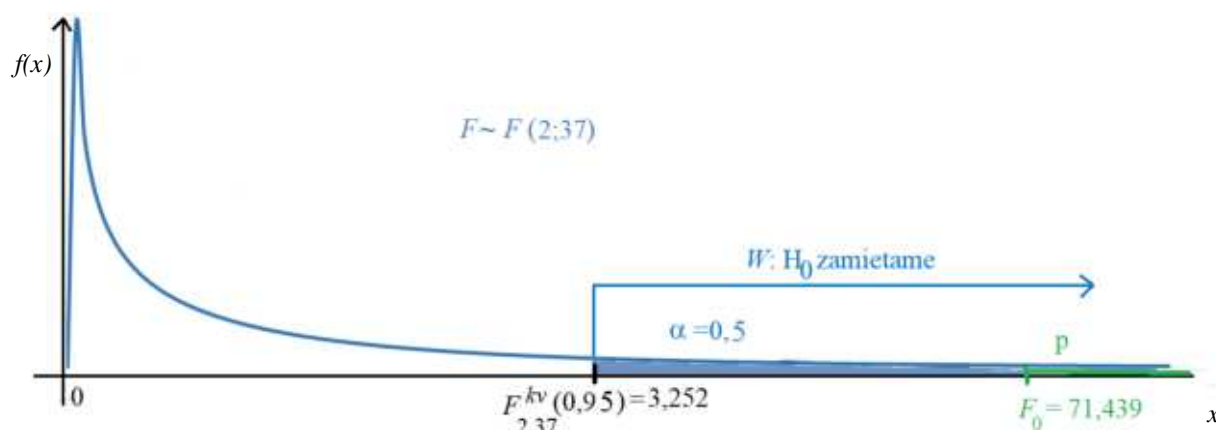
H_0 : Dodatočný lineárny príspevok faktorov a_p a F na vysvetlenie variability drsnosti R_a nie je štatisticky významný.

H_1 : Dodatočný lineárny príspevok faktorov a_p a F na vysvetlenie variability drsnosti R_a je štatisticky významný.

Použijeme štatistiky uvedené v riadku 1. označenom Linear. Realizácia testovacej štatistiky F_0 sa nachádza v tabuľke na obr. 204 v stĺpci F-Value:

$$F_0 = \frac{\frac{67,827}{2}}{\frac{17,565}{37}} = \frac{33,9136}{0,4747} = 71,44 > 3,252 = F_{2,37}^{kv}(0,95)$$

Pretože $F_0 = 71,439 \in W$ (viď obr. 205), zamietame nulovú hypotézu H_0 : Dodatočný lineárny príspevok faktorov hĺbka rezu a_p a posuv f_n (v tabuľke označený F) na vysvetlenie variability drsnosti R_a nie je štatisticky významný. Prijímame alternatívnu hypotézu H_1 : Dodatočný lineárny príspevok faktorov hĺbka rezu a_p a posuv f_n na vysvetlenie variability drsnosti R_a je štatisticky významný. Vzhľadom na to, že regresný model obsahuje iba lineárne členy, vypočítané hodnoty aj záver musia byť totožné s výsledkom celkového F testu štatistickej významnosti regresného modelu. Grafické riešenie musí byť preto tiež rovnaké.



Obr. 205 Grafické riešenie pre F test o štatistickej významnosti prínosu lineárnej zložky regresného modelu

Pri vyhodnotení podľa p -hodnoty: $p = 1 - F(F_0) = 1 - \text{F.DIST}(71,439; 2; 37; 1) = 1,971 \cdot 10^{-13}$. Vo výstupe Minitabu v časti ANOVA sa p -hodnota nachádza v stĺpci P-Value. Ak p -hodnotu porovnáme so zvolenou hladinou významnosti $\alpha = 0,05$, dostaneme rovnaký záver, t. j. zamietame nulovú hypotézu H_0 a prijímame alternatívnu hypotézu H_1 .

Záver:

Na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ možno prijať hypotézu, že prínos lineárnej zložky regresného modelu je štatisticky významný.

2. F test štatistickej významnosti prínosu premennej B hĺbka rezu a_p

Nech $\alpha = 0,05$. Testované hypotézy pre F test o štatistickej významnosti prínosu lineárnej zložky faktora a_p sú:

H_0 : Dodatočný lineárny príspevok faktora a_p na vysvetlenie variability drsnosti R_a nie je štatisticky významný.

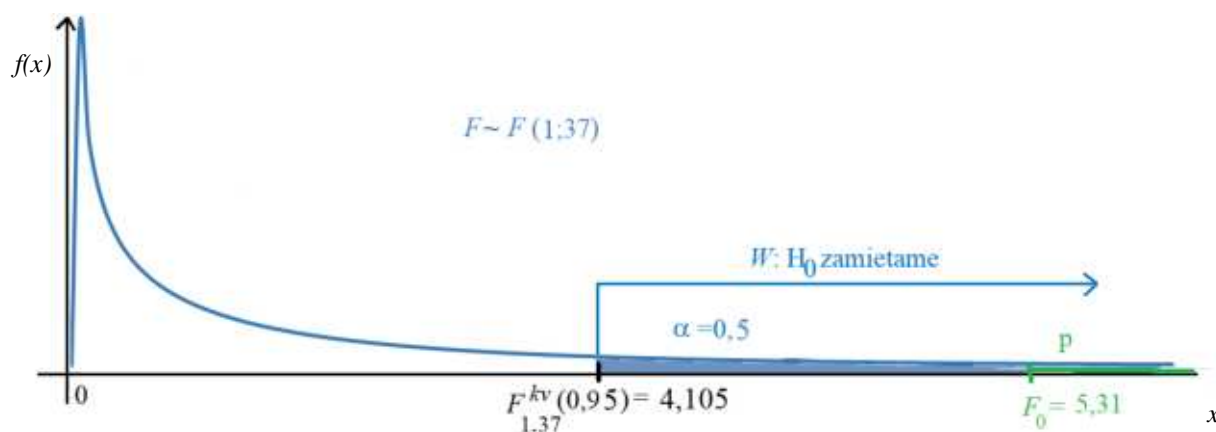
H_1 : Dodatočný lineárny príspevok faktora a_p na vysvetlenie variability drsnosti R_a je štatisticky významný.

Pri tomto type testu porovnávame veľkosť rozptylu vysvetleného faktorom a_p s reziduálnym rozptylom v riadku Error.

Pri výpočte testovacej štatistiky F_0 použijeme štatistiky uvedené v riadku 2. označeného a_p . Vypočítaná hodnota testovacej štatistiky F_0 sa nachádza v tabuľke na obr. 204 v stĺpci F -Value:

$$F_0 = \frac{\frac{2,520}{1}}{\frac{17,565}{37}} = \frac{2,5196}{0,4747} = 5,31 > 4,105 = F_{1,37}^{kv}(0,95)$$

Pretože $F_0 = 5,31 \in W$ (viď obr. 206), zamietame H_0 : Dodatočný lineárny príspevok faktora a_p na vysvetlenie variability drsnosti R_a nie je štatisticky významný a prijímame alternatívnu hypotézu H_1 : Dodatočný lineárny príspevok faktora a_p na vysvetlenie variability drsnosti R_a je štatisticky významný. Grafické riešenie je na obr. 206.



Obr. 206 Grafické riešenie pre F test o štatistickej významnosti prínosu lineárnej zložky faktora a_p v regresnom modeli

Pri vyhodnotení podľa p -hodnoty: $p = 1 - F(F_0) = 1 - F.DIST(5,31; 1; 37; 1) = 0,027$. Vo výstupe Minitabu v časti ANOVA sa p -hodnota nachádza v stĺpci P-Value. Na základe porovnania p -hodnoty so zvolenou hladinou významnosti $\alpha = 0,05$, dostaneme rovnaký záver, t. j. zamietame H_0 a prijímame alternatívnu hypotézu H_1 .

Záver:

Na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ možno prijať hypotézu, že prínos lineárnej zložky faktora hĺbka rezu a_p v regresnom modeli je štatisticky významný.

3. F test štatistickej významnosti prínosu premennej C posuv f_n

Nech $\alpha = 0,05$. Testované hypotézy pre F test o štatistickej významnosti prínosu lineárnej zložky faktora a_p sú:

H_0 : Dodatočný lineárny príspevok faktora f_n na vysvetlenie variability drsnosti R_a nie je štatisticky významný.

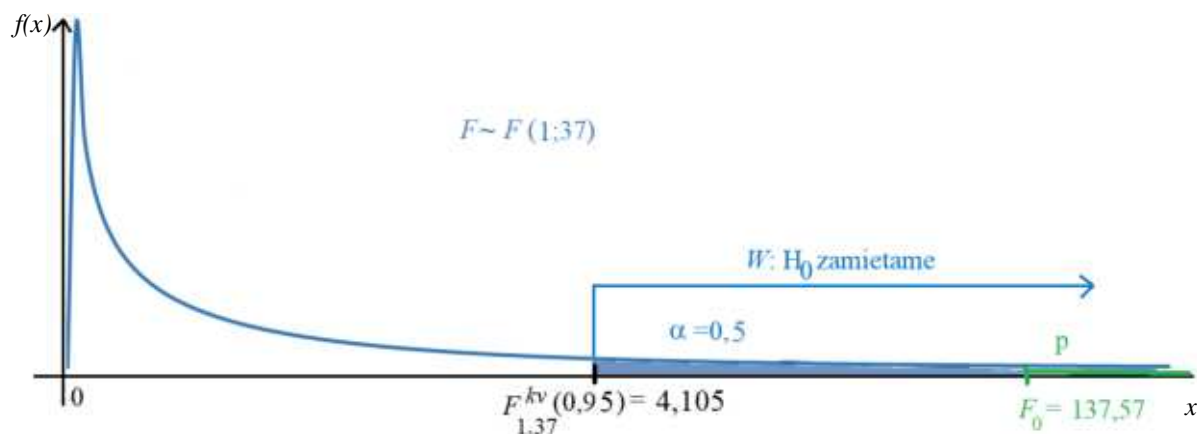
H_1 : Dodatočný lineárny príspevok faktora f_n na vysvetlenie variability drsnosti Ra je štatisticky významný.

Pri tomto type testu porovnávame veľkosť rozptylu vysvetleného faktorom f_n s reziduálnym rozptylom v riadku Error.

Pri výpočte testovacej štatistiky F_0 použijeme štatistiky uvedené v riadku 3. označeného F. Vypočítaná hodnota testovacej štatistiky F_0 sa nachádza v tabuľke na obr. 204 v stĺpci *F-Value*:

$$F_0 = \frac{\frac{65,308}{1}}{\frac{17,565}{37}} = \frac{65,3075}{0,4747} = 137,57 > 4,105 = F_{1,37}^{kv}(0,95)$$

Pretože $F_0 = 137,57 \in W$, zamietame hypotézu H_0 : Dodatočný lineárny príspevok faktora posuv f_n na vysvetlenie variability drsnosti Ra nie je štatisticky významný a prijímame alternatívnu hypotézu H_1 : Dodatočný lineárny príspevok faktora posuv f_n na vysvetlenie variability drsnosti Ra je štatisticky významný. Grafické riešenie je na obr. 207.



Obr. 207 Grafické riešenie pre F test o štatistickej významnosti prínosu lineárnej zložky faktora f_n v regresnom modeli

Pri vyhodnotení podľa p-hodnoty: $p = 1 - F(F_0) = 1 - \text{F.DIST}(137,57; 1; 37; 1) = 4,996 \cdot 10^{-14}$. Vo výstupe Minitabu v časti ANOVA sa p-hodnota nachádza v stĺpci P-Value. Ak p-hodnotu porovnáme so zvolenou hladinou významnosti $\alpha = 0,05$, dostaneme rovnaký záver, t. j. zamietame H_0 a prijímame alternatívnu hypotézu H_1 .

Záver:

Na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ možno prijať hypotézu, že prínos lineárnej zložky faktora posuv f_n v regresnom modeli je štatisticky významný.

4. Kvalita regresného modelu vyjadrená testom dostatočného prispôsobenie regresného modelu (testom Lack of Fit)

Pri teste Lack of fit (LOF) testujeme adekvátnosť (dostatočnosť) regresného modelu. Nech zvolená hladina významnosti je $\alpha = 0,05$. Testované hypotézy pri tomto teste:

Nulová hypotéza je $H_0: SSLF = SSPE$. Možný je tiež zápis: No LOF – regresný model nie je nedostatočný.

Alternatívna hypotéza $H_1: SSLF > SSPE$, resp. ekvivalentný zápis: LOF – regresný model je nedostatočný.

Testovacia štatistika: $F = \frac{\frac{SSLF}{df_{LF}}}{\frac{SSPE}{df_{PE}}} = \frac{MSLF}{MSPE} \sim F(df_{LF}; df_{PE})$.

Pri tomto druhu testu reziduá, resp. sumu štvorcov reziduálnych odchýlok SSE rozdeľujeme na také, ktoré vznikli chybou merania, t. j. v dôsledku čistej chyby (Pure Error - PE) a také, ktoré vznikli z dôvodu nedostatočného prispôsobenia regresného modelu (Lack of Fit - LF), t. j. $SSE = SSLF + SSPE$. V tomto prípade bude model tým lepšie vystihovať správanie dát, čím bude suma štvorcov odchýlok spôsobená nedostatočnosťou modelu čo najmenšia. Test je z uvedeného dôvodu pravostranný.

Excel priamy výpočet testu Lack of fit neposkytuje. Na obr. 208 je výstup Minitabu, kde je suma štvorcov reziduálnych odchýlok v riadku Error rozdelená na sumu štvorcov odchýlok v dôsledku nedostatočného prispôsobenia modelu v riadku Lack of Fit a na čistú chybu v dôsledku chyby merania, uvedenú v riadku Pure Error. Stupne voľnosti sú v stĺpci DF.

Analysis of Variance

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	2	67,827	33,9136	71,44	0,000
Linear	2	67,827	33,9136	71,44	0,000
ap	1	2,520	2,5196	5,31	0,027
F	1	65,308	65,3075	137,57	0,000
Error	37	17,565	0,4747		
Lack-of-Fit	12	5,561	0,4634	0,97	0,505
Pure Error	25	12,004	0,4802		
Total	39	85,392			

Obr. 208 Súčasťou ANOVY v Minitabe je test Lack of fit

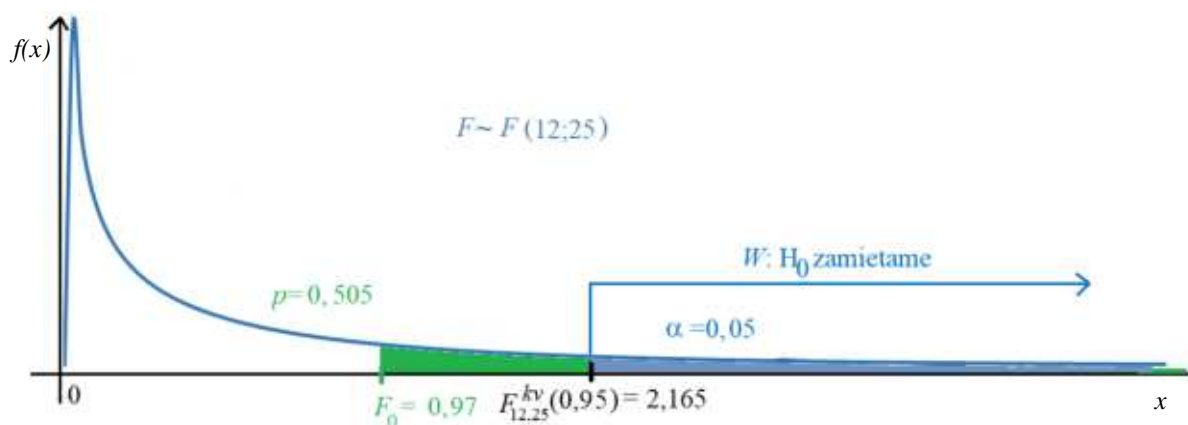
Testovacia štatistika pre test LOF má Fisherovo rozdelenie s 12 a 25 stupňami voľnosti, pretože platí $df_E = df_{LF} + df_{PE}$, t. j. v našom prípade $37 = 12 + 25$.

$$\text{Realizácia testovacej štatistiky } F_0 = \frac{\frac{5,561}{12}}{\frac{12,004}{25}} = \frac{0,4634}{0,4802} = 0,97.$$

Na obr. 204 v tabuľke ANOVA v riadku 4. je realizácia testovacej štatistiky s rovnakou hodnotou.

Test LOF je jednostranný, preto kritická oblasť bude pre $\alpha = 0,05$ ohraničená kritickou hodnotou $F_{(12,25)}^{kv}(0,95)$. Jej hodnotu vypočítame ako 95% kvantil Fisherovho rozdelenia, jeho výpočet je $F.INV(0,95; 12; 25) = 2,164891$. Kritická oblasť je potom $W = (2,165; \infty)$.

Pretože vypočítaná hodnota testovacej štatistiky $F_0 = 0,97$ neleží v kritickej oblasti W (viď obr. 209), nezamietame, čo znamená, že prijímame nulovú hypotézu H_0 .



Obr. 209 Grafické riešenie pre test o adekvátnosti regresného modelu

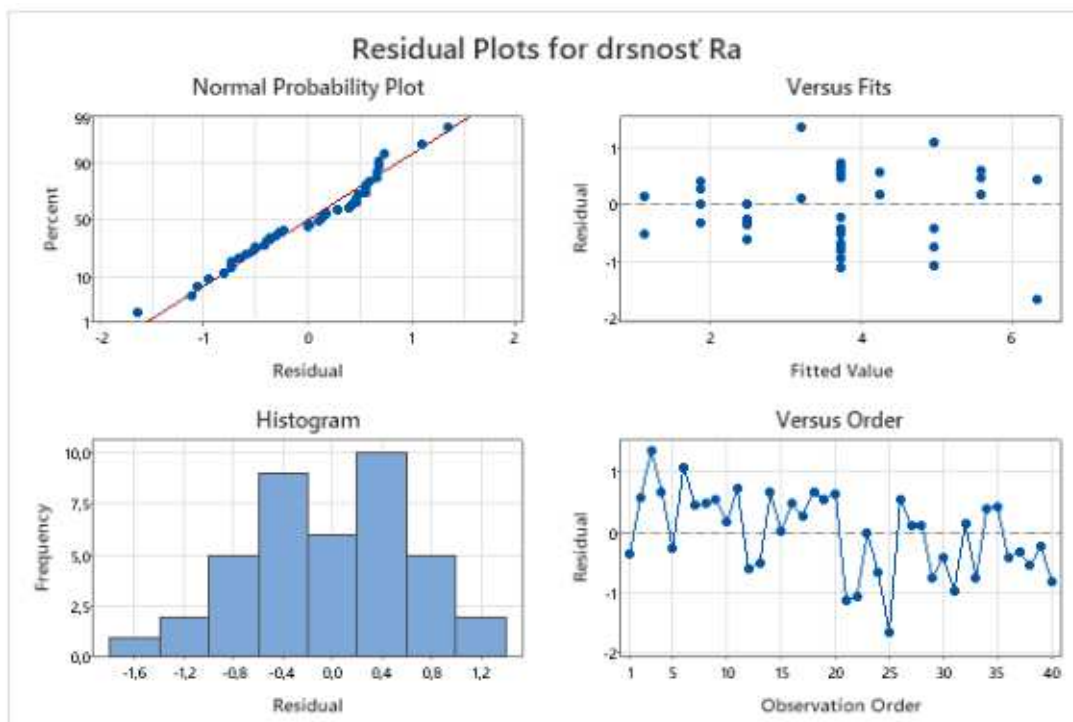
Pri vyhodnotení podľa p-hodnoty: $p = 1 - F(F_0) = 1 - F.DIST(0,97; 12; 25; 1) = 0,505$ túto hodnotu porovnávame s nami zvolenou hladinou významnosti $\alpha = 0,05$, pričom dostávame rovnaký záver, že nezamietame nulovú hypotézu H_0 , a teda zamietame alternatívnu hypotézu H_1 .

Záver:

Na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ možno konštatovať, že získaný lineárny regresný model pre odozvu Ra nie je nedostatočný (je dostatočný) a nie je potrebné do modelu zaraďovať ďalšie členy, teda nie je potrebné hľadať zložitejší model.

Grafická analýza rezíduí regresného modelu

Súčasťou posúdenia kvality regresného modelu je grafická analýza rezíduí, kedy vizuálne kontrolujeme normalitu a nezávislosť rezíduí. Výstup Minitabu s grafmi rezíduí je vidieť na obr. 210.



Obr. 210 Výstup Minitabu umožňujúci analýzu rezíduí

Vizuálnu kontrolu normálneho rozdelenia rezíduí umožňuje normálny pravdepodobnostný graf (Normal Probability Plot) a histogram (Histogram). Normálny pravdepodobnostný graf zobrazuje rozdelenie rezíduí oproti teoretickým kvantilom normálneho rozdelenia. Kvantily, t. j. percentily predstavujú podiel dát menších ako dané rezíduum, ak by rezíduá mali normálne rozdelenie. V ideálnom prípade by mali zobrazené body ležať na červenej diagonálnej priamke, čo interpretujeme ako splnenú normalitu analyzovaných dát. V tomto prípade sa rezíduá väčšinou nachádzajú blízko čiary, sú však viditeľné určité odchýlky, čo naznačuje mierne odchýlky od normálneho rozdelenia. Tieto odchýlky môžu naznačovať prítomnosť odľahlých hodnôt alebo systematických chýb. Ak na posúdenie normality rezíduí použijeme histogram, tento by mal mať pre normálne rozdelené rezíduá približne tvar zvona. Náš histogram je približne symetrický.

Graf rezíduí verzus fitované hodnoty (Residuals versus Fits) ukazuje, či existuje nejaká systematická závislosť medzi rezíduami a predikovanými hodnotami. Ideálne by rezíduá mali

byť rozptýlené náhodne okolo nulovej osi dodržiavajúc zákon troch sigma. V našom prípade sú štandardizované rezíduá rozptýlené náhodne okolo vodorovnej osi a väčšina z nich sa nachádza v intervale ± 1 , iba 5 z 40 je od nulovej hodnoty vzdialených v intervale ± 2 .

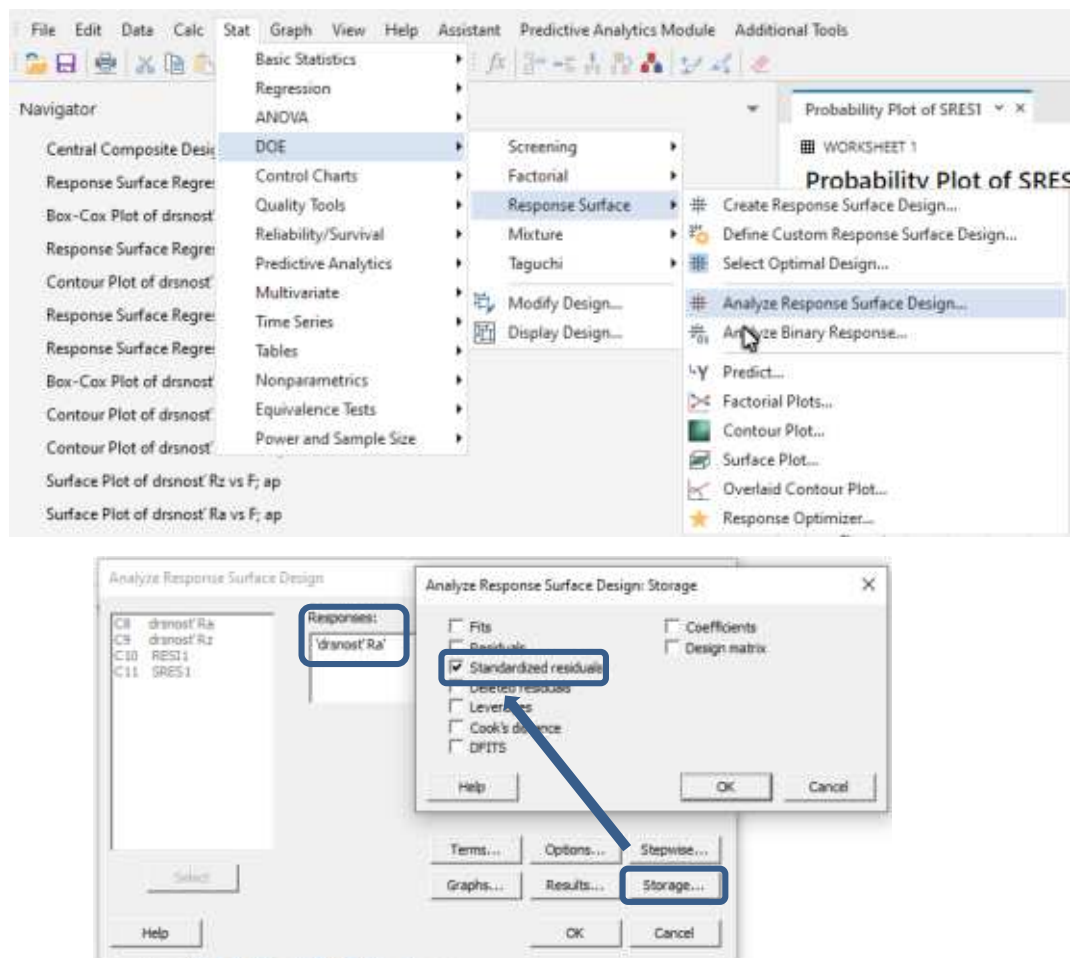
Z grafu rezíduí verzus poradie (Residuals vs Order) vieme zistiť, či existuje trend, t. j. nejaká funkčná závislosť v zaznamenanom časovom poradí rezíduí. Ideálne by mali byť hodnoty rezíduí náhodne rozptýlené, čo by naznačovalo absenciu autokorelácie. Správanie rezíduí v čase v našom prípade nenaznačuje žiadny trend. Rezíduá sú náhodne rozptýlené bez vzoru v poradí, čo naznačuje, že nie je prítomná autokorelácia.

Celkovo možno zhodnotiť, že grafy naznačujú, že model je vhodný a rezíduá majú požadované vlastnosti pre „dobré sediacy“ model.

Test normality rezíduí

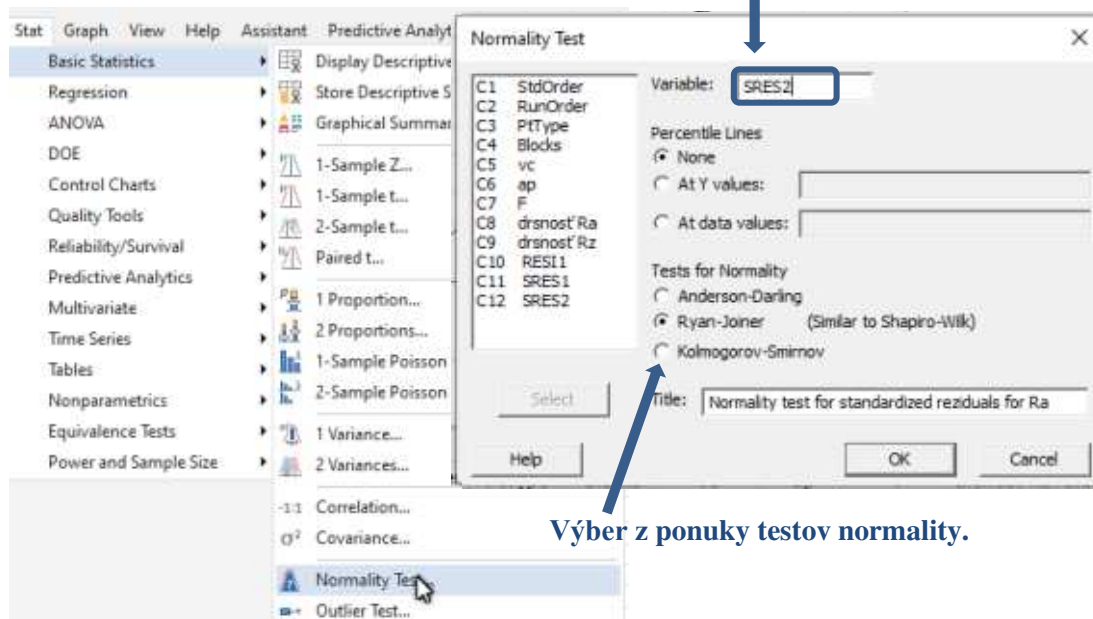
Podmienkou „dobrého“ regresného modelu je splnený predpoklad normality rezíduí. V Minitabe sú k dispozícii tieto testy normality: Ryan-Joiner test (modifikovaný Shapiro-Wilk test), Anderson-Darling test a Kolmogorov-Smirnovovho test. Samotnému spusteniu testu normality predchádza výpočet hodnôt štandardizovaných rezíduí. Ich rozdelenie je možné následne testovať. Excel výpočet testov normality dát priamo neposkytuje, preto uvádzame výpočet normovaných rezíduí a spustenie testov normality v Minitabe. Štandardizované rezíduá v Minitabe získame pri analýze výsledkov nameraných hodnôt odozvy Ra postupnosťou príkazov *Stat*→*DOE*→*Response Surface*→*Analyse Response Surface Design...*, kde v ponuke *Storage* volíme *Standardized residuals* (obr. 211).

Postupnosť príkazov pre spustenie testu normality v Minitabe je zobrazená na obr. 212. Štandardizované rezíduá pre drsnosť Ra boli v tomto prípade zapísané v stĺpci SREZ2. Bol zvolený Ryan-Joiner test, obdoba Shapiro-Wilk testu pre malé vzorky. Výstupom testu normality je na obr. 213. Výstup obsahuje normálny pravdepodobnostný graf spolu s vypočítanou hodnotou testovacej štatistiky, p-hodnotou, parametrami rozdelenia a rozsahom súboru. Pre analyzovaných 40 hodnôt bola vypočítaná stredná hodnota 0,0009998, štandardná odchýlka 1,015. Na základe uvedeného, analyzované dáta (štandardizované rezíduá) spĺňajú parametre štandardizovaného normálneho rozdelenia $N(0;1)$. Hodnota testovacej štatistiky je vyjadrená ako korelačný koeficient $r = 0,984$.



Obr. 211 Výpočet štandardizovaných rezíduí pri analýze RSD v Minitabe

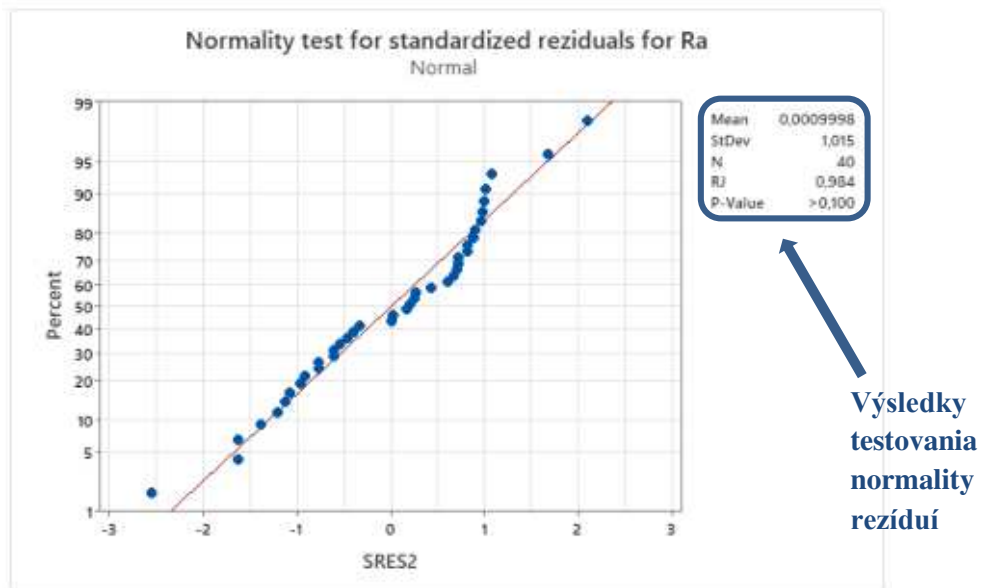
Pred spustením testov normality bolo potrebné pri analýze dát nastaviť výpis štandardizovaných rezíduí, ktoré boli v tomto prípade umiestnené do stĺpca SRES2.



Výber z ponuky testov normality.

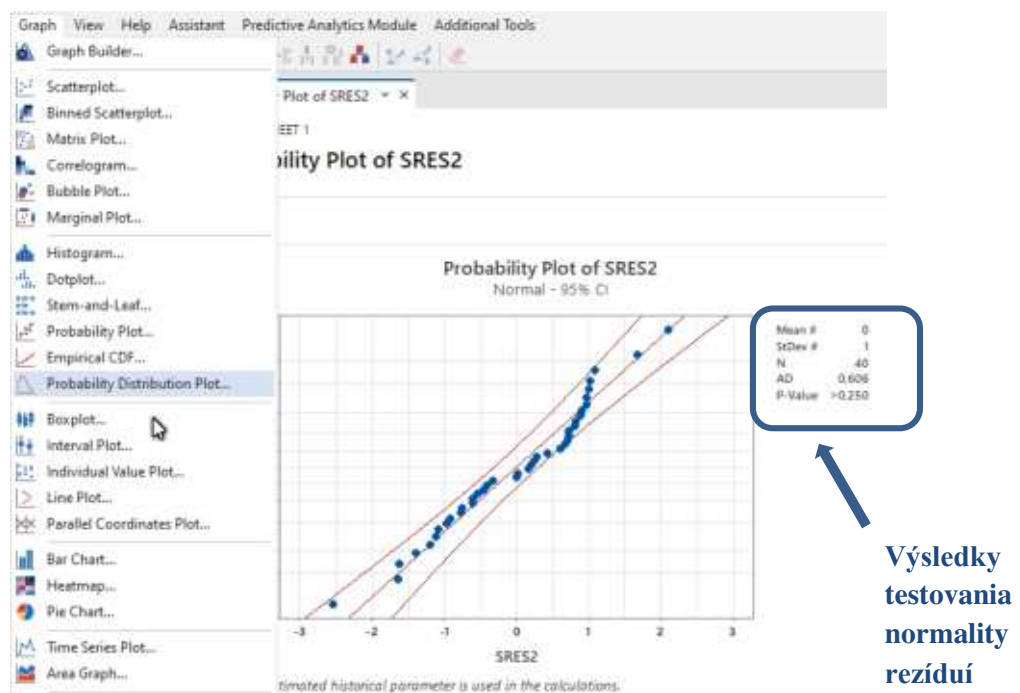
Obr. 212 Postup spustenia testov normality v Minitabe

Pretože hodnote testovacej štatistiky zodpovedá $P\text{-Value} > 0,100$, môžeme prijať nulovú hypotézu H_0 : Dáta pochádzajú z normálneho rozdelenia zamietnuť alternatívnu hypotézu H_1 : Dáta nepochádzajú z normálneho rozdelenia.



Obr. 213 Normálny pravdepodobnostný graf s výstupom zvoleného Ryan-Joiner testu

Rovnaký záver vyplýva zo zobrazenia normálneho pravdepodobnostného grafu, kde je prednastavený Anderson-Darlingov test (obr. 214). V tomto prípade má testovacia štatistika hodnotu 0,606, pričom vypočítaná p-hodnota je väčšia ako 0,250. Záver testu normality bude rovnaký.



Obr. 214 Normálny pravdepodobnostný graf s výstupom Anderson-Darling testu

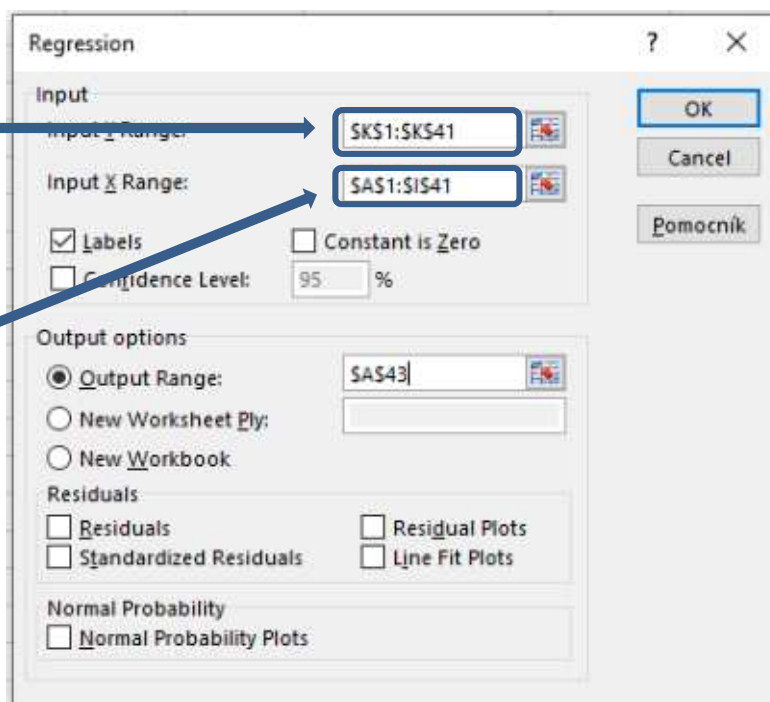
Analýza výsledkov pre odozvu Rz

Hierarchický model a identifikácia štatistickej významnosti lineárneho a kvadratického vplyvu skúmaných faktorov a ich interakcií

Postupnosťou príkazov *Data*→*Data analysis*→*Regression* v Exceli, kde nezávislá premenná X musí byť zapísaná ako súvislá oblasť a obsahovať stĺpce predstavujúce všetky členy, ktoré majú v regresnom modeli vystupovať (členy predstavujúce lineárny, aj kvadratický vplyv faktorov, aj všetky ich uvažované interakcie). Postupujeme rovnakým spôsobom ako pri vyhodnotení výsledkov nameraných hodnôt odozvy pre drsnosť Rz. Všetky hodnoty nezávislých premenných musia byť vyjadrené v kódovaných jednotkách. Korektný spôsob zápisu v Exceli je uvedený na obr. 174. Zmení sa iba zadanie závislej premennej Y, ktorá v tomto prípade bude predstavovať hodnoty odozvy drsnosti Rz, ktoré boli namerané pri daných kombináciách úrovní vstupných faktorov. Dialógové okno na spustenie regresnej analýzy v Exceli je na obr. 215.

Ako odozva Y je zvolený iba stĺpec s nameranými hodnotami drsnosti Rz

Ako nezávislá premenná X je zvolená súvislá oblasť v stĺpcoch A až I



Obr. 215 Zadávanie vstupných údajov použité pri regresnej analýze s viacerými vstupnými parametrami v dialógovom okne v Exceli

Výstup regresnej analýzy v Exceli je zobrazený na obr. 216. Z výsledku vyplýva, že na hladine významnosti $\alpha = 0,1$ je možné z ďalšieho skúmania vylúčiť samostatné pôsobenie faktora A_{vc}, nevýznamný je aj jeho kvadratický vplyv i interakcie so všetkými ostatnými faktormi. Nesignifikantný vplyv na meranú odozvu drsnosť Rz má tiež kvadratický člen $f_n \cdot f_n$.

V regresnom modeli ponecháme iba lineárny člen a_p , f_n , kvadratický člen $a_p \cdot a_p$ a člen vyjadrujúci interakciu $a_p \cdot f_n$. V ďalších fázach realizácie experimentu ponechávame iba faktory hĺbka rezu a_p a posuv f_n . Rozhodnutie robíme podľa vypočítanej p-hodnoty v stĺpci P-value alebo podľa 90% intervalu spoľahlivosti pre odhad daných regresných koeficientov.

Regression Statistics	
Multiple R	0,96863353
R Square	0,93825091
Adjusted R Square	0,91972619
Standard Error	1,57477323
Observations	40

Tabuľka so všeobecnými charakteristikami týkajúcimi sa regresného modelu.

ANOVA poskytuje výsledok celkového F-testu o štatistickej významnosti regresného modelu.

ANOVA					
	df	SS	MS	F	Significance F
Regression	9	1130,435434	125,603937	50,64857182	1,07043E-15
Residual	30	74,39732216	2,47991074		
Total	39	1204,832757			

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%
Intercept	15,4077481	0,45415246	33,9263781	1,7301E-25	14,48024501	16,3352511
vc	-0,14183265	0,301319813	-0,4707047	0,641256192	-0,757209808	0,4735445
ap	-0,70500268	0,301319813	-2,33971564	0,02614534	-1,320379835	-0,08962552
fn	6,30100359	0,301319813	20,9113484	1,93349E-19	5,685626436	6,91638075
vc*vc	-0,04345485	0,293326695	-0,1481449	0,883219686	-0,642507884	0,55559817
ap*ap	0,57555821	0,293326695	1,96217466	0,059077002	-0,023494823	1,17461124
fn*fn	-0,18145853	0,293326695	-0,61862262	0,540834085	-0,780511558	0,4175945
vc*ap	0,15654167	0,393693309	0,39762339	0,693723066	-0,647487334	0,96057067
vc*fn	0,413125	0,393693309	1,04935743	0,302394076	-0,390904	1,217154
ap*fn	-1,042	0,393693309	-2,64673028	0,012821255	-1,846029	-0,237971

Nevýznamné členy regresného modelu identifikujeme podľa výsledku t-testu o štatistickej významnosti regresného koeficientu v regresnom modeli.

Obr. 216 Výstup regresnej analýzy pre drsnosť Rz v Exceli

Rovnaké výsledky poskytuje Minitab, obr. 217 a 218. Bodové odhady koeficientov a t testy o štatistickej významnosti regresných koeficientov sú doplnené o faktor VIF, obr. 217.

Coded Coefficients

Term	Coef	SE Coef	T-Value	P-Value	VIF
Constant	15,408	0,454	33,93	0,000	
vc	-0,142	0,301	-0,47	0,641	1,00
ap	-0,705	0,301	-2,34	0,026	1,00
F	6,301	0,301	20,91	0,000	1,00
vc*vc	-0,043	0,293	-0,15	0,883	1,02
ap*ap	0,576	0,293	1,96	0,059	1,02
F*F	-0,181	0,293	-0,62	0,541	1,02
vc*ap	0,157	0,394	0,40	0,694	1,00
vc*F	0,413	0,394	1,05	0,302	1,00
ap*F	-1,042	0,394	-2,65	0,013	1,00

Obr. 217 Výstup regresnej analýzy pre drsnosť Rz v Minitabe - časť týkajúca sa koeficientov

Tabuľka ANOVA, ktorá je súčasťou výstupu Minitabu, v porovnaní s Excelom poskytuje tiež rozsiahlejšie výsledky. Je doplnená o všetky výsledky F-testov, t. j. okrem porovnania variability reziduálnych odchýlok s celkovou variabilitou vysvetlenou regresným modelom pri celkovom F-teste štatistickej významnosti regresného modelu ju tiež porovnáva s variabilitou zodpovedajúcou parciálnym častiam regresného modelu, v našom prípade súhrnnému lineárnemu, kvadratickému vplyvu faktorov a tiež interakcii skúmaných faktorov (Linear, Square a 2-Way Interaction). Súčasťou ANOVY v Minitabe sú tiež F-testy dodatočného príspevku k -tej vysvetľujúcej premennej, kedy je prínos daného k -teho člena (faktora) porovnávaný s príspevkom ostatných $k - 1$ členov (faktorov). Výsledky rozhodnutia o prijatí, resp. vylúčení členov regresného modelu sú vždy totožné s výsledkami t-testov v tabuľke s bodovými odhadmi regresných koeficientov.

Vzhľadom na stupne voľnosti a zaradenie merania v centrálnom bode býva ANOVA v Minitabe štandardne doplnená o test Lack of Fit, ktorý chybu merania Error rozdeľuje na tú, ktorá vznikla v dôsledku merania (Pure Error) a tú, ktorá je spôsobená nedostatočnosťou regresného modelu (Lack of Fit). Ak je súčasťou výstupu test krivosti (Curvature), potom je počítaný dodatočný príspevok tohto člena.

Analysis of Variance

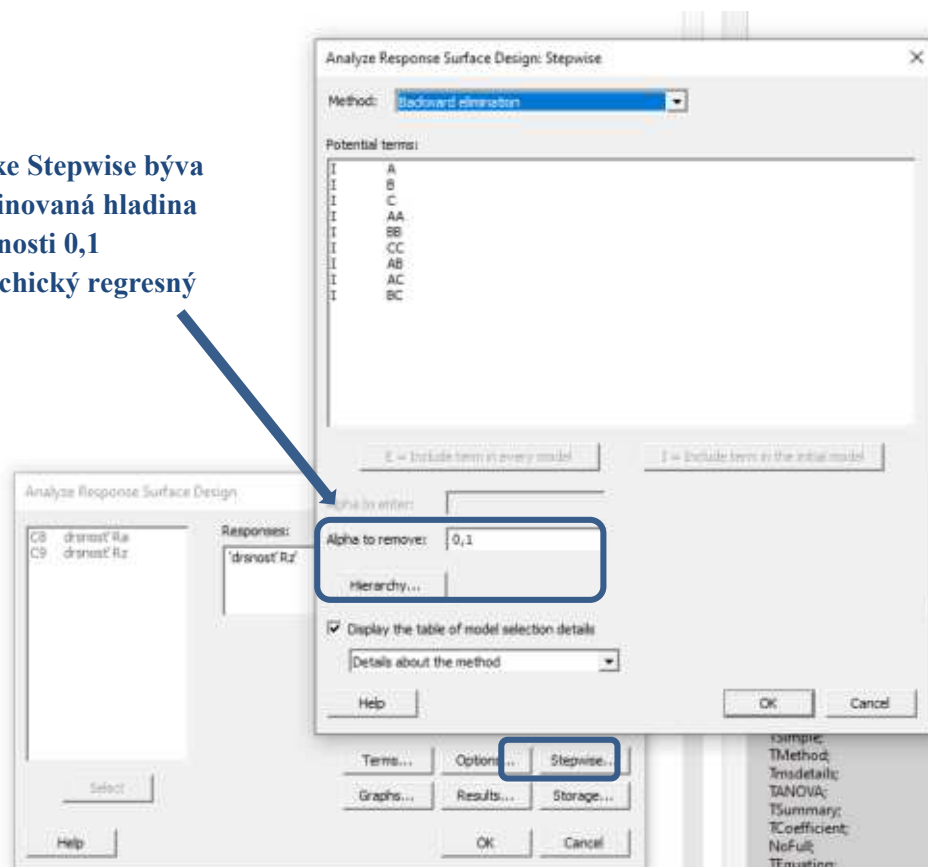
Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	9	1130,44	125,60	50,65	0,000
Linear	3	1098,55	366,18	147,66	0,000
vc	1	0,55	0,55	0,22	0,641
ap	1	13,58	13,58	5,47	0,026
F	1	1084,43	1084,43	437,28	0,000
Square	3	11,39	3,80	1,53	0,227
vc*vc	1	0,05	0,05	0,02	0,883
ap*ap	1	9,55	9,55	3,85	0,059
F*F	1	0,95	0,95	0,38	0,541
2-Way Interaction	3	20,50	6,83	2,75	0,060
vc*ap	1	0,39	0,39	0,16	0,694
vc*F	1	2,73	2,73	1,10	0,302
ap*F	1	17,37	17,37	7,01	0,013
Error	30	74,40	2,48		
Lack-of-Fit	5	15,62	3,12	1,33	0,284
Pure Error	25	58,78	2,35		
Total	39	1204,83			

Obr. 218 Výstup regresnej analýzy pre drsnosť Rz v Minitabe - časť ANOVA

Spätná eliminačná metóda v Minitabe slúži na postupné vylúčenie členov regresného modelu, ktoré nie sú signifikantné, pričom sú opakovane prepočítavané všetky štatistiky. Postupnosť krokov pri jej spustení v Minitabe je zobrazená na obr. 219. Výstup je v našom

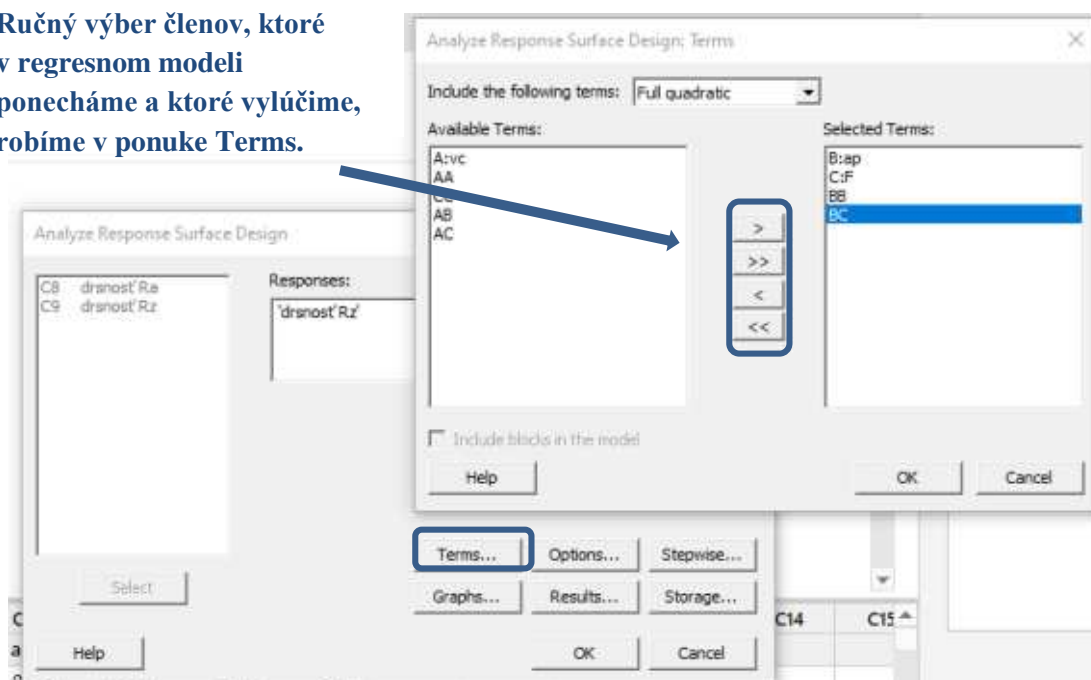
případe rovnaký ako pri ručnom vylúčení štatisticky nevýznamných členov regresného modelu na obr. 220.

V ponuke Stepwise býva preddefinovaná hladina významnosti 0,1 a hierarchický regresný model .



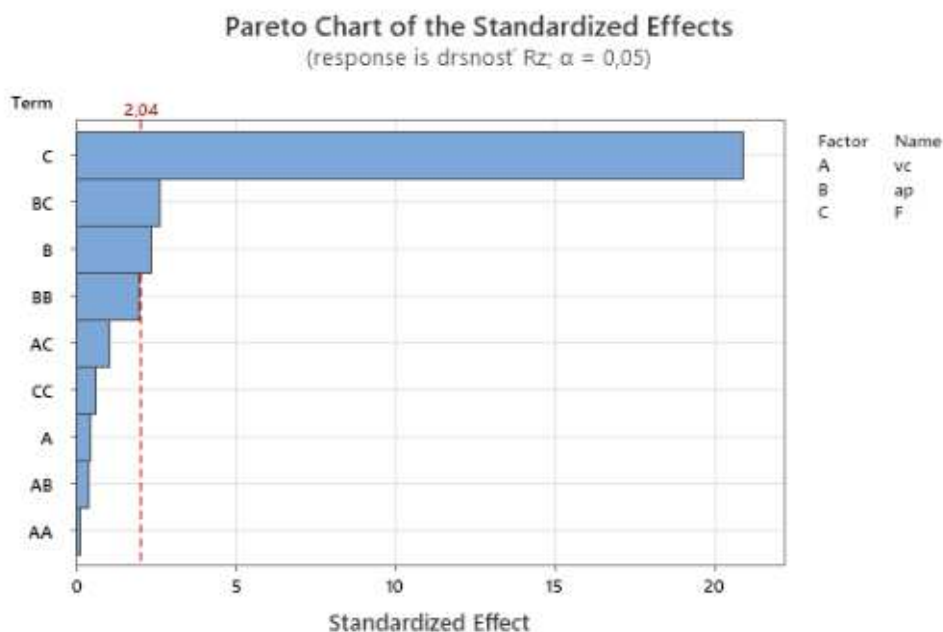
Obr. 219 Spustenie spätnej eliminačnej metódy pri analýze výsledkov v Minitabe

Ručný výber členov, ktoré v regresnom modeli ponecháme a ktoré vylúčime, robíme v ponuke Terms.

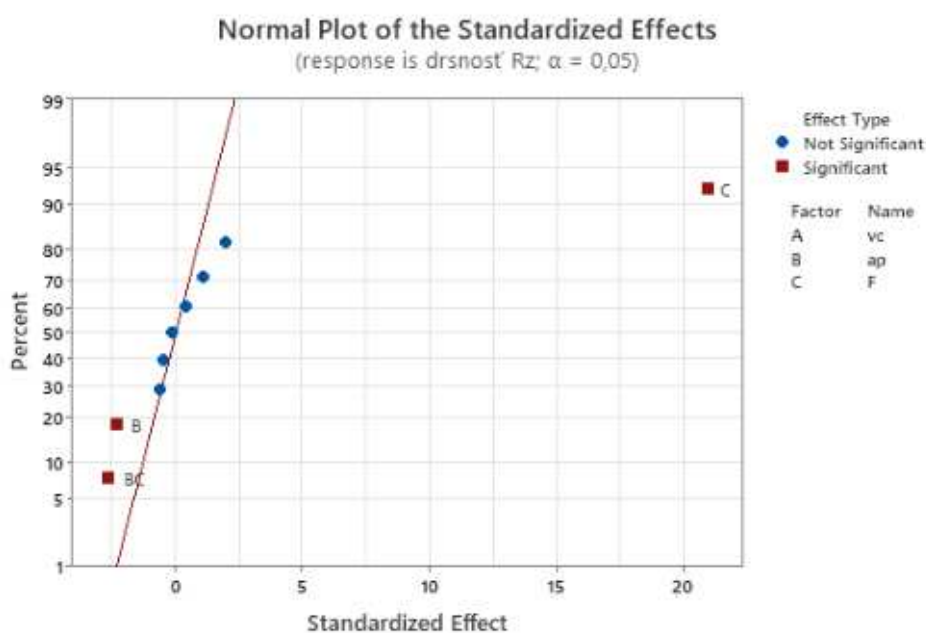


Obr. 220 Ručné vylúčenie štatisticky nevýznamných členov z regresného modelu v Minitabe robíme výberom členov v ponuke Terms pri analýze výsledkov

Kontrolu porovnania veľkosti vplyvu všetkých faktorov a ich interakcií, t. j. všetkých uvažovaných členov regresného modelu na veľkosť odozvy - drsnosti Rz je možné robiť pomocou Pareto grafu (obr. 221) alebo normálneho pravdepodobnostného grafu (obr. 222). Preddefinovaná je hladina významnosti $\alpha = 0,05$. Vzhľadom na to, že štandardizovaný efekt kvadratického člena $ap \cdot ap$ má kritickú hodnotu blízku 2,04 bola hladina významnosti zvýšená na $\alpha = 0,1$ a tento kvadratický člen sme v regresnom modeli ponechali. Prepočítané hodnoty testovacích štatistík ukazujú, že toto rozhodnutie bolo správne.



Obr. 221 Pareto graf pre odozvu drsnosť Rz



Obr. 222 Normálny pravdepodobnostný graf pre štandardizované efekty pre $\alpha = 0,05$

Výstup regresnej analýzy po vylúčení štatisticky nevýznamných členov je na obr. 223 až 225.

Coded Coefficients

Term	Coef	SE Coef	T-Value	P-Value	VIF
Constant	15,240	0,304	50,16	0,000	
ap	-0,705	0,288	-2,45	0,019	1,00
F	6,301	0,288	21,91	0,000	1,00
ap*ap	0,596	0,277	2,15	0,039	1,00
ap*F	-1,042	0,376	-2,77	0,009	1,00

Obr. 223 Výstup Minitabu – časť týkajúca sa regresných koeficientov po vylúčení nevýznamných členov

Analysis of Variance

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	4	1125,80	281,45	124,63	0,000
Linear	2	1098,00	549,00	243,11	0,000
ap	1	13,58	13,58	6,01	0,019
F	1	1084,43	1084,43	480,21	0,000
Square	1	10,42	10,42	4,61	0,039
ap*ap	1	10,42	10,42	4,61	0,039
2-Way Interaction	1	17,37	17,37	7,69	0,009
ap*F	1	17,37	17,37	7,69	0,009
Error	35	79,04	2,26		
Lack-of-Fit	10	20,26	2,03	0,86	0,578
Pure Error	25	58,78	2,35		
Total	39	1204,83			

Obr. 224 Výstup Minitabu – časť ANOVA zodpovedajúca návrhu CCD po vylúčení nevýznamných členov pre odozvu Rz

SUMMARY OUTPUT						
Regression Statistics						
Multiple R	0,966643					
R Square	0,9344					
Adjusted R Square	0,926902					
Standard Error	1,502736					
Observations	40					
ANOVA						
	df	SS	MS	F	Significance F	
Regression	4	1125,795	281,4488	124,6333	3,42935E-20	
Residual	35	79,0375	2,258214			
Total	39	1204,833				
	Coefficients	Standard Err	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%
Intercept	15,2403	0,303862	50,15533	3,43E-34	14,62342284	15,8571679
ap	-0,705	0,287536	-2,45188	0,019344	-1,28873182	-0,12127354
fn	6,301004	0,287536	21,91379	5,04E-22	5,717274455	6,884732728
ap*fn	-1,042	0,375684	-2,77361	0,00883	-1,80467887	-0,27932113
ap*ap	0,595874	0,277387	2,148169	0,038701	0,032748628	1,158998623

Obr. 225 Výstup regresnej analýzy po vylúčení nesignifikantných členov pre odozvu Rz v Exceli

Všetky ponechané členy regresného modelu možno na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ považovať za signifikantné, pretože všetky prepočítané p-hodnoty sú menšie ako 0,05.

Kvalita získaného regresného modelu

Z výstupu Excelu na obr. 225 z tabuľky so všeobecnými štatistikami vyplýva, že nájdený hierarchický regresný model dokáže vysvetliť 93,44% variability nameraných hodnôt odozvy drsnosti Rz. Iba 6,17% variability meraných dát zostalo modelom nevysvetlených. Upravený index determinácie je rovný 92,69%. Štandardná chyba, ktorej sme sa dopustili, je 1,50, pozorovaných hodnôt bolo 40. Z výstupu softvéru Minitabu na obr. 227 vyplýva, že index determinácie týkajúci sa predikcie má hodnotou pred $R^2 = 90,95\%$. Vzhľadom na malé rozdiely medzi týmito charakteristikami, regresný model možno považovať za dobrý. Pozitívne je, že rozdiely medzi týmito charakteristikami sa v novom regresnom modeli v porovnaní s modelom, ktorý obsahoval i nevýznamné členy, zmenšili, upravený index determinácie R^2 narástol. Schopnosť regresného modelu predikovať hodnoty odozvy drsnosti Rz sa v porovnaní s pôvodným regresným modelom zväčšila (obr.226 a 227).

Model Summary

S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)
1,57477	93,83%	91,97%	87,71%

Obr. 226 Kvalita regresného modelu pred vylúčením štatisticky nevýznamných členov vyjadrená pomocou rôznych R square v Minitabe

Model Summary

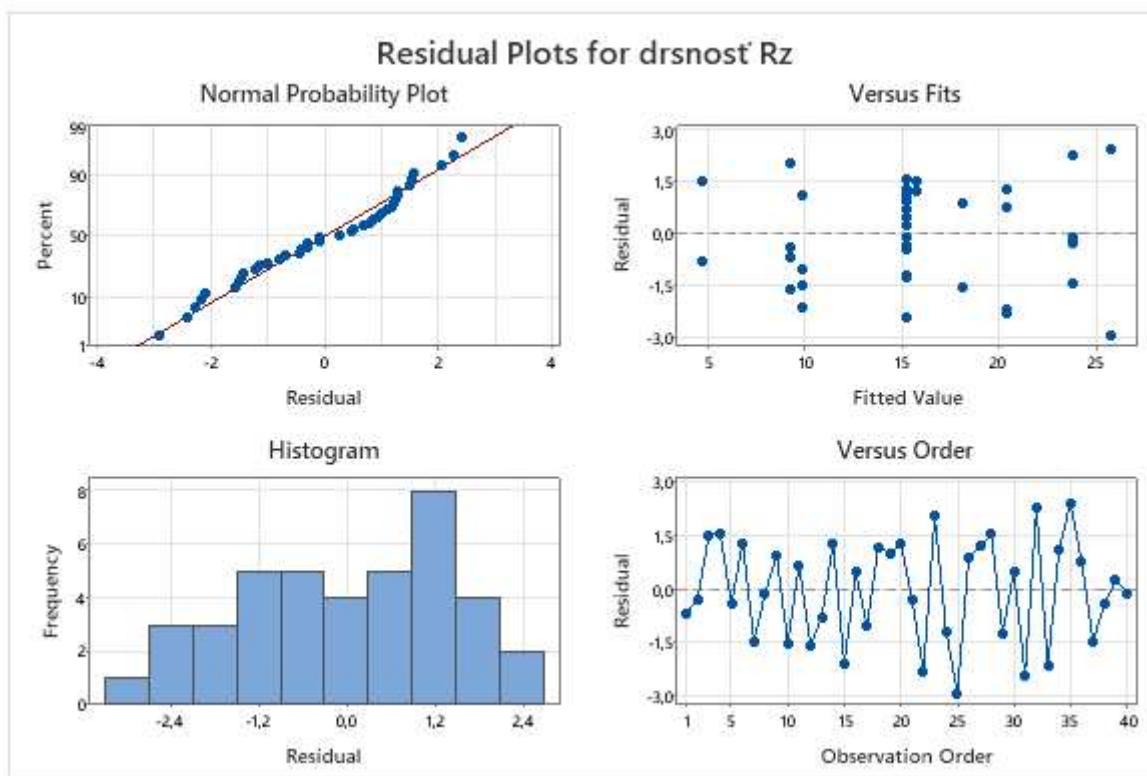
S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)
1,50274	93,44%	92,69%	90,95%

Obr. 227 Kvalita regresného modelu po vylúčení štatisticky nevýznamných členov vyjadrená pomocou rôznych R square v Minitabe

Na základe F-testu štatistickej významnosti regresného modelu s p-hodnotou $3,43 \cdot 10^{-20}$ možno považovať regresný model za štatisticky významný.

Na základe testu Lack of Fit s p-hodnotou 0,578 možno považovať aj nový regresný model za dostatočný.

Súčasťou posúdenia kvality získaného regresného modelu je grafická analýza rezíduí, kedy vizuálne kontrolujeme normalitu a nezávislosť rezíduí. Výstup Minitabu s grafmi rezíduí je vidieť na obr. 228.



Obr. 228 Výstup Minitabu umožňujúci analýzu rezíduí

Vizuálnu kontrolu normálneho rozdelenia rezíduí umožňuje normálny pravdepodobnostný graf (Normal Probability Plot) a histogram (Histogram). Normálny pravdepodobnostný graf zobrazuje rozdelenie rezíduí oproti teoretickým kvantilom normálneho rozdelenia. V ideálnom prípade by mali zobrazené body ležať na červenej diagonálnej priamke, čo interpretujeme ako splnenú normalitu analyzovaných rezíduí. V tomto prípade sa reziduá väčšinou nachádzajú blízko čiary, sú viditeľné určité odchýlky, čo naznačuje mierne odchýlky od normálneho rozdelenia. Tieto odchýlky môžu naznačovať prítomnosť odľahlých hodnôt alebo systematických chýb. Ak na posúdenie normality rezíduí použijeme histogram, tento by mal mať pre normálne rozdelené reziduá približne tvar zvona. Histogram má v prípade malého množstva dát menšiu výpovednú hodnotu ako normálny pravdepodobnostný graf.

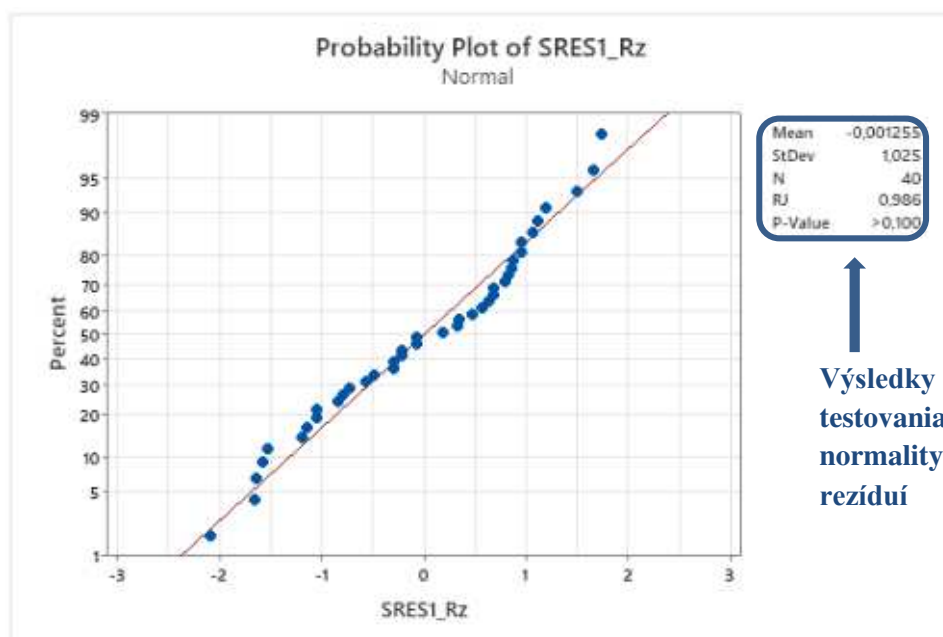
Graf rezíduí verzus fitované hodnoty (Residuals versus Fits) ukazuje, či existuje nejaká systematická závislosť medzi reziduami a predikovanými hodnotami. Ideálne by reziduá mali byť rozptýlené náhodne okolo nulovej osi dodržiavajúc zákon troch sigma. V našom prípade sú

štandardizované rezíduá rozptýlené náhodne okolo vodorovnej osi, všetky sú vzdialené v intervale ± 3 .

Z grafu rezíduí verzus poradie (Residuals vs Order) vieme zistiť, či existuje trend, t. j. nejaká funkčná závislosť v zaznamenanom časovom poradí rezíduí. Ideálne by mali byť hodnoty rezíduí náhodne rozptýlené, čo by naznačovalo absenciu autokorelácie. Správanie rezíduí v čase v našom prípade nenaznačuje žiadny trend. Rezíduá sú náhodne rozptýlené bez vzoru v poradí, čo naznačuje, že nie je prítomná autokorelácia.

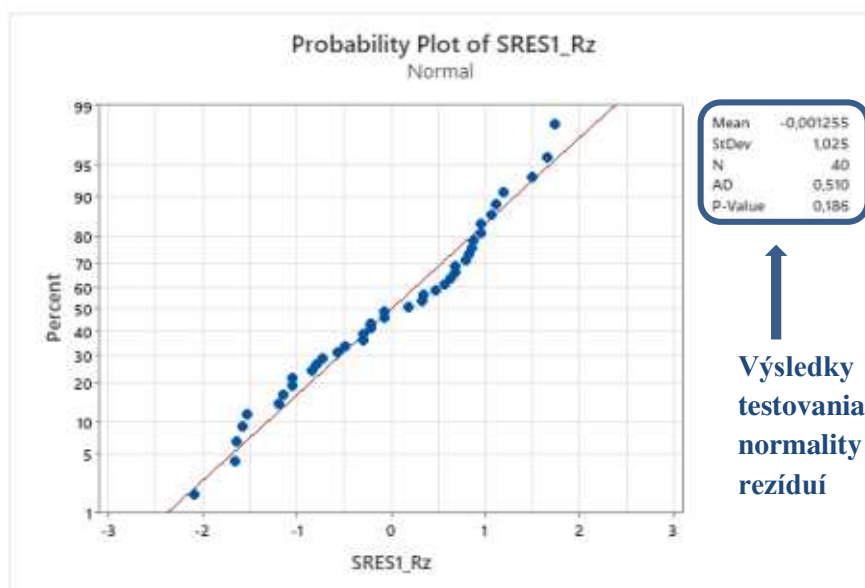
Celkovo možno zhodnotiť, že grafy naznačujú, že model je vhodný a rezíduá majú požadované vlastnosti pre „dobre sediacy“ model.

Overenie normality vypočítaných štandardizovaných rezíduá je možné testovať. Normálny pravdepodobnostný graf spolu s vypočítanou hodnotou testovacej štatistiky Ryan-Joiner testu, p-hodnotou, parametrami rozdelenia a rozsahom súboru môžeme vidieť na obr. 229. Pre analyzovaných 40 hodnôt bola vypočítaná stredná hodnota -0,001255, štandardná odchýlka 1,025. Na základe toho je možné konštatovať, že analyzované dáta (štandardizované rezíduá) spĺňajú parametre štandardizovaného normálneho rozdelenia $N(0;1)$. Hodnota testovacej štatistiky vyjadrená ako korelačný koeficient $r = 0,986$. Pretože vypočítaná p-hodnota $> 0,1$, môžeme prijať nulovú hypotézu H_0 : Dáta pochádzajú z normálneho rozdelenia, a zamietnuť alternatívnu hypotézu H_1 : Dáta nepochádzajú z normálneho rozdelenia.



Obr. 229 Normálny pravdepodobnostný graf s výstupom zvoleného Ryan-Joiner testu

K rovnakému záveru sa dostaneme pomocou Anderson-Darlingov testu (obr. 230). V tomto prípade má testovacia štatistika hodnotu 0,510, pričom p-hodnota je rovná 0,186.

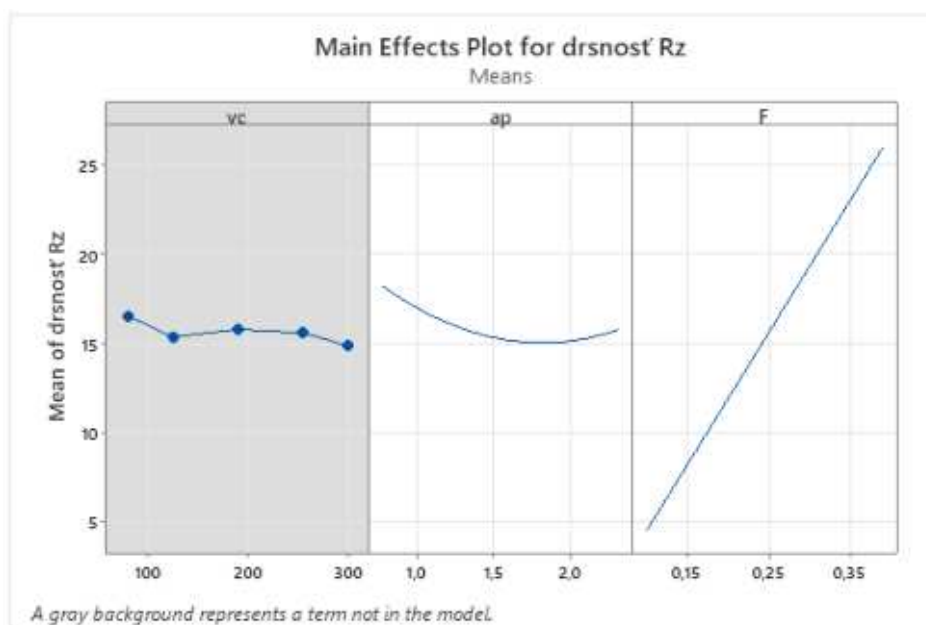


Obr. 230 Normálny pravdepodobnostný graf s výstupom Anderson-Darling testu

Na základe uvedeného možno prijať tvrdenie, že regresný model je „dobrý“.

Grafy hlavných efektov a grafy interakcií faktorov

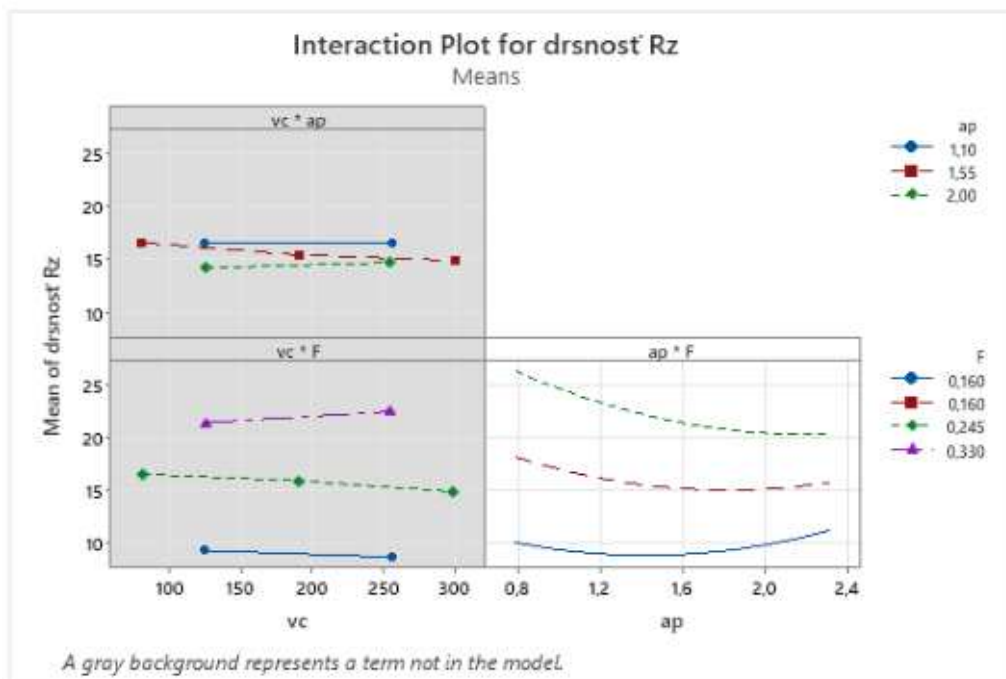
Grafy hlavných efektov na obr. 231 nie sú zobrazené ako úsečky, ale ako krivky alebo lomené čiary, pretože hodnoty odozvy boli merané na viacerých (piatich) úrovniach každého faktora. Z porovnania kriviek vidieť, že najmenší sklon má krivka pri faktore A_vc, t. j. najmenší vplyv na drsnosť Rz pri zanedbaní vplyvu interakcie má rezná rýchlosť v_c . Zakrivenie krivky v tvare paraboly pre hlavný efekt faktora B_ap naznačuje kvadratický vplyv faktora B hĺbka rezu a_p . Zo sklonu, resp. dĺžky úsečky pri faktore C_F možno očakávať, že najväčší vplyv na odozvu bude mať práve faktor C posuv f_n . Grafy hlavných efektov majú veľkú výpovednú hodnotu vtedy, ak nie je prítomná interakcia faktorov.



Obr. 231 Grafy hlavných efektov v Minitabe

Grafy interakcie faktorov z výstupu Minitabu sú na obr. 232. Pomocou testov hypotéz bola identifikovaná ako signifikantná interakcia faktorov hĺbka rezu a_p a posuv f_n . Pri vizuálnej kontrole pri grafoch interakcie by sme však pravdepodobne tento interakčný člen z regresného modelu vylúčili na základe „približne rovnakého“ sklonu (tvaru) kriviek. To ukazuje, že vizuálna kontrola výsledkov nie je vždy dostatočná a testovanie má svoje opodstatnenie.

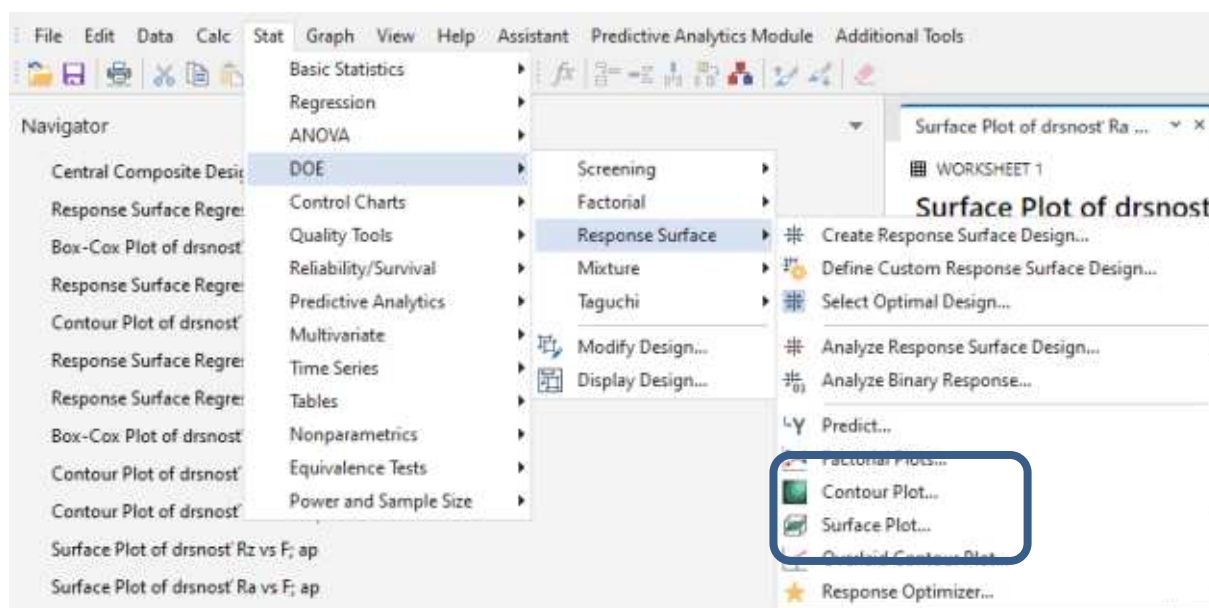
Pri zobrazení grafov hlavných efektov faktorov a grafov interakcií faktorov Minitab ponúka možnosť zobrazit' aj grafy tých efektov faktorov či efektov interakcií, ktoré boli z regresného modelu vylúčené. Vylúčené členy z regresného modelu sú v tomto prípade zobrazené so sivým pozadím a graf je doplnený upozornením, že obsahuje členy regresného modelu, ktoré boli z neho odstránené.



Obr. 232 Grafy interakcie faktorov v Minitabe

Grafické zobrazenie získaných regresných modelov pomocou 3D grafov a ich vrstevnicových grafov

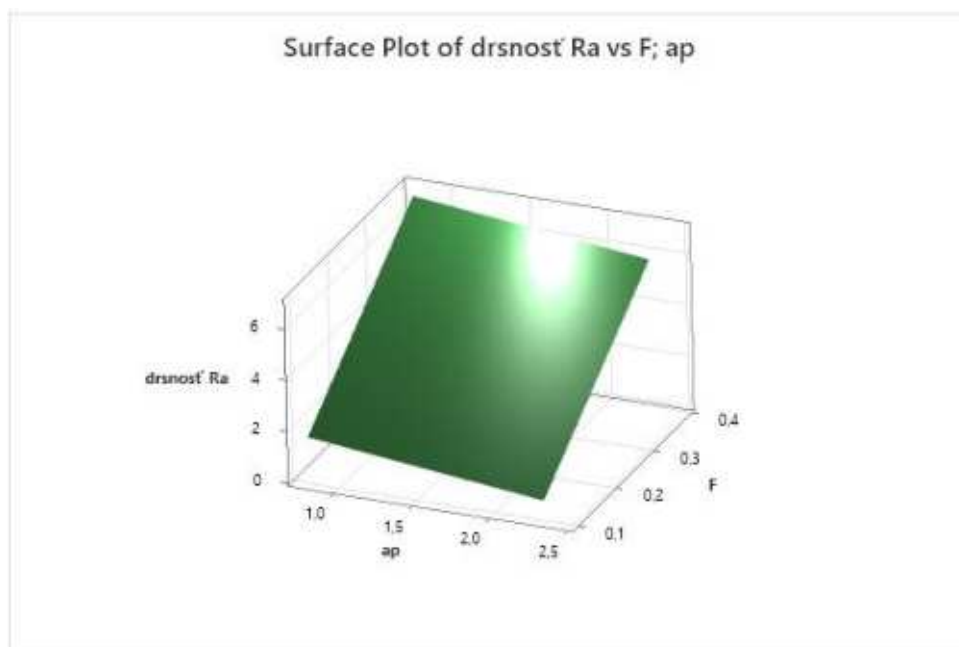
Postup zobrazenia 3D grafu a vrstevnicového grafu v Minitabe je naznačený na obr. 233. Výstupy regresnej analýzy pre odozvu drsnosť R_a sú uvedené na obr. 186 a 190 a pre odozvu drsnosť R_z sú uvedené na obr. 223 a 225. Regresný model v kódovaných jednotkách pre drsnosť R_a má predpis: $R_a = 3,7 - 0,3ap + 1,6fn$. Regresný model v kódovaných jednotkách pre drsnosť R_z má predpis: $R_z = 15,2 - 0,7ap + 6,3fn + 0,6ap^2 - ap \cdot fn$. Ak regresný model obsahuje iba lineárne členy a má dva faktory, výsledný graf lineárnej regresnej funkcie predstavuje rovinu. Zakrivenie odozvovej plochy vzniká v dôsledku prítomnosti interakčných a kvadratických členov v modeli. Pri lineárnom regresnom modeli je vrstevnicový graf premietnutý do roviny experimentálneho priestoru vo forme rovnobežných priamok. V prípade kvadratického modelu alebo modelu s obsahujúcimi interakčnými členmi dochádza v rovine experimentálneho priestoru v prípade zobrazenia vrstevnicového grafu k zakriveniu izočiar. Izolínia (izočiar) je čiara, pozdĺž ktorej má zvolená skalárna fyzikálna veličina rovnakú hodnotu.



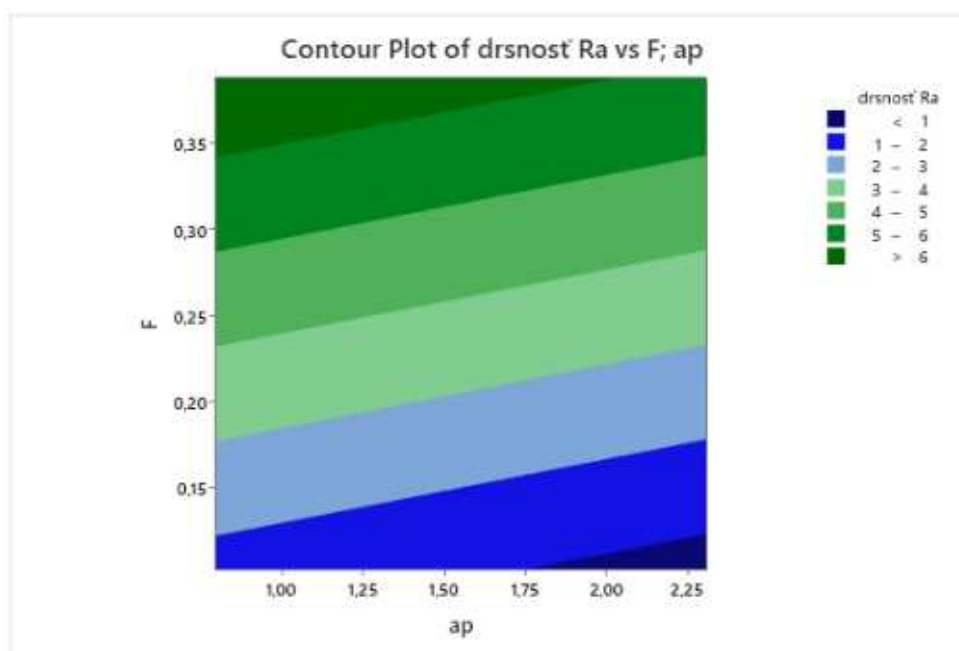
Obr. 233 Postup zobrazenia 3D grafu alebo vrstevnicového grafu v Minitabe

Na obr. 234 je zobrazený 3D graf vyjadrujúci závislosť drsnosti R_a od parametrov B_{ap} (hĺbka rezu a_p) a C_F (posuv f_n). Obr. 235 zobrazuje k nemu prislúchajúci vrstevnicový graf. Regresný model popisujúci závislosť drsnosti R_a od faktorov hĺbka rezu a_p a posuv f_n je lineárny, preto je 3D grafom rovina a vrstevnicový graf obsahuje rovnobežné izopásma oddelené rovnobežnými priamkami (izočiarami). Najväčšiu drsnosť R_a možno očakávať podľa

rozdelenia plochy vrstevnicového grafu v oblasti vľavo hore, naopak najmenšiu drsnosť Ra vpravo dole. To znamená najväčšie hodnoty drsnosti Ra boli namerané pri vysokých hodnotách posuvu f_n a po vylúčení veľkých hĺbok rezu a_p . Najmenšiu drsnosť Ra dostaneme v rámci nášho experimentálneho priestoru, ak bude hĺbka rezu a_p maximálna a posuv f_n čo najmenší.

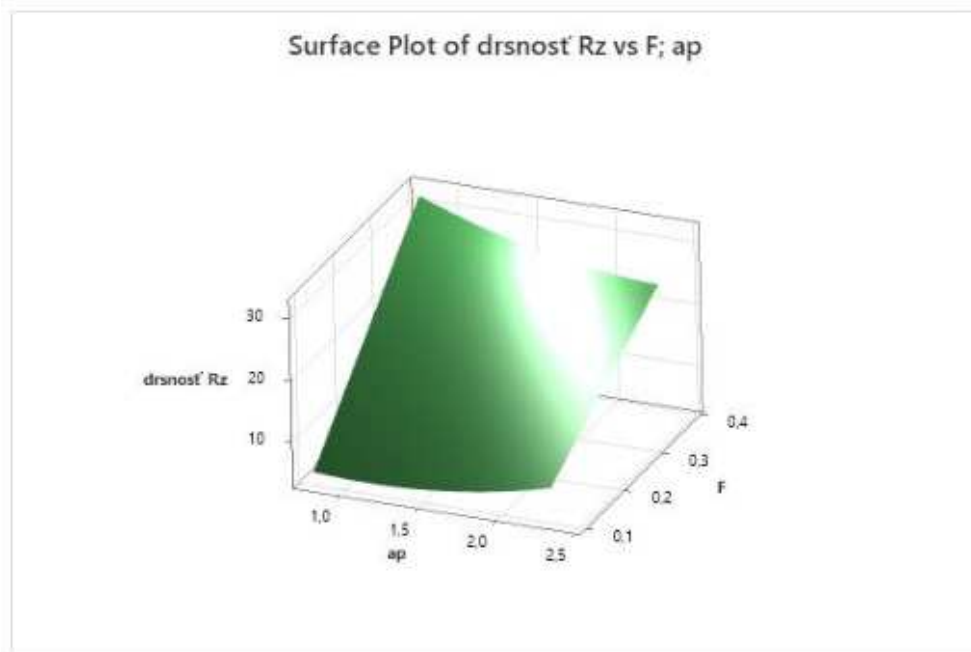


Obr. 234 3D graf vyjadrujúci závislosť drsnosti Ra od parametrov a_p a f_n : $Ra = -0,3ap + 1,6fn$ – výstup Minitabu

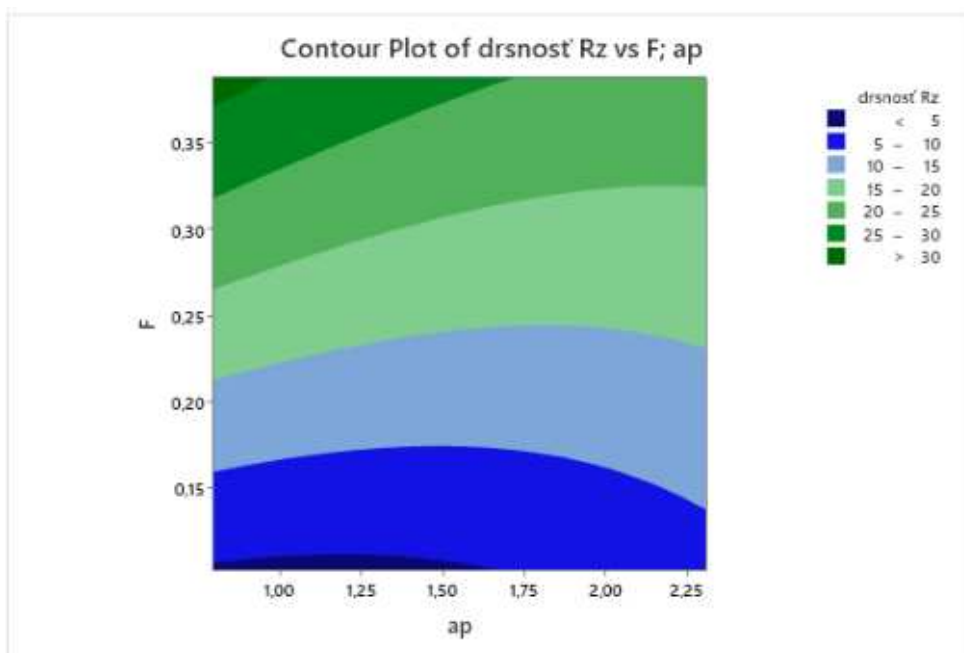


Obr. 235 Vrstevnicový graf pre odozvu drsnosť Ra – výstup Minitabu

Na obr. 236 je zobrazený 3D graf vyjadrujúci závislosť drsnosti Rz od faktorov hĺbky rezu a_p a posuvu f_n . Prvý faktor rezná rýchlosť v_c bolo možné považovať pre drsnosť Rz rovnako ako pre drsnosť Ra za nevýznamný. Obr. 237 zobrazuje vrstevnicový graf prislúchajúci 3D grafu pre drsnosť Rz.



Obr. 236 3D graf vyjadrujúci závislosť drsnosti od parametrov a_p a F : $Rz = 15,2 - 0,7a_p + 6,3f_n + 0,6a_p^2 - a_p \cdot f_n$ – výstup Minitabu



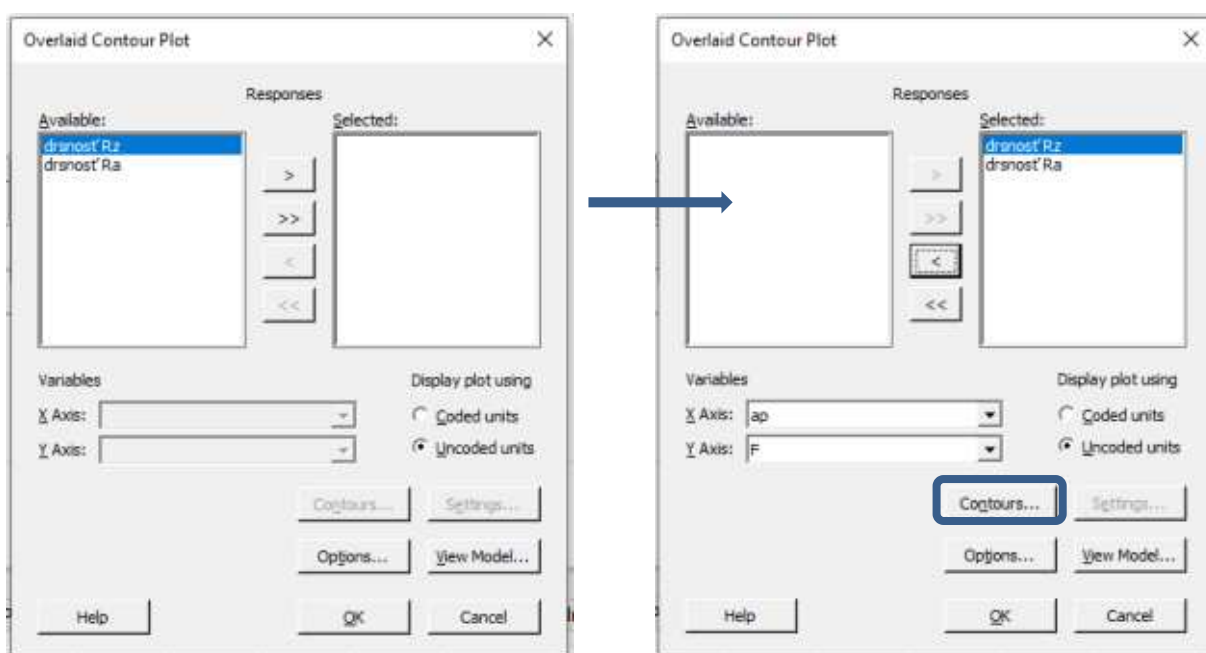
Obr. 237 Vrstevnicový graf pre odozvu drsnosť Rz – výstup Minitabu

Najväčšiu drsnosť R_z možno očakávať podľa rozdelenia plochy vrstevnicového grafu v oblasti vľavo hore, t. j. pri vysokých hodnotách posuvu f_n a minimálnych hodnotách hĺbok rezu a_p . Najmenšia drsnosť R_z je určená minimálnou hodnotou posuvu f_n , ak je súčasne hĺbka rezu a_p v dolnej polovici svojho intervalu.

Na základe zobrazených pásiem s rovnakou hodnotou drsností R_a či R_z (izopásiem) vieme z vrstevnicových grafov jednoduchým spôsobom získať informáciu, na aké hodnoty je potrebná nastaviť úrovně vstupných parametrov – faktorov hĺbka rezu a_p a posuv f_n , aby sledovaná odozva mala požadovanú hodnotu.

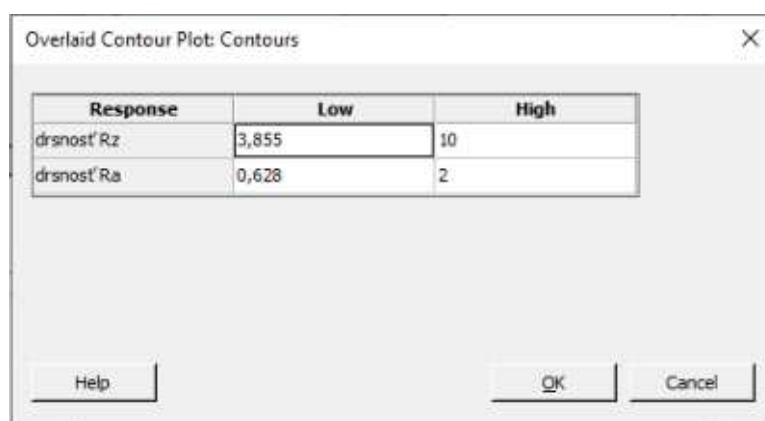
Viackriteriálna optimalizácia využívajúca vrstevnicové grafy

Ak potrebujeme zobraziť prekrývajúce sa vrstevnicové grafy v Minitabe, postupujeme ako je naznačené na obr. 238. Z ponúkaných vyhodnocovaných odoziev vyberieme nami požadované a nastavíme ich požadované hranice. V ponuke *Contours...* v dialógovom okne *Overlaid Contour Plot* nastavíme požadované hranice pre každú zvolenú odozvu. Na obr. 239 boli nastavené hranice od minimálnej nameranej hodnoty po hodnotu drsnosti 10 pre drsnosť R_z a od minimálnej nameranej hodnoty po hodnotu drsnosti 2 pre drsnosť R_a . Tomuto nastaveniu zodpovedá výstup na obr. 240, kde experimentálna oblasť môže byť zobrazená v pôvodných alebo v kódovaných jednotkách.



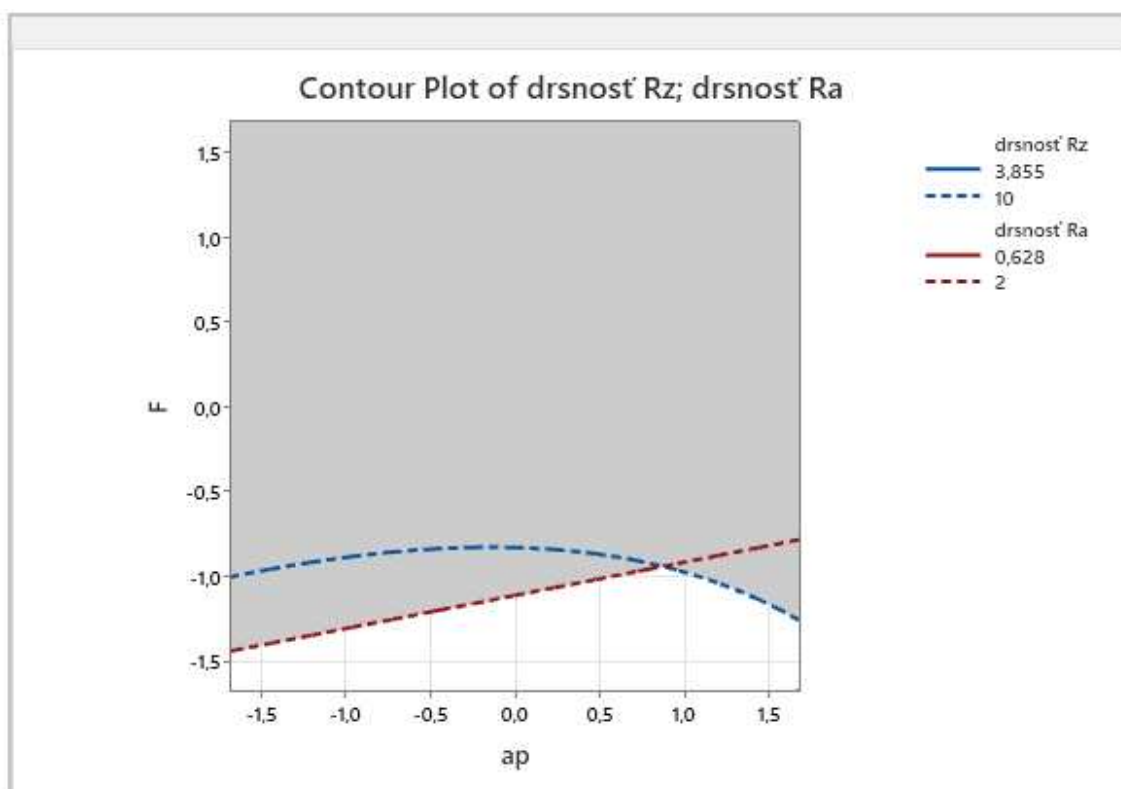
Obr. 238 Postup pri zobrazení prekryvu vrstevnicových grafov v Minitabe

Graf zobrazujúci oblasť, kedy bude mať podľa získaných regresných modelov drsnosť Rz maximálnu hodnotu $10\text{ }\mu\text{m}$ a súčasne drsnosť Ra maximálnu hodnotu $2\text{ }\mu\text{m}$, je na obr. 240 a 241. Faktory pre zvolenú experimentálnu oblasť sú vo vrstevnicovom grafe na obr. 240 vyjadrené v kódovaných jednotkách. Na obr. 241 je pri rovnakých podmienkach zobrazený experimentálny priestor v pôvodných experimentálnych jednotkách. Na grafe s prekrývajúcimi sa oboma vrstevnicovými grafmi je oblasť spĺňajúca súčasne obe požadované kritériá s bielym pozadím, experimentálny priestor podfarbený sivou farbou nami zadané požiadavky na odozvy nespĺňa.

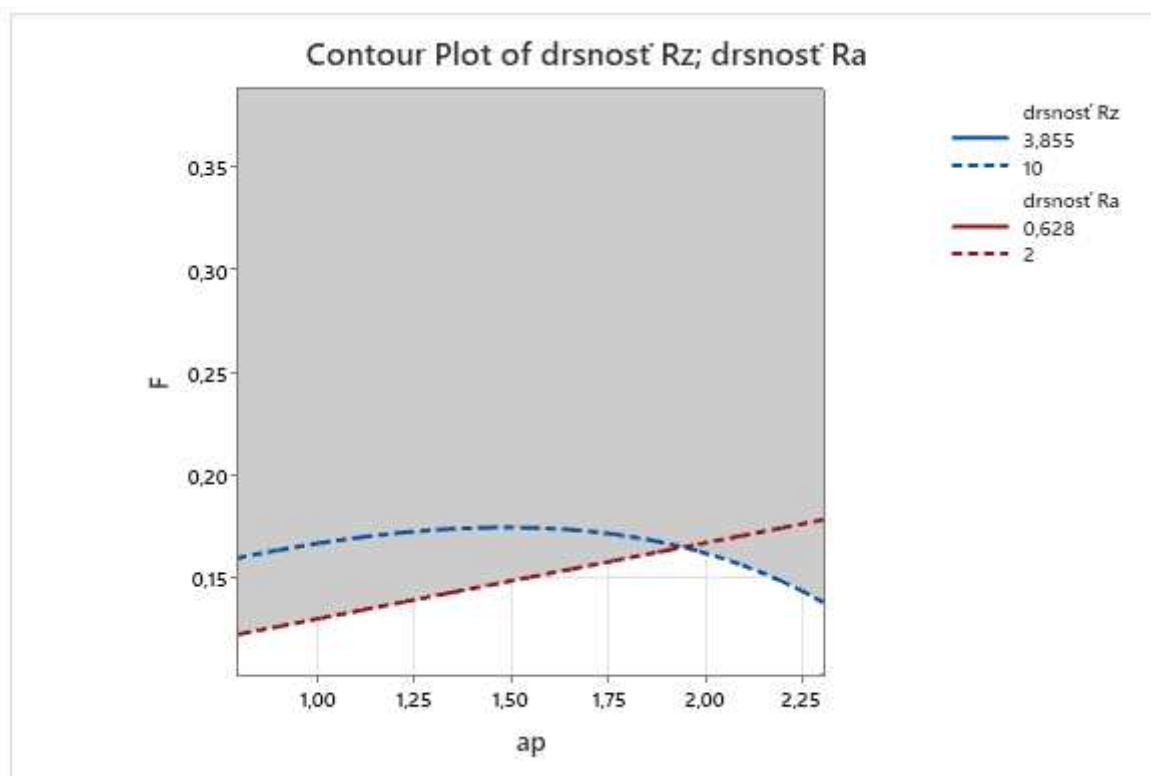


Response	Low	High
drsnosť Rz	3,855	10
drsnosť Ra	0,628	2

Obr. 239 Nastavenie hraníc pre zvolené minimálne odozvy Rz a Ra v Minitabe

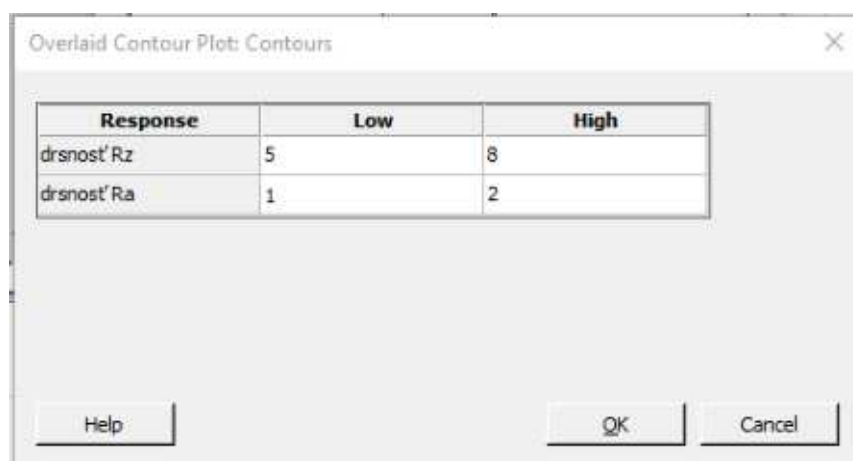


Obr. 240 Graf zobrazujúci oblasť, kedy bude mať drsnosť Rz maximálne hodnotu $10\text{ }\mu\text{m}$ a súčasne drsnosť Ra maximálne hodnotu $2\text{ }\mu\text{m}$ – Overlaid Contour Plot ako výstup Minitabu

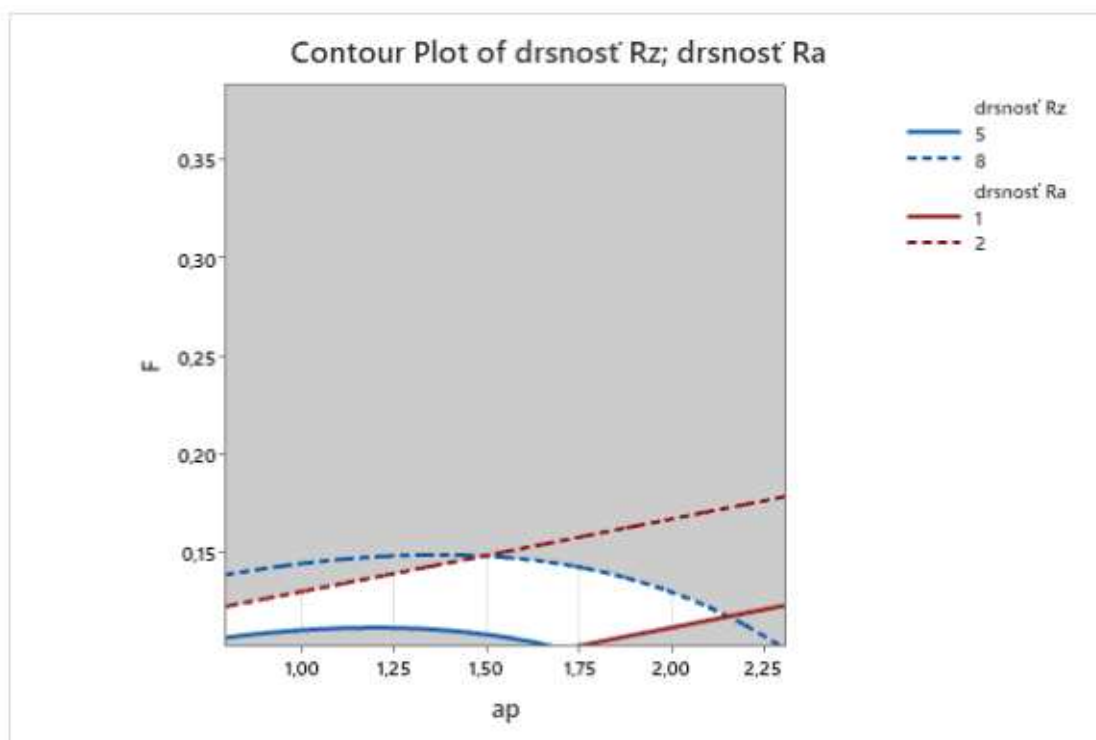


Obr. 241 Graf zobrazujúci oblasť, kedy bude mať drsnosť Rz maximálne hodnotu 10 μm a súčasne drsnosť Ra maximálne hodnotu 2 μm – Overlaid Contour Plot výstup Minitabu

Pri ohraničení hodnôt odozvy Rz od 5 μm do 8 μm a odozvy Ra od 1 μm do 2 μm (obr. 242) vidíme výslednú časť experimentálneho priestoru spĺňajúcu obe podmienky na obr. 243. Pri voľbe bodu z „bieleho“ experimentálneho priestoru (nastavení faktorov na dané úrovne) možno očakávať ako výstup nastavené zvolené hodnoty odoziev, t. j. drsnosti Ra a Rz.



Obr. 242 Nastavenie hraníc pre zvolené odozvy Rz a Ra v Minitabe



Obr. 243 Graf zobrazujúci oblasť, kedy možno očakávať drsnosť Rz z intervalu (5;8) μm a súčasne drsnosť Ra z intervalu (1;2) μm – výstup Minitabu

ZOZNAM BIBLIOGRAFICKÝCH ODKAZOV

1. ANTONY, J. *Design of Experiments for Engineers and Scientists*. Elsevier, 2023. ISBN:978-0-443-15173-6
2. BERGER, P. D., MAURER, R. E., CELLI, G. B. *Experimental Design With Applications in Management, Engineering, and the Sciences*. Springer, 2018. ISBN 978-3-319-64583-4
3. KENNETH N. BERK, K. N., CAREY, P. *Data Analysis with Microsoft® Excel*. Brooks/Cole USA, 2010. ISBN-13: 978-0-495-39178-4
4. BOHÁČOVÁ, S. *Aplikace plánovaného experimentu v procesu lakování*. Diplomová práce. Vysoká škola báňská – TU Ostrava, 2016.
5. HORNÍKOVÁ, A. *Navrhovanie a vyhodnocovanie experimentov s aplikáciami*. Iura Edition, Bratislava. 2009. ISBN 978-80-8078-281-8
6. KENETT, R., ZACKS, S., AMBERTI, D. *Modern Industrial Statistics with Applications in R, MINITAB and JMP*. Wiley, 2021. ISBN 9781119714965
7. MATHEWS, P.G. *Design of Experiments with MINITAB*. ASQ Quality Press Milwaukee, Wisconsin. Printed in USA, 2004. ISBN 0-87389-637-8
8. LENTH, R. V. (1989). *Quick and Easy Analysis of Unreplicated Factorials*. Technometrics, 31(4), 469–473. <https://doi.org/10.2307/1269997>
9. MONTGOMERY, D. C. *Designs and Analysis of Experiments*. Wiley, 2013. ISBN 978-1118-14692-7
10. MYERS, R. H., MONTGOMERY, D.C., ANDERSON-COOK, CH.M. *Response Surface Methodology. Process and Product Optimization Using Designed Experiments*. Wiley, 2009. ISBN 978-0-470-17446-3
11. NEWTON, I. *Minitab Cookbook. Over 110 practical recipes to explore the vast array of statistics in Minitab 17*. UK: Birmingham, 2014. ISBN 978-1-78217-092-1
12. PALUMBÍNY O. *Matematické metódy plánovania a vyhodnocovania experimentu*. Trnava: AlumniPress, 2009. ISBN 978-80-8096-095-7
13. SELVAMUTHU, D., DAS D. *Introduction to Statistical Methods, Design of Experiments and Statistical Quality Control* Springer, 2018. ISBN 978-981-13-1736-1. <https://doi.org/10.1007/978-981-13-1736-1>
14. ŠOLTÉS, E. *Regresná a korelačná analýza s aplikáciami*. Iura Edition, 2008. ISBN 978-80-8078-163-7

15. TOŠENOVSKÝ, J. *Plánování experimentů*. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2012. ISBN 978-80-248-2592-2
16. TÓTHOVÁ, M., KOTIANOVÁ, J. *Matematické metody plánovania a vyhodnocovania experimentu*. Trnava: AlumniPress, 2015. ISBN 978-80-8096-227-2

Elektronické zdroje

17. <https://blog.minitab.com>
18. <https://it.minitab.com/en-us/search/default.aspx?q0=design+of+experiments>
19. <https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/index.htm>
20. <https://www.pdx.edu/>
21. <https://www.experimentaldesignhub.com/>
22. <https://www.theopeneducator.com/doe>
23. <https://www.scribbr.com/methodology/experimental-design/>
24. https://www.youtube.com/channel/UCzf_5-odkQ4w25m5r09bWA
25. <https://www.statease.com/webinars/>
26. <https://www.statease.com/docs/v11/tutorials/>
27. <https://www.scribd.com/document/695325414/Design-of-Experiments-with-Minitab-by-Dr-Alvin-Ang>
28. <https://www.ssi.shimadzu.com/products/liquid-chromatography/hplc-system/mss/features.html>

PRÍLOHA A

Spojité náhodná premenná – vzorový príklad obsahujúci výpočet základných štatistík používaných pri štatistickom vyhodnocovaní výsledkov meraní experimentov

Nech $f(x) = \begin{cases} cx^2 & \text{pre } x \in \langle -2, 1 \rangle \\ 0 & \text{pre } x \notin \langle -2, 1 \rangle \end{cases}$ je hustota rozdelenia pravdepodobnosti spojitej náhodnej premennej X . Nájdite číslo c , modus, strednú hodnotu, disperziu a smerodajnú odchýlku náhodnej premennej X . Nájdite a znázornite distribučnú a kvantilovú funkciu náhodnej premennej X . Vypočítajte hodnoty vybraných kvantilov, napr. mediánu, dolného kvartilu a 95. percentilu. Graficky znázornite dolný kvartil na grafe funkcie hustoty, distribučnej funkcie a kvantilovej funkcie. Určte pravdepodobnosti $P(X = 1)$, $P(X < 1)$ a $P(0 < X < 3)$.

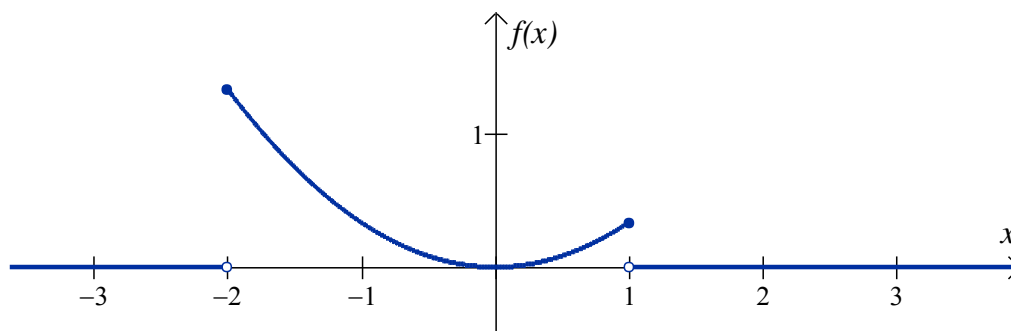
Riešenie:

1. Aby sme funkciu $f(x)$ mohli nazvať hustotou rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X , musí pre ňu platiť:

- a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$;
- b) pre $\forall x \in R: f(x) \geq 0$.

a) Prvá podmienka vyjadruje, že obsah plochy pod krivkou hustoty rozdelenia pravdepodobnosti musí byť rovný jednej.

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{-2} 0 dx + \int_{-2}^1 cx^2 dx + \int_1^{\infty} 0 dx = \int_{-2}^1 cx^2 dx = \frac{c}{3} (1^3 - (-2)^3) \\ &= \frac{c}{3} (1 + 8) = 3c \Rightarrow c = \frac{1}{3} \end{aligned}$$



Obr. 1 Graf funkcie $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^2 & \text{pre } x \in \langle -2, 1 \rangle; \\ 0 & \text{pre } x \notin \langle -2, 1 \rangle \end{cases}$, ktorá je hustotou rozdelenia pravdepodobnosti spojitej náhodnej premennej X .

b) Vidíme, že je splnená aj druhá podmienka, t. j. že $f(x) \geq 0$ pre $\forall x \in R$, teda žiadna časť grafu funkcie $f(x)$ neleží pod x -ovou osou.

2. Modus $Mo(X)$ spojitej náhodnej premennej X je definovaný ako číslo, v ktorom funkcia hustoty rozdelenia pravdepodobnosti tejto spojitej náhodnej premennej X nadobúda svoje ostré lokálne maximum. Z grafu funkcie $f(x)$ vidíme, že funkcia má hľadaný lokálny extrém v čísle $x = -2$ a tiež v $x = 1$. Preto má funkcia $f(x)$ dva modusy $Mo_1(X) = -2$ a $Mo_2(X) = 1$.

3. Stredná hodnota $E(X)$ náhodnej premennej X je definovaná ako prvý začiatkový moment $z_1(X)$: $E(X) = z_1(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^1 f(x) dx = \int_{-\infty}^{-2} x \cdot 0 dx + \int_{-2}^1 x \cdot \frac{1}{3} x^2 dx + \int_1^{\infty} x \cdot 0 dx = \int_{-2}^1 \frac{1}{3} x^3 dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-2}^1 = \frac{1}{12} (1^4 - (-2)^4) = \frac{1}{12} (1 - 16) = -\frac{5}{4}$

Stredná hodnota predstavuje pomyselnú x -ovú súradnicu ťažiska plošnej dosky pod krivkou hustoty rozdelenia pravdepodobnosti.

4. Disperziou alebo rozptylom $D(X)$ spojitej náhodnej premennej X nazývame druhý centrálny moment $c_2(X)$, t. j. počítame $c_k(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^k f(x) dx$ pre $k = 2$. Pri výpočte k -teho centrálného momentu vždy potrebujeme poznať číselnú hodnotu $E(X)$.
Disperzia

$$\begin{aligned} D(X) &= c_2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \left(-\frac{5}{4} \right) \right)^2 f(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{-2} \left(x + \frac{5}{4} \right)^2 \cdot 0 dx + \int_{-2}^1 \left(x + \frac{5}{4} \right)^2 \cdot \frac{1}{3} x^2 dx + \int_1^{\infty} \left(x + \frac{5}{4} \right)^2 \cdot 0 dx = \\ &= \int_{-2}^1 \left(x + \frac{5}{4} \right)^2 \cdot \frac{1}{3} x^2 dx = \frac{1}{3} \int_{-2}^1 \left(x^2 + \frac{5}{2} x + \frac{25}{16} \right) \cdot x^2 dx = \frac{1}{3} \int_{-2}^1 \left(x^4 + \frac{5}{2} x^3 + \frac{25}{16} x^2 \right) dx = \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{x^5}{5} + \frac{5}{2} \frac{x^4}{4} + \frac{25}{16} \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^1 = \frac{1}{3} \left(\frac{1^5}{5} + \frac{5}{2} \frac{1^4}{4} + \frac{25}{16} \frac{1^3}{3} - \left(\frac{(-2)^5}{5} + \frac{5}{2} \frac{(-2)^4}{4} + \frac{25}{16} \frac{(-2)^3}{3} \right) \right) = \\ &= \frac{51}{80} \end{aligned}$$

Poznámka: Na výpočet disperzie je možné tiež použiť vzťah $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, tzv. vetu o výpočte.

$$E(X^2) \text{ počítame ako druhý začiatkový moment } E(X^2) = z_2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{-2} x^2 \cdot 0 dx + \int_{-2}^1 x^2 \cdot \frac{1}{3} x^2 dx + \int_1^{\infty} x^2 \cdot 0 dx = \int_{-2}^1 \frac{1}{3} x^4 dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^5}{5} \right]_{-2}^1 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} - \left(-\frac{32}{5} \right) \right) = \frac{33}{15} = \frac{11}{5}$$

$$D(X) = \frac{11}{5} - \left(-\frac{5}{4} \right)^2 = \frac{11}{5} - \frac{25}{16} = \frac{51}{80}$$

Vypočítaná číselná hodnota disperzie musí byť vždy kladná.

5. Smerodajná odchýlka $s = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{51}{80}}$.

6. Distribučná funkcia náhodnej premennej X $F(x)$ je definovaná pre $\forall x \in R$ ako nevlastný integrál $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

$$x \in (-\infty, -2): F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$$

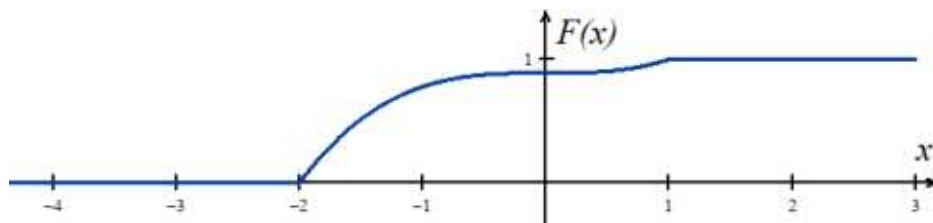
$$x \in \langle -2, 1 \rangle: F(x) = \int_{-\infty}^{-2} 0 dt + \int_{-2}^x \frac{1}{3} t^2 dt = 0 + \frac{1}{3} \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-2}^x = \frac{1}{9} (x^3 - (-8)) = \frac{x^3 + 8}{9}$$

$$x \in (1, \infty): F(x) = \int_{-\infty}^{-2} 0 dt + \int_{-2}^1 \frac{1}{3} t^2 dt + \int_1^x 0 dt = 0 + \frac{1}{3} \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-2}^1 = \frac{1}{9} (1^3 - (-2)^3) = 1$$

Vypočítané zapíšeme nasledovným spôsobom:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \in (-\infty, -2); \\ \frac{x^3 + 8}{9} & \text{pre } x \in \langle -2, 1 \rangle; \\ 1 & \text{pre } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

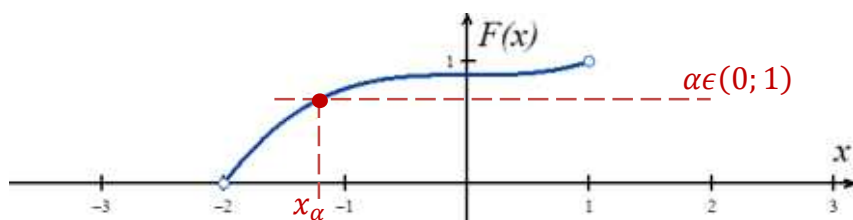
Možno konštatovať, že táto distribučná funkcia je na celom definičnom obore, t. j. na množine R spojitá, nezáporná, neklesajúca a jej obor hodnôt $F(x) \in \langle 0, 1 \rangle$ pre $\forall x \in R$. Jej graf môžeme vidieť na nasledujúcom obrázku 2.



Obr. 2. Graf distribučnej funkcie $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \in (-\infty, -2); \\ \frac{x^3+8}{9} & \text{pre } x \in [-2, 1]; \\ 1 & \text{pre } x \in (1, \infty) \end{cases}$ prislúchajúci skúmanej spojitej náhodnej premennej X

7. Kvantilová funkcia náhodnej premennej X $F^{-1}(\alpha)$ je definovaná pre všetky $\alpha \in (0; 1)$. Je inverzná k tej časti distribučnej funkcie $F(x)$, ktorá je rastúca na množine M a zobrazuje ju na interval $(0, 1)$. Pre zvolenú časť platí, že $D(F) = (-2; 1) = H(F^{-1})$ a $H(F) = (0; 1) = D(F^{-1})$.

Parameter α volíme z intervalu $(0, 1)$, t. j. robíme tzv. α rez na zvolenej časti distribučnej funkcie (obr.3).



Obr. 3 α rez vyjadruje, že pod krivkou hustoty volíme „zlava“ veľkosť plochy α

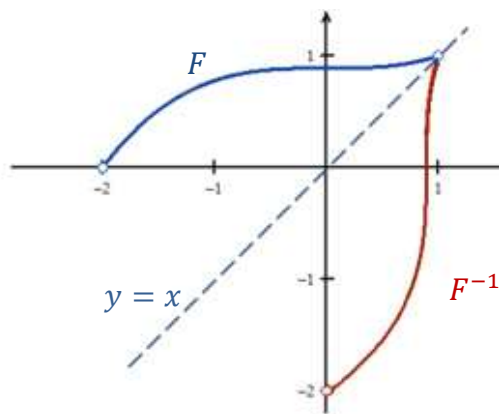
$$\alpha = \frac{x_\alpha^3 + 8}{9}$$

$$9\alpha = x_\alpha^3 + 8$$

$$x_\alpha^3 = 9\alpha - 8$$

$$x_\alpha = \sqrt[3]{9\alpha - 8} \Rightarrow F^{-1}(\alpha) = \sqrt[3]{9\alpha - 8} \text{ pre } \alpha \in (0; 1)$$

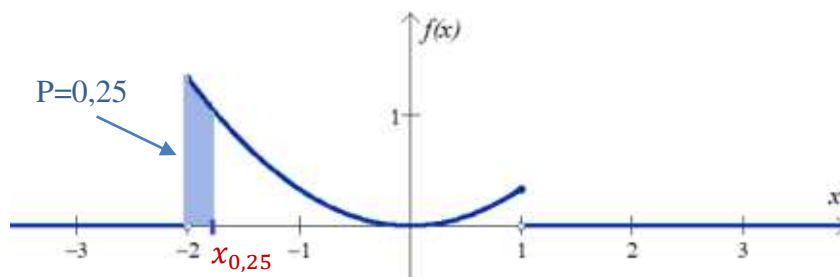
Graf kvantilovej funkcie F^{-1} je k vybranej časti grafu distribučnej funkcie F symetrický podľa priamky $y = x$ (obr.4).



Obr. 4 Zobrazenie distribučnej a kvantilovej funkcie

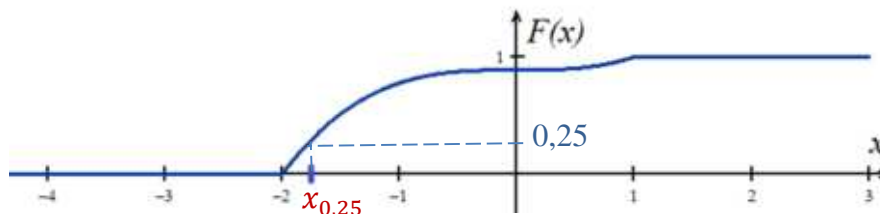
8. Na výpočet hodnoty ľubovoľných kvantilov môžeme použiť kvantilovú funkciu, napríklad medián Me , ktorý označujeme $x_{0,5} = F^{-1}(0,5) = \sqrt[3]{9 \cdot 0,5 - 8} \doteq -1,52$, dolný kvartil $x_{0,25} = F^{-1}(0,25) = \sqrt[3]{9 \cdot 0,25 - 8} \doteq -1,79$, alebo 95. percentil $x_{0,95} = F^{-1}(0,95) = \sqrt[3]{9 \cdot 0,95 - 8} \doteq 0,82$.

9. Ak chceme zobraziť približnú hodnotu dolného kvartilu na grafe funkcie hustoty rozdelenia pravdepodobnosti $f(x)$, musíme plochu pod touto krivkou rozdeliť na 4 rovnako veľké časti s plošným obsahom 0,25. Prvá z nich, t. j. plocha zľava je ohraničená na x -ovej osi dolným kvartilom $x_{0,25}$ (obr. 5).



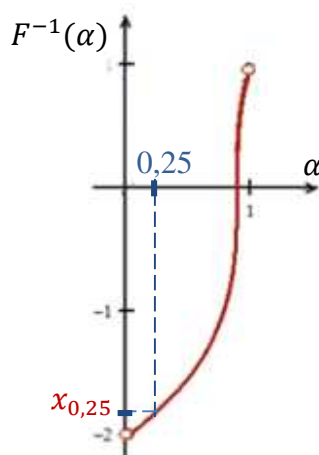
Obr. 5 Zobrazenie dolného kvartilu $x_{0,25}$ na grafe funkcie hustoty rozdelenia pravdepodobnosti $f(x)$

Pri zobrazení dolného kvartilu na grafe distribučnej funkcie vyznačená veľkosť plochy 0,25 pod krivkou $f(x)$ zodpovedá funkčnej hodnote $F(x)$, t. j. číslu 0,25 na y -ovej osi. K nej vieme nájsť na x -ovej osi zodpovedajúcu hodnotu dolného kvartilu $x_{0,25}$. (obr.6)



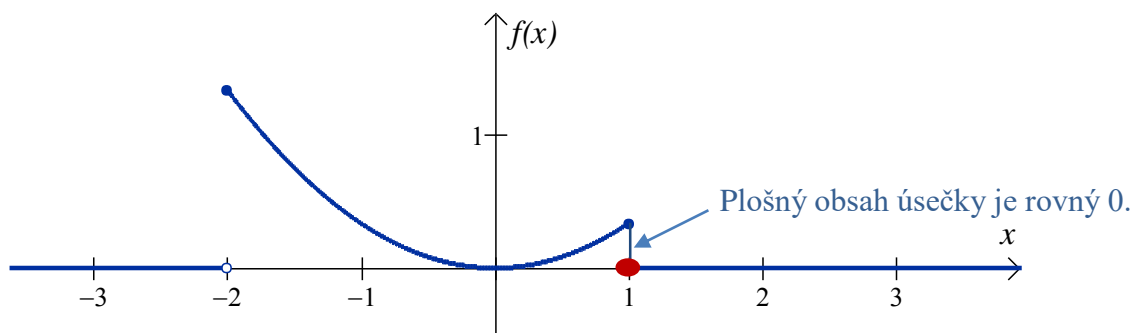
Obr. 6 Zobrazenie dolného kvartilu $x_{0,25}$ na grafe distribučnej funkcie $F(x)$

Na výpočet a rovnako aj na zobrazenie ľubovoľného kvantilu možno použiť kvantilovú funkciu, pričom hodnota kvantilu je rovná funkčnej hodnote kvantilovej funkcie pre nami zvolené α z intervalu $(0,1)$. Zobrazenie dolného kvartilu $x_{0,25} = F^{-1}(0,25)$ na grafe kvantilovej funkcie je na obr. 7.



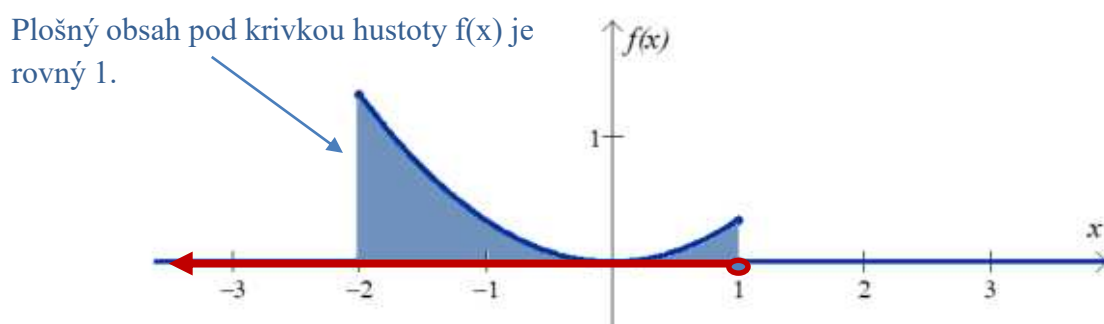
Obr. 7 Zobrazenie dolného kvartilu na grafe kvantilovej funkcie $F^{-1}(\alpha)$

10. Pri výpočte pravdepodobnosti toho, že spojitá náhodná premenná X bude spĺňať určitú podmienku, vieme číselnú hodnotu prislúchajúcu tejto pravdepodobnosti vypočítať ako veľkosť plochy pod krivkou hustoty pravdepodobnosti pre rozsah X vyplývajúci zo zadanej podmienky. Napríklad pri výpočte pravdepodobnosti toho, že náhodná premenná nadobúda hodnotu 1, počítame plošný obsah úsečky, t. j. $P(X = 1) = \int_1^1 \left(\frac{1}{3}x^2\right) dx = 0$. (obr. 8)



Obr. 8 Pravdepodobnosť toho, že spojitá náhodná nadobúda jedinú konkrétnu hodnotu z intervalu $\langle -2; 1 \rangle$ je nulová.

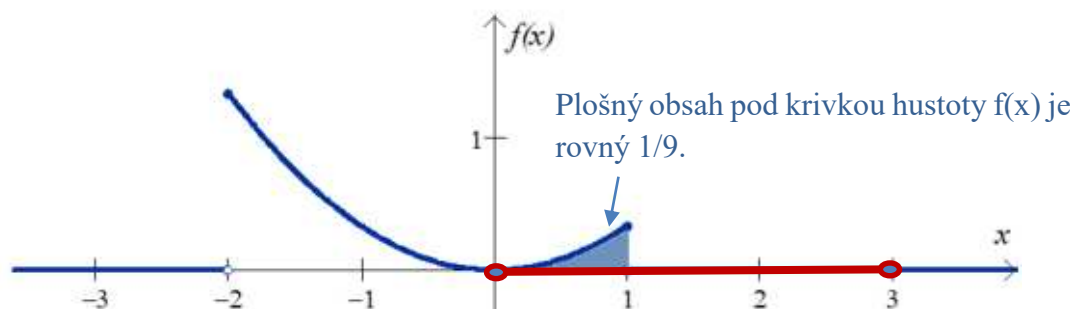
Pravdepodobnosť toho, že náhodná premenná nadobúda hodnoty menšie ako 1, je rovná jednej, pretože daná podmienka zahŕňa celý plošný obsah pod krivkou $f(x)$, t. j. počítame $P(X < 1) = \int_{-\infty}^{-2} 0 dx + \int_{-2}^1 \left(\frac{1}{3}x^2\right) dx = 1$. (obr. 9)



Obr. 9 Pravdepodobnosť toho, že spojitá náhodná nadobúda hodnoty menšie ako 1, je rovná plošnému obsahu pod krivkou hustoty rozdelenia pravdepodobnosti.

Pravdepodobnosť toho, že náhodná premenná nadobúda hodnoty väčšie ako 0 a súčasne menšie ako 3, je rovná veľkosti plochy vyznačenej na obr. 10.

$$P(0 < X < 3) = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x^2\right) dx + \int_1^3 0 dx = \frac{1}{9}.$$



Obr. 10 Pravdepodobnosť toho, že spojitá náhodná nadobúda hodnoty od 0 po 3, je rovná vyznačenému plošnému obsahu pod krivkou hustoty rozdelenia pravdepodobnosti.

PRÍLOHA B

Príklady možného použitia DOE, kde závislá premenná (odozva) je vyjadrená ako funkcia vybraných premenných (faktorov):

cena automobilu = f (vek automobilu, počet najazdených km, výkon motora, počet majiteľov)

cena bytu = f (výmera obytnej plochy, výmera loggie, počet izieb, vzdialenosť od centra)

pevnosť v ťahu = f (percento plniva, hrúbka frakcie, index toku)

merný tep. príkon = f (zváracie napätie, zvärací prúd, rýchlosť zvárania)

dojazd el. autobusu = f (kapacita batériových boxov, počet batériových boxov, spotreba klimatizácie)

drsnosť = f (rýchlosť, posuv, hĺbka rezu)

životnosť rezných doštičiek = f (rezná rýchlosť, hĺbka rezu, posuv)

cena monitoru = f (uhlopriečka, obnovovacia frekvencia, rozlíšenie)

sila potrebná pri CNC obrábaní kovov = f (uhol, matrica, hrúbka kovovej platne)

teplota vody = f (objem, výkon mikrovlnky, čas)

životnosť brúsneho papiera = f (rezná rýchlosť, otáčky brúsneho vretena, hĺbka rezu)

rýchlosť zvárania = f (priemer zv. drôtu, rýchlosť prúd. drôtu, prúd)

skóre aktivity = f (prejdená vzdialenosť, tep, spotrebované kalórie)

rýchlosť bicykla = f (veľkosť kolies, hrúbka kolies, počet zubov rozety)

cena smartfónu = f (RAM, uhlopriečka displeja, interné úložisko, počet jadier procesora, počet fotoaparátov, obnovovacia frekvencia displeja, kapacita batérie, hmotnosť, hrúbka, megapixely, podpora 5G)

pretečený plyn = f (priemer elektródy, prúd, hrúbka)

pevnosť v ťahu pri 3D tlači = f (percento plniva, hrúbka frakcie, index toku)

množstvo materiálu pri 3D tlači = f (priemer trysky, rýchlosť tlače, teplota tavenia)

pevnosť v ťahu pri patentovaní drôtov = f (obsah uhlíka, teplota olova, rýchlosť)

čistý zisk z predaja = f (výrobné náklady, náklady na propagáciu, cena predaného výrobku, množstvo predaných výrobkov, investovanie do vývoja nových výrobkov)

zváranie MAG = f (prietok, akt. plynu, prúd)

rýchlosť rezania = f (priemer kotúča, počet zubov, otáčky)

spotreba = f (veľkosť pneumatiky, šírka pneumatiky, tlak v pneumatike)

ťažnosť drôtu = f (teplota olova, expozičná doba v kúpeli, nosnosť vstupného materiálu)

rýchlosť rozpúšťania = f (teploty vody, rýchlosť miešania, plocha povrchu)

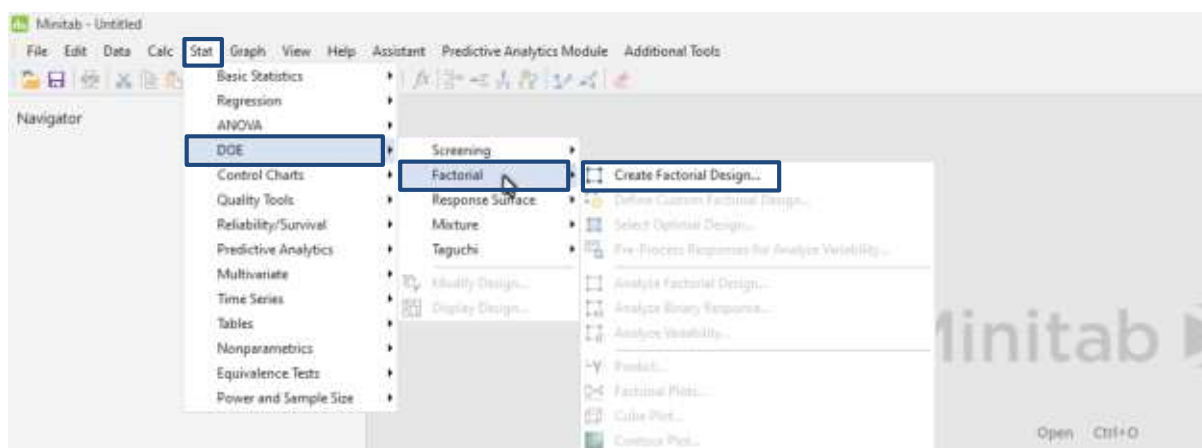
permeabilita pri úprave vody = f (pH NaOH, čas pôsobenia NaOH, čas pôsobenia H₂SO₄)

PRÍLOHA C

Návrh a vyhodnotenie DOE v softvéri Minitab pre úplný faktorový experiment n^k

Uvažujme o experimente typu 2^3 s dvoma replikáciami v každom bode (riešený príklad nitridové leptanie plazmových doštičiek). V Minitabe nasledujúcim spôsobom vytvoríme plán experimentu, doplníme namerané hodnoty a spustíme analýzu dát.

Výberom v hlavnom menu z ponuky Stat_DOE si zvolíme faktorový experiment, t. j. zvolíme Factorial s možnosťou Create Factorial Design...



Obr. 1 Výber faktorového experimentu z ponuky DOE

V dialógovom okne volíme typ experimentu, t. j. 2 úrovňový s tromi faktormi, obr. 2.

Minitab ponúka prehľad vhodných a nevhodných typov experimentu podľa počtu faktorov a korešpondujúceho rozlíšenia.

Tu volíme počet faktorov 2.

V položke Designs volíme:

- typ experimentu úplný alebo čiastočný;
- počet centrálnych bodov, resp. počet replikácií v centrálnom bode;
- počet replikácií vo faktorových bodoch;
- počet blokov.

Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Available Resolution III Fractional Factorial Designs

Factors	Runs	Factors	Runs	Factors	Runs
2-7	12, 20, 24, 28, ..., 48	20-22	24, 28, 32, 36, ..., 48	30-36	40, 44, 48
8-11	12, 20, 24, 28, ..., 48	24-27	28, 32, 36, 40, 44, 48	40-43	44, 48

Create Factorial Design: Designs

Designs	Runs	Resolution	$2^{k-(k-p)}$
1/2 fraction	4	III	$2^{3-(3-1)}$
Full factorial	8	Full	2^{-3}

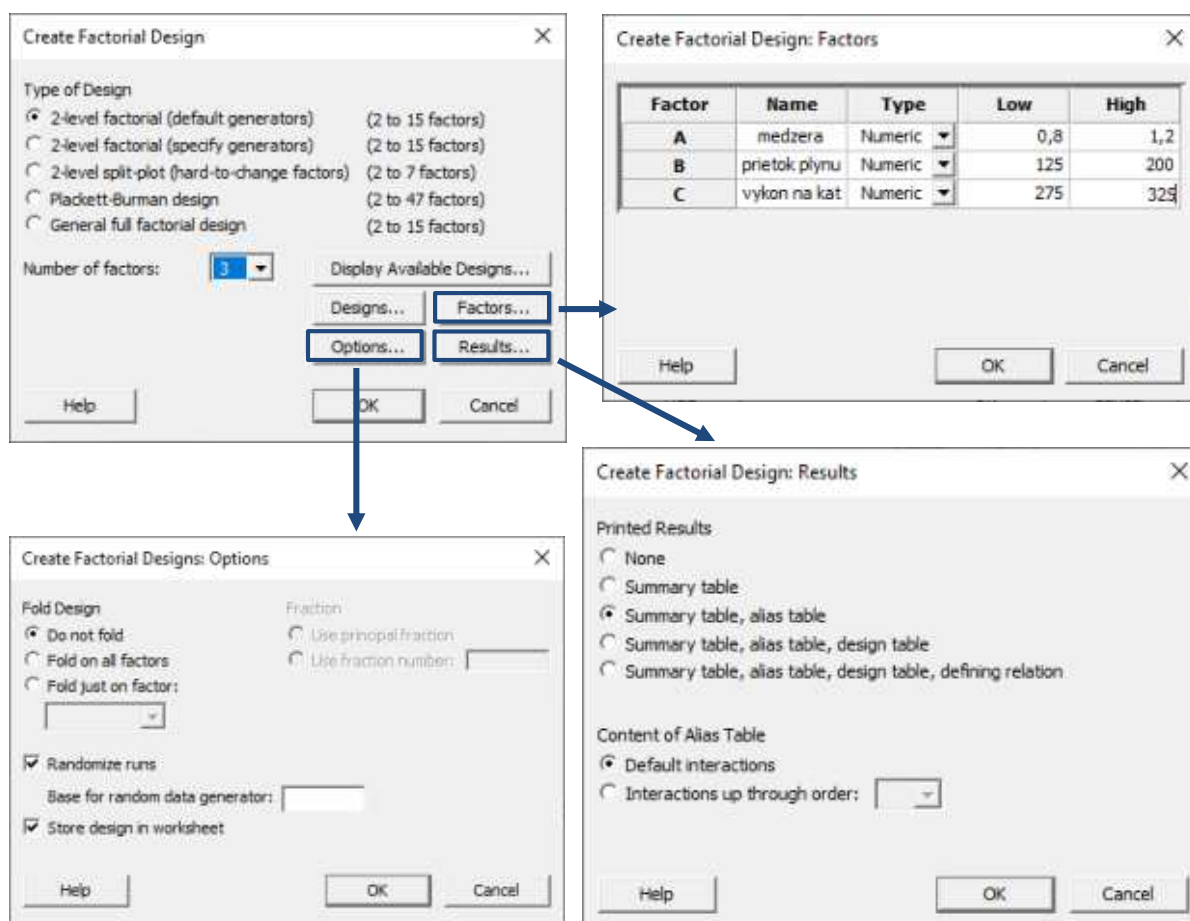
Number of center points per block: 0
Number of replicates for corner points: 2
Number of blocks: 1

Obr. 2 Výber typu experimentu, voľba počtu faktorov, úrovni, počtu replikácií, počtu meraní v centrálnom bode a počtu blokov

V ďalšom kroku (obr. 3) sú v dialógovom okne **Create Factorial Design** po zadaní parametrov z predchádzajúceho kroku sprístupnené ďalšie položky. V okne **Create Factorial Design** je potrebné v položke **Factors** definovať faktory, ich dolnú a hornú úroveň, zadať typy faktorov. Kvantitatívne premenné sú označené Numeric. Kvalitatívne premenné majú označenie Text.

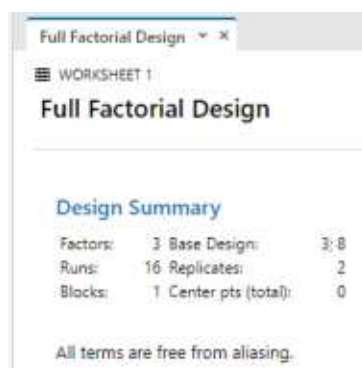
V položke **Options** určíme, či pridávame body plánu experimentu k predchádzajúcemu plánu (napr. budujeme zložitejší model) alebo začíname novým experimentom, či volíme náhodné poradie experimentálnych bodov (randomizáciu) alebo chceme zobrazit' plán experimentu v pôvodnom poradí.

V položke **Results** volíme typ zobrazenia výsledkov...



Obr. 3 Zadávanie položiek *Factors*, *Options* a *Results*

Minitab poskytne výstup so zápisom nadefinovaných parametrov experimentu v nasledujúcom tvare na obr. 4.



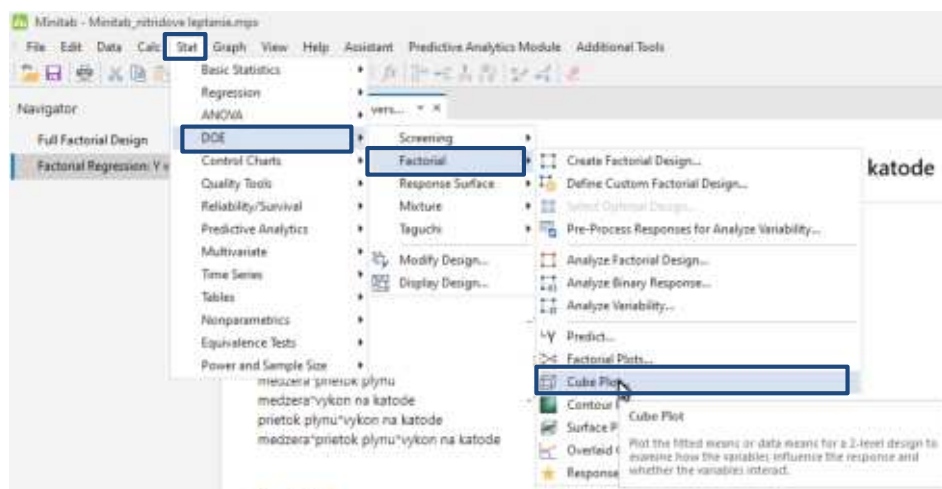
Obr. 4 Výpis Minitabu

Okrem zhrnutia zadaných údajov (počet faktorov 3, počet bodov experimentu 8, počet replikácií 2, počet meraní zohľadňujúci počet replikácií v každom bode označený Runs 16) výpis obsahuje plánu experimentu v pracovnom liste na obr.5. Stĺpce C1 a C2 označujú poradie randomizované a pred randomizáciou. Stĺpec C3 hovorí, že experiment neobsahuje centrálné body (bývajú označené 0). Stĺpec C4 hovorí, že všetky merania sa budú realizovať v jednom bloku. Stĺpce C5 a C6 predstavujú vygenerované kombinácie úrovní faktorov, t. j. jednotlivé body plánu experimentu, pri ktorých je potrebné urobiť merania. K tomuto plánu experimentu je potrebné doplniť stĺpec (C8) s nameranými hodnotami odozvie Y.

↓	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
	StdOrder	RunOrder	CenterPt	Blocks	medzera	prietok plynu	vykon na katode	Y
1	14	1	1	1	1,2	125	325	868
2	4	2	1	1	1,2	200	275	642
3	6	3	1	1	1,2	125	325	749
4	2	4	1	1	1,2	125	275	650
5	11	5	1	1	0,8	200	275	601
6	5	6	1	1	0,8	125	325	1037
7	1	7	1	1	0,8	125	275	604
8	7	8	1	1	0,8	200	325	1063
9	13	9	1	1	0,8	125	325	1052
10	16	10	1	1	1,2	200	325	860
11	10	11	1	1	1,2	125	275	669
12	15	12	1	1	0,8	200	325	1075
13	12	13	1	1	1,2	200	275	635
14	3	14	1	1	0,8	200	275	633
15	8	15	1	1	1,2	200	325	729
16	9	16	1	1	0,8	125	275	550

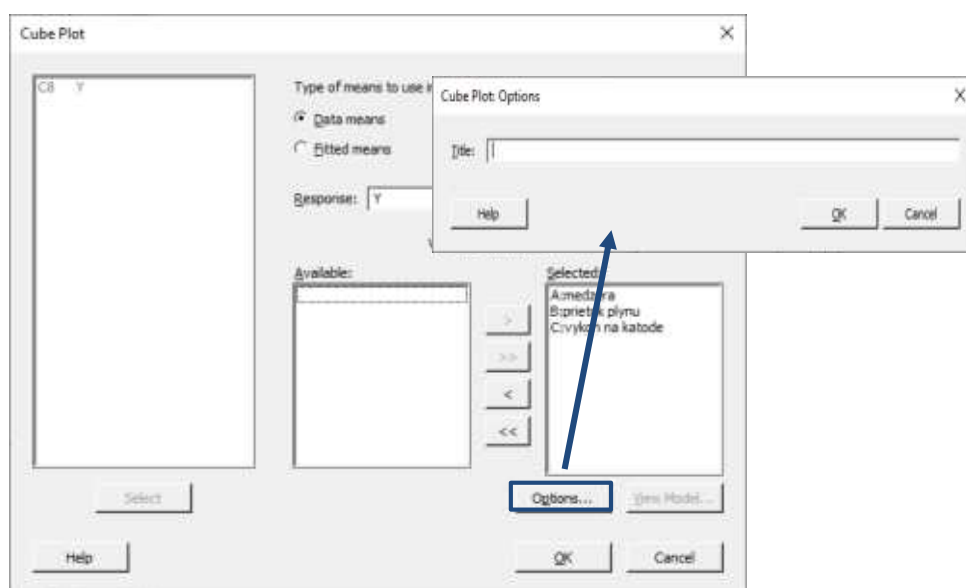
Obr. 5 Vygenerovaný plán experimentu s doplnením nameraných hodnôt odozvy

Na grafické zobrazenie priemeru nameraných hodnôt alebo predikovaných hodnôt používame ponuku Cube Plot na obr. 6.



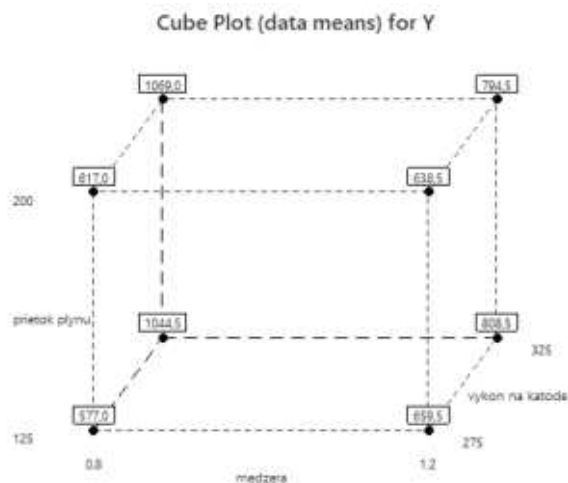
Obr. 6 Postupnosť krokov pri zadávaní zobrazenia Cplot z nameraných hodnôt

Okno Cube Plot vyžaduje zadanie hodnoty, ktorú chceme zobraziť, t. j. vyberáme priemer nameraných odoziev (Data means) alebo predikované hodnoty (Fitted means). Pri zadávaní premennej do odozvy vyberáme z ponuky v ľavom okne výberom označenej premennej a potvrdením cez Select alebo dvojklikom ľavého tlačidla myši. V časti **Variables to Include in Plots** zadávame, ktoré faktory chceme v grafe zobraziť (výber z ponúkaných má význam najmä pri veľkom počte faktorov). V našom prípade nechávame všetky 3 faktory. Options ponúka doplniť názov Cplotu.



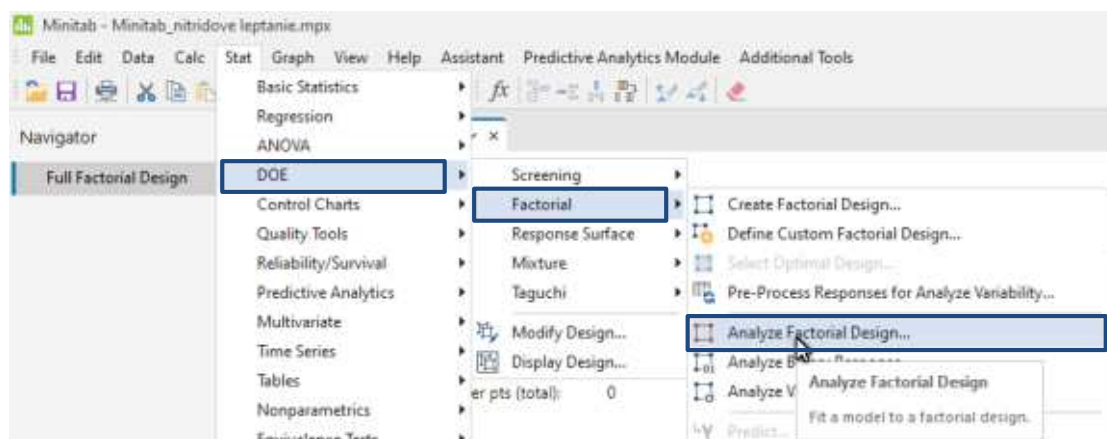
Obr. 7 Dialógové okno pre Cplot

Výsledný Cplot so zvoleným vypočítaným priemerom nameraných hodnôt vo faktorových bodoch je na obr. 8. Z tohto typu grafu je možné vidieť rozloženie bodov v experimentálnom priestore, v ktorých bolo realizované meranie.



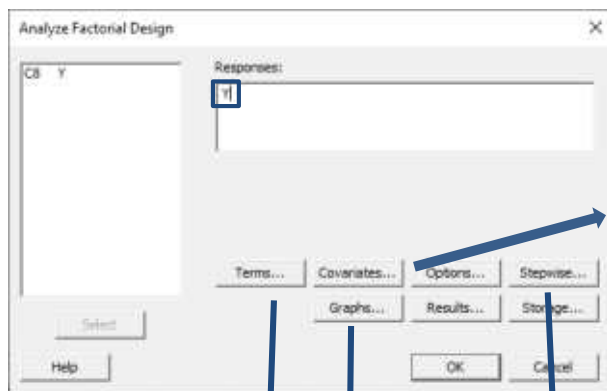
Obr. 8 Cplot ako výstup Minitabu

Po zadaní nameraných hodnôt odozvy je možné spustiť analýzu faktorového experimentu. Postupnosť krokov pri spustení analýzy je na obr. 9.



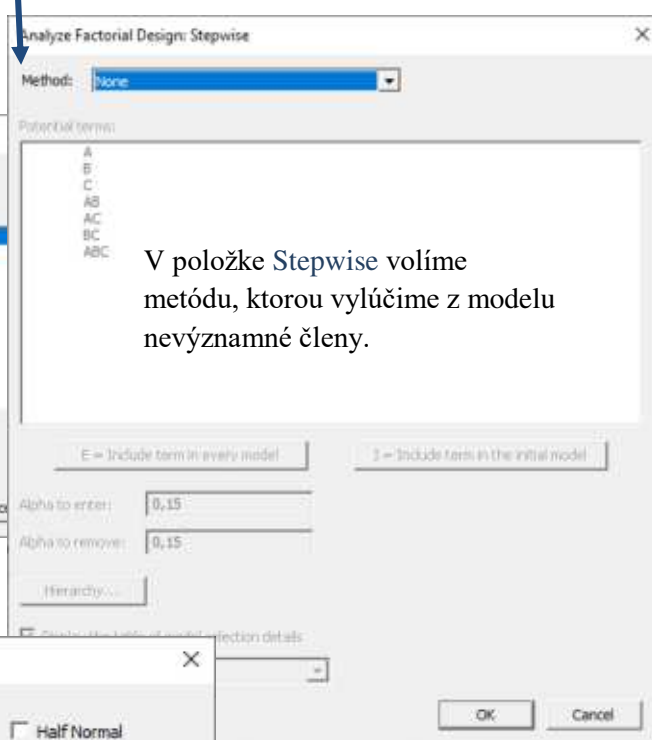
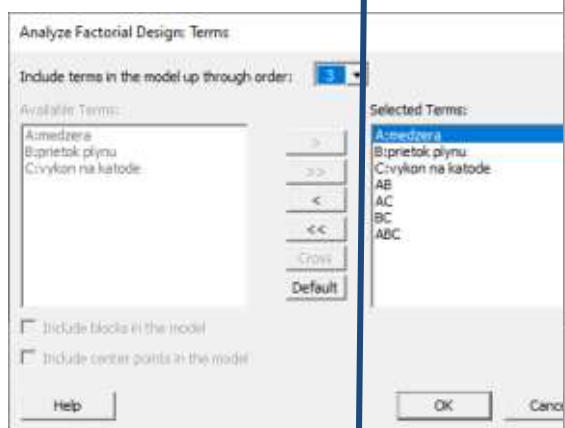
Obr. 9 Postupnosť krokov pri zadávaní analýzy nameraných hodnôt

Dialógové okno **Analyze Factorial Design** obsahuje prvky na definovanie odozvy, t. j. závislej premennej. V prípade viacerých sledovaných závislých premenných zapísaných do plánu experimentu sa spracovanie výsledkov robí vždy pre každú osobitne. Všetky ostatné nastavenia s požiadavkami na výstup, napr. typy grafov, metódy na získavanie hierarchického modelu, voľba kovariátov sú naznačené na obr. 10. Robíme výber cez nastavenie tlačidiel v okne **Analyze Factorial Design**.

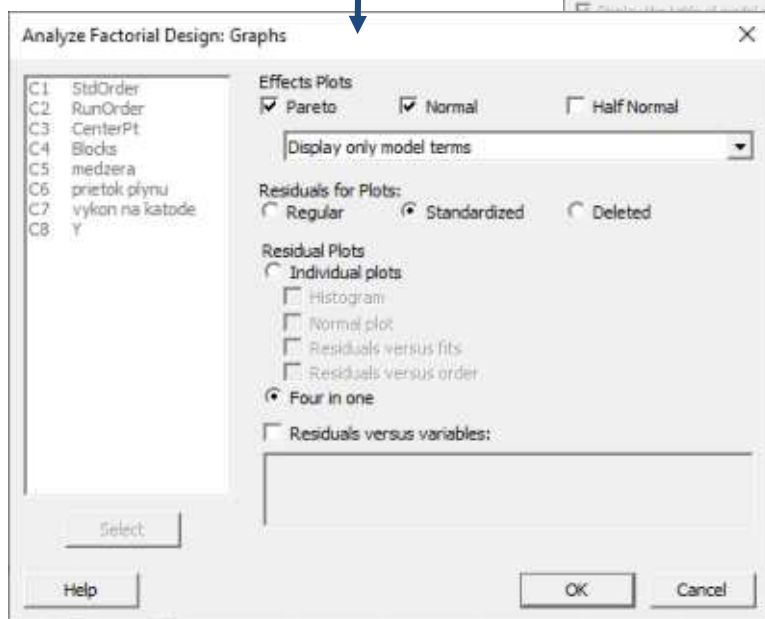


Terms: Volíme členy v regresnom modeli, t. j. zadáme faktory a uvažované interakcie.

Kovariát je kvantitatívna premenná, ktorú počas experimentu cielene nemeníme, ale je možné ju merať (teplota okolia, vlhkosť, tlak, sieťové napätie.....). Model umožňuje kovariáty zahrnúť a upraviť ako vstupné premenné, ktoré boli merané, ale neboli randomizované alebo kontrolované v experimente. Pridanie kovariátov môže výrazne zlepšiť presnosť modelu a ovplyvniť konečné výsledky analýzy. Ich zahrnutie do modelu môže znížiť chybu v modeli a zvýšiť tak silu faktorových testov.



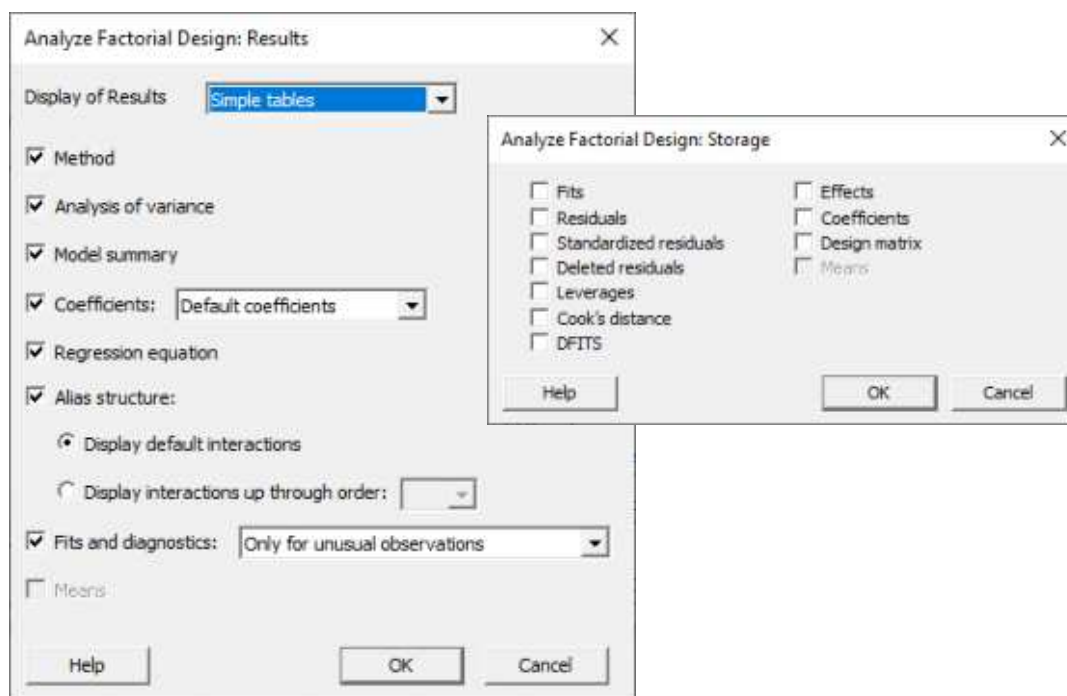
V položke Stepwise volíme metódu, ktorou vylúčime z modelu nevýznamné členy.



V ponuke Graphs zadávame požadované grafické výstupy (Pareto graf, normálny pravdepodobnostný graf, graf rezíduí).

Obr. 10 Zadávanie požiadaviek na výstup analýzy nameraných hodnôt

Výstup vieme zobrazit' v jednoduchnej alebo rozšírenej tabuľke v ponuke **Result**. Zadáваме požadované štatistiky, ktoré chceme ďalej spracovávať.



Obr. 11 Dialógové okno ponuky Results pri zadávaní požiadaviek na analýzu nameraných hodnôt pri faktorovom experimente

Výstup analýzy v Minitabe možno rozdeliť na štyri časti. V časti **Coded Coefficients** sú vypočítané hodnoty efektov, bodové odhady koeficientov regresného modelu, štandardné chyby bodového odhadu týchto odhadov, prislúchajúce hodnoty testovacej štatistiky t-testu a p-hodnoty. Tabuľka **Model Summary** obsahuje index determinácie, upravený index determinácie a index determinácie vzťahujúci sa na predikciu. Tabuľka **ANOVA** umožňuje posúdiť štatistickú významnosť regresného modelu, príspevok lineárnych členov, interakcií 2. i 3. rádu. Rovnica regresného modelu je uvedená v nekódovaných (pôvodných) jednotkách – bodové odhady regresných koeficientov boli spätne transformované na pôvodné jednotky.

Výstup analýzy nameraných hodnôt odozvy v prvej fáze vyhodnotenia obsahuje aj členy, ktoré nie sú signifikantné a možno ich z modelu alebo ďalšieho skúmania vylúčiť. Výstup Minitabu je v nasledujúcom tvare (obr. 12).

Factorial Regression: Y versus medzera; prietok plynu; výkon na katode

Coded Coefficients

Term	Effect	Coef	SE Coef	T-Value	P-Value	VIF
Constant		776,1	11,9	65,41	0,000	
medzera	-101,6	-50,8	11,9	-4,28	0,003	1,00
prietok plynu	7,4	3,7	11,9	0,31	0,764	1,00
vykon na katode	306,1	153,1	11,9	12,90	0,000	1,00
medzera*prietok plynu	-24,9	-12,4	11,9	-1,05	0,325	1,00
medzera*vykon na katode	-153,6	-76,8	11,9	-6,47	0,000	1,00
prietok plynu*vykon na katode	-2,1	-1,1	11,9	-0,09	0,931	1,00
medzera*prietok plynu*vykon na katode	5,6	2,8	11,9	0,24	0,819	1,00

Model Summary

S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)
47,4612	96,61%	93,64%	86,44%

Analysis of Variance

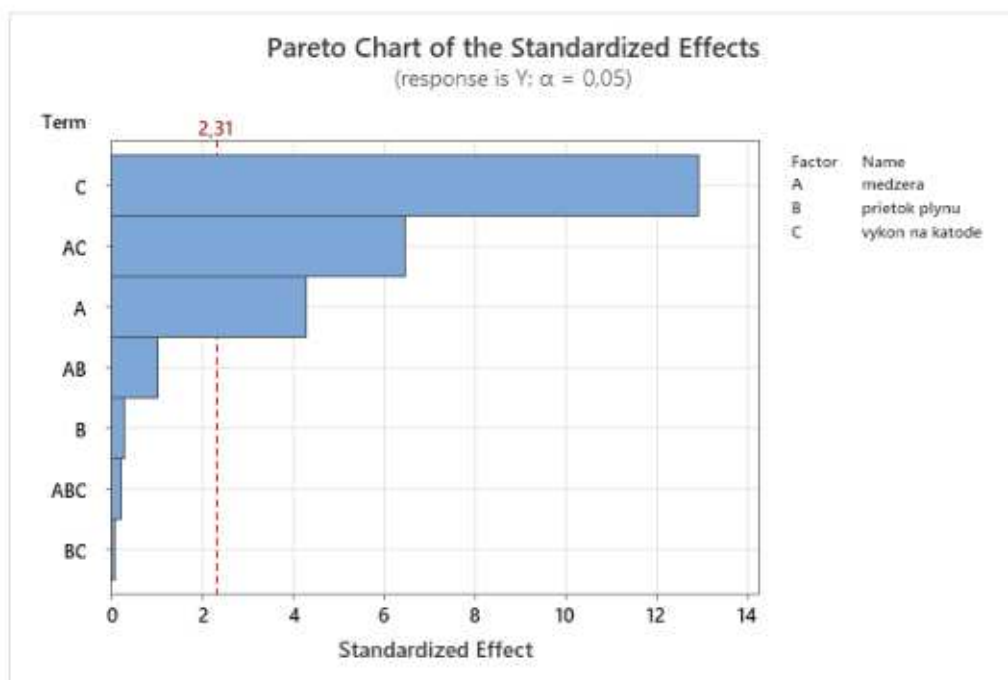
Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	7	513400	73343	32,56	0,000
Linear	3	416378	138793	61,62	0,000
medzera	1	41311	41311	18,34	0,003
prietok plynu	1	218	218	0,10	0,764
vykon na katode	1	374850	374850	166,41	0,000
2-Way Interactions	3	96896	32299	14,34	0,001
medzera*prietok plynu	1	2475	2475	1,10	0,325
medzera*vykon na katode	1	94403	94403	41,91	0,000
prietok plynu*vykon na katode	1	18	18	0,01	0,931
3-Way Interactions	1	127	127	0,06	0,819
medzera*prietok plynu*vykon na katode	1	127	127	0,06	0,819
Error	8	18020	2253		
Total	15	531421			

Regression Equation in Uncoded Units

Y = -6487 + 5355 medzera + 6,6 prietok plynu + 24,1 vykon na katode
 - 6,2 medzera*prietok plynu - 17,8 medzera*vykon na katode
 - 0,0161 prietok plynu*vykon na katode + 0,0150 medzera*prietok plynu*vykon na katode

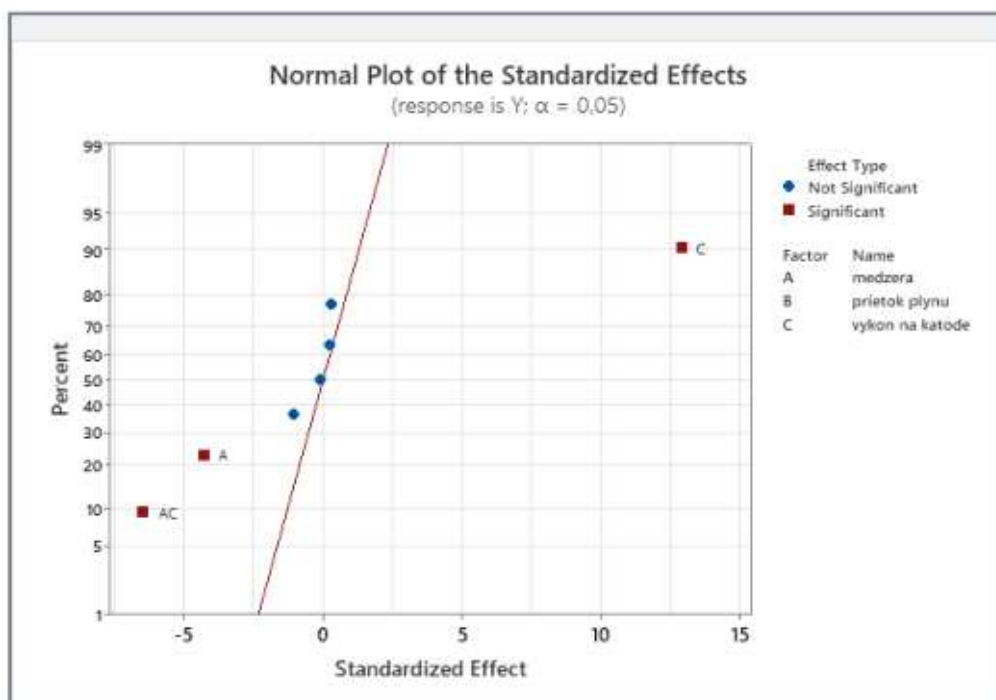
Obr. 12 Výstup analýzy nameraných hodnôt odozvy pozostáva zo štyroch častí – v prvej fáze vyhodnotenia obsahuje aj členy, ktoré nie sú signifikantné

V Pareto grafe na obr. 13 sú štandardizované efekty usporiadané podľa veľkosti zostupne.



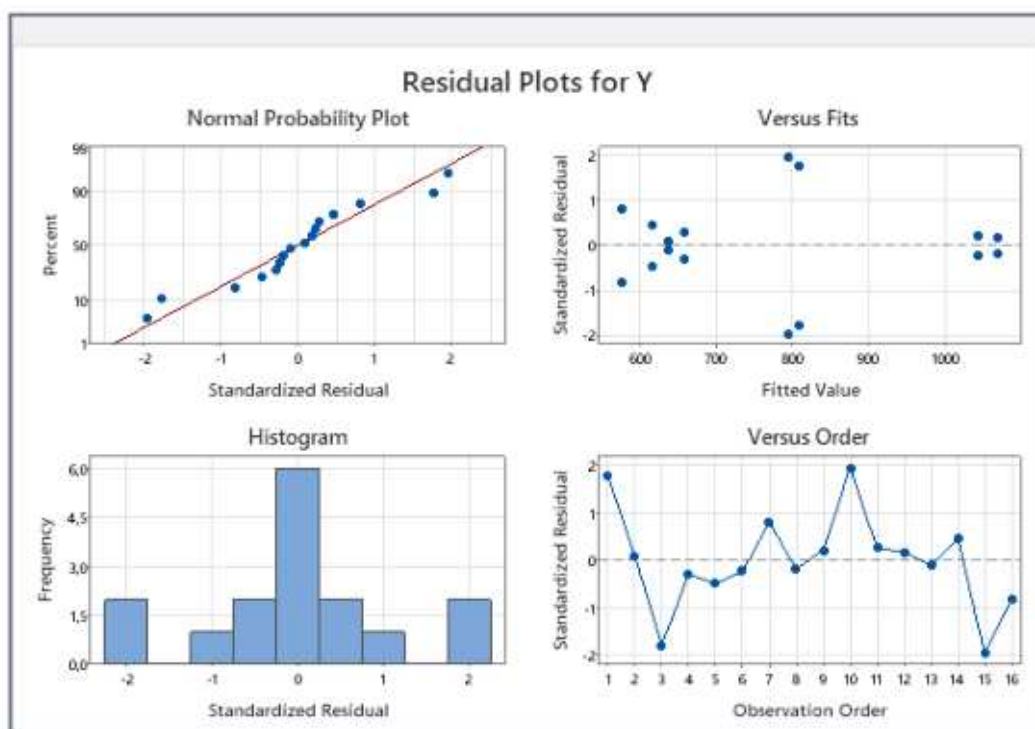
Obr. 13 Pareto graf štandardizovaných efektov

Normálny pravdepodobnostný graf zobrazuje významné efekty faktorov a ich interakcií. Tie, ktoré sú nevýznamné, ležia pozdĺž priamky.



Obr. 14 Normálny pravdepodobnostný graf štandardizovaných efektov

V grafe reziduí vizuálne kontrolujeme normalitu reziduí $N(0;\sigma^2)$ a ich nezávislosť.



Obr. 15 Graf reziduí

Model obsahuje aj členy, ktorých vplyv na odozvu nie je signifikantný. Opätovným výberom ponuky [Analyze factorial design](#) volíme metódu Backward elimination a hladinu významnosti pri voľbe hierarchického modelu.



Obr. 16 Voľba spätnej eliminačnej metódy pri vylúčení nesignifikantných členov

Výstup Minitabu pre hierarchický model je obr. 17.

Factorial Regression: Y versus medzera; prietok plynu; výkon na katode

Backward Elimination of Terms

α to remove = 0,05

Coded Coefficients

Term	Effect	Coef	SE Coef	T-Value	P-Value	VIF
Constant		776,1	10,4	74,46	0,000	
medzera	-101,6	-50,8	10,4	-4,88	0,000	1,00
vykon na katode	306,1	153,1	10,4	14,69	0,000	1,00
medzera*vykon na katode	-153,6	-76,8	10,4	-7,37	0,000	1,00

Model Summary

S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)
41,6911	96,08%	95,09%	93,02%

Analysis of Variance

Source	DF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value
Model	3	510563	170188	97,91	0,000
Linear	2	416161	208080	119,71	0,000
medzera	1	41311	41311	23,77	0,000
vykon na katode	1	374850	374850	215,66	0,000
2-Way Interactions	1	94403	94403	54,31	0,000
medzera*vykon na katode	1	94403	94403	54,31	0,000
Error	12	20858	1738		
Lack-of-Fit	4	2837	709	0,31	0,860
Pure Error	8	18021	2253		
Total	15	531421			

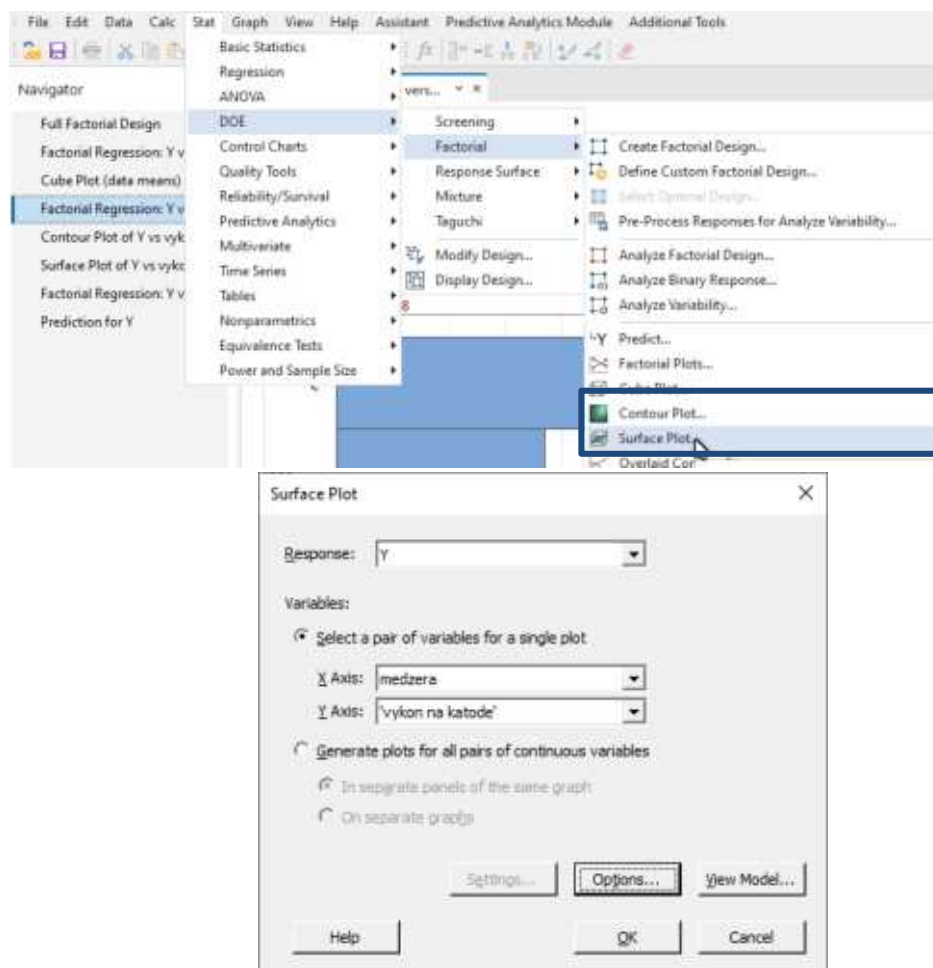
Regression Equation in Uncoded Units

$Y = -5415 + 4355 \text{ medzera} + 21,48 \text{ vykon na katode} - 15,36 \text{ medzera*vykon na katode}$

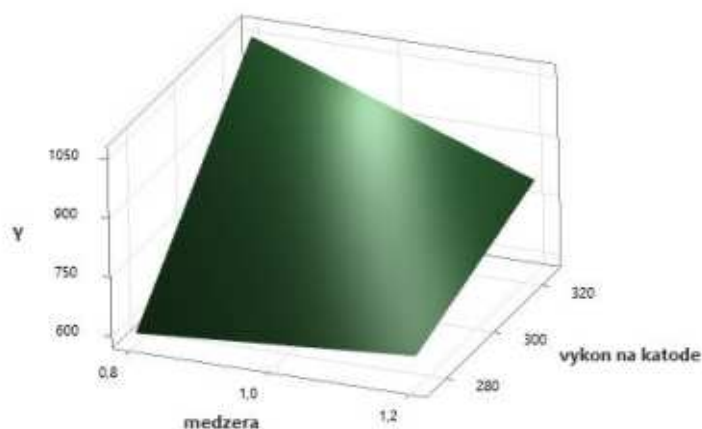
Obr. 17 Výstup analýzy po vylúčení členov, ktoré nie sú signifikantné

Po vylúčení prietoku plynu a všetkých interakcií s týmto faktorom je možné zobrazenie 3D grafu, t. j. získanej odozvovej plochy a vrstevnicového grafu (Contour Plot) .

Zadávanie postupnosti príkazov pri zobrazení 3D grafu (výber **Surface Plot**) s výstupom je zobrazený na obr. 18.

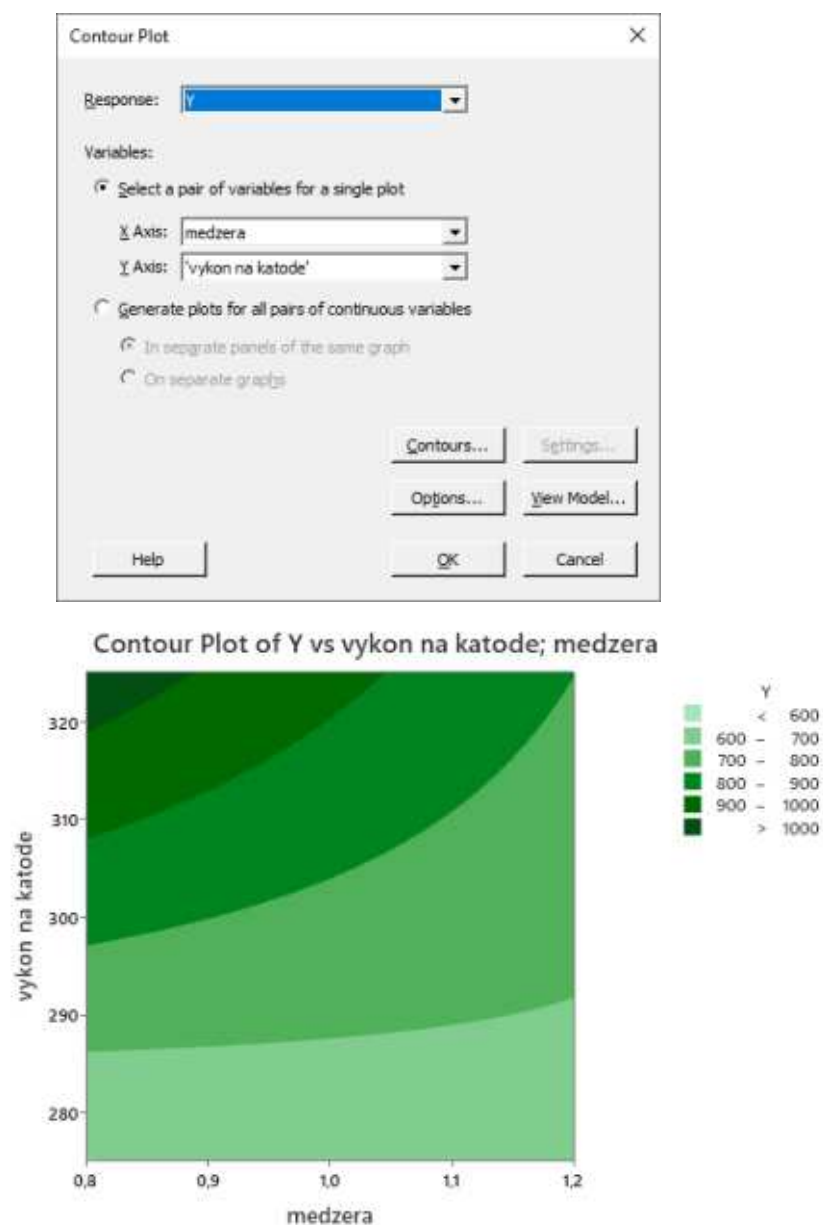


Surface Plot of Y vs vykon na katode; medzera



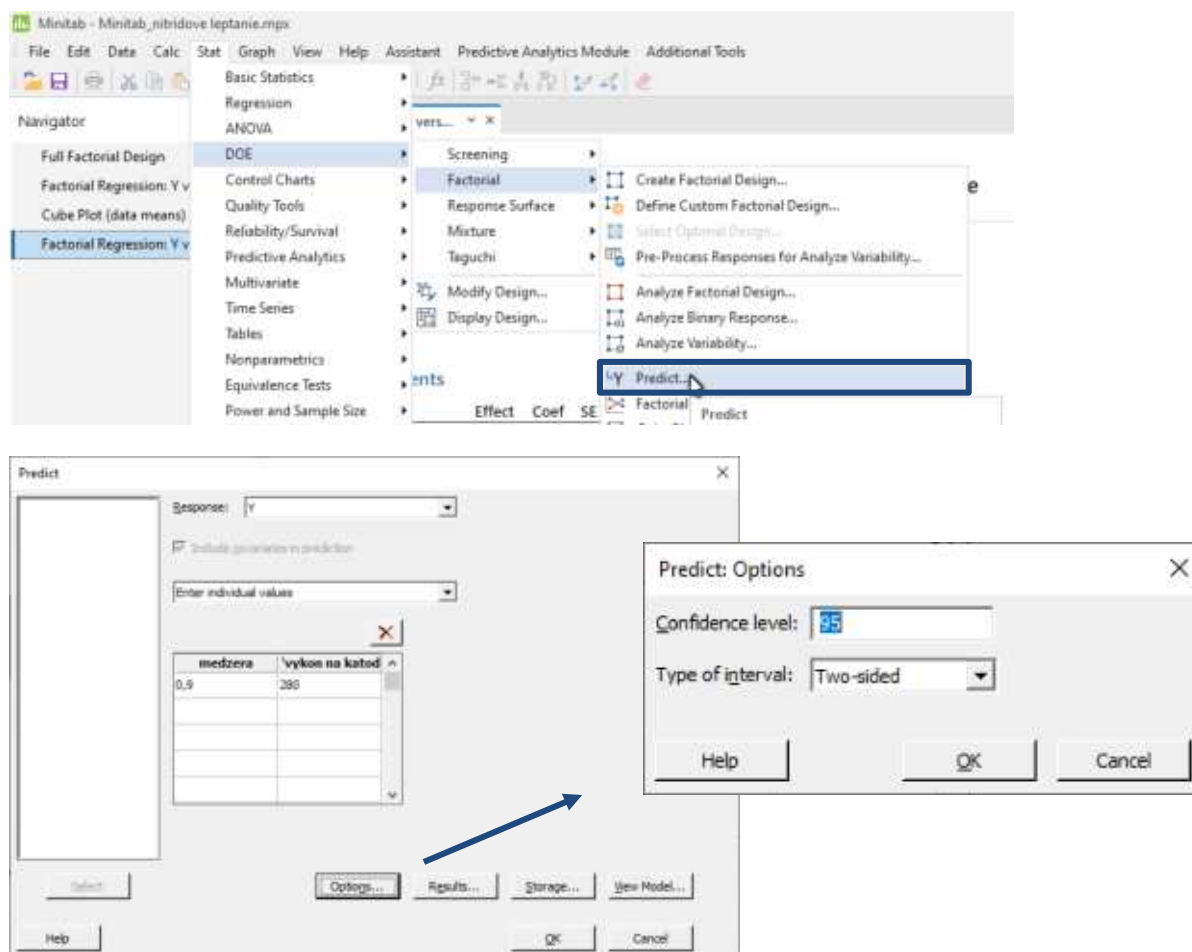
Obr. 18 Postupnosť príkazov pri zobrazovaní 3D grafu s výstupom

K tejto odozvovej ploche je možné zobrazit' zodpovedajúci vrstevnicový graf pomocou ponuky **Contour Plot**, vid'. obr. 19.



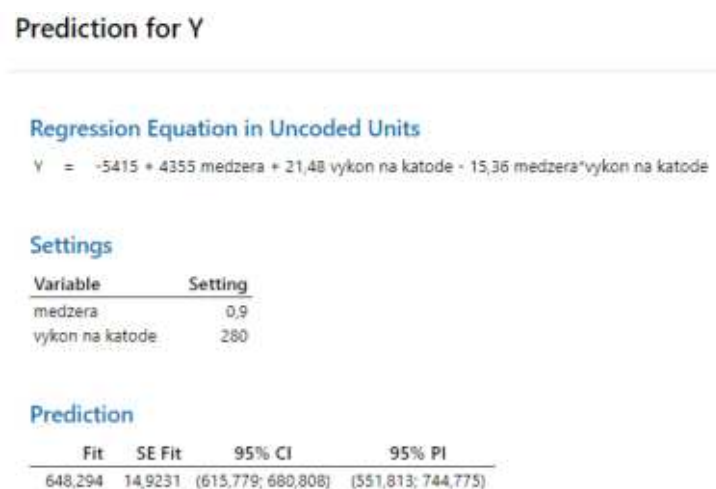
Obr. 19 Vrstevnicový graf pre danú odozovú plochu

Získaný regresný model je možné použiť na predikciu rýchlosti nitridového leptania pre nami zvolené úrovne faktorov medzera a výkon na katóde.



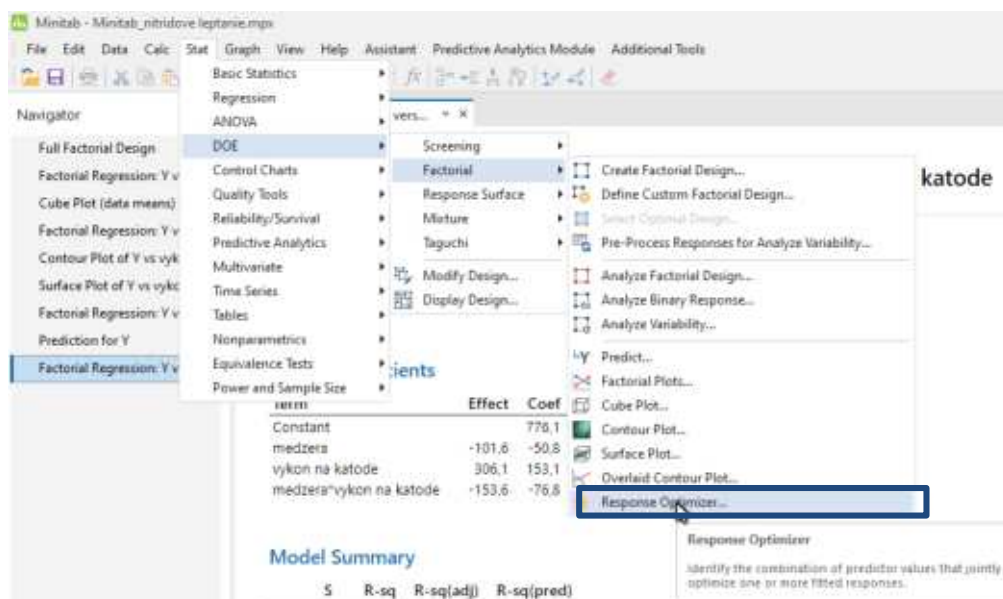
Obr. 20 Zadávanie výpočtu predikovanej hodnoty pre zvolené hodnoty vstupov (faktorov)

Výstup Minitabu je v nasledujúcom tvare (obr.21):



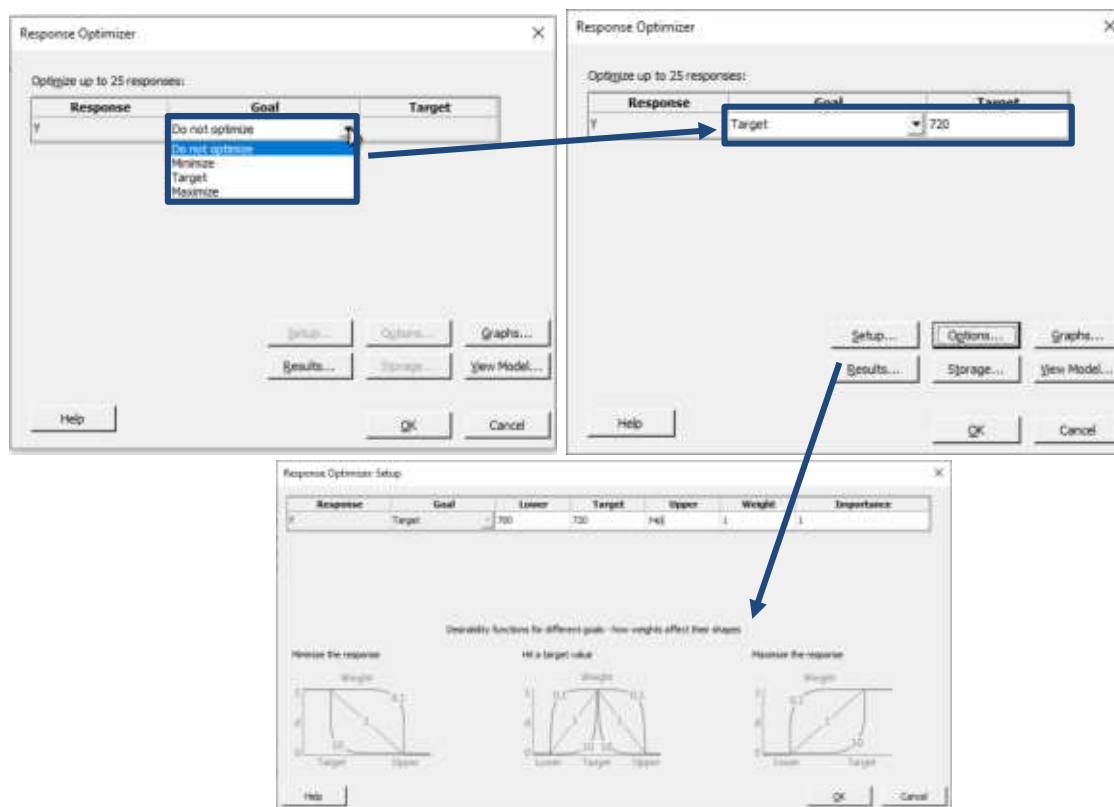
Obr. 21 Výstup s výsledkami pre predikciu

Regresný model možno použiť na výpočet optimálneho riešenia. Pri požadovanej hodnote odozvy vieme nájsť zodpovedajúce úrovne sledovaných faktorov.



Obr. 22 Postupnosť príkazov pri hľadaní optimálneho riešenia

V dialógovom okne volíme požadované riešenie, v našom prípade volíme rýchlosť nitrídového leptania $720 \cdot 10^{-10}$ m/min.

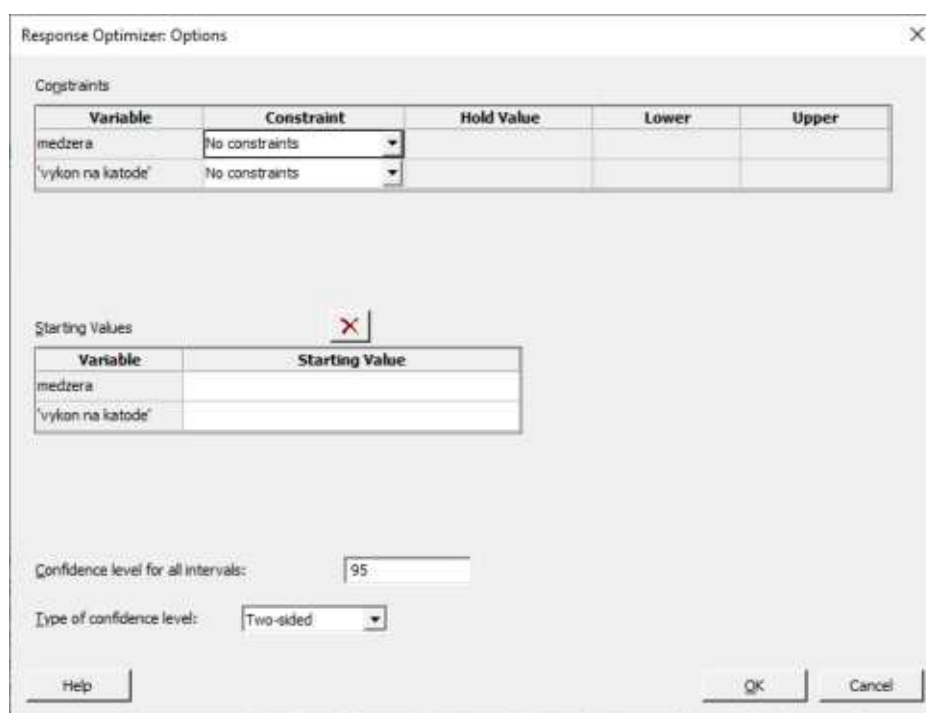


Obr. 23 Zadávanie požiadaviek na požadovanú (cieľovú) hodnotu odozvy

V ponuke **Options** je možné voliť obmedzenia, obr. 24. Podľa vrstevnicového grafu sa požadované hodnoty odozvy nenachádzajú iba na okraji experimentálneho priestoru, preto necháme podmienky hľadania riešenia bez obmedzení.

Ak by sme úrovne faktorov zadávali v kódovaných hodnotách, volili by sme obmedzenia faktorov -1 a 1.

Je možné hľadať optimálne riešenie aj v prípade viacerých závislých premenných. V tom prípade volíme pre každú odozvu konkrétne požiadavky, t. j. minimálnu, maximálnu alebo požadovanú konkrétnu hodnotu.



Response Optimizer: Options

Constraints

Variable	Constraint	Hold Value	Lower	Upper
medzera	No constraints			
'vykon na katode'	No constraints			

Starting Values

Variable	Starting Value
medzera	
'vykon na katode'	

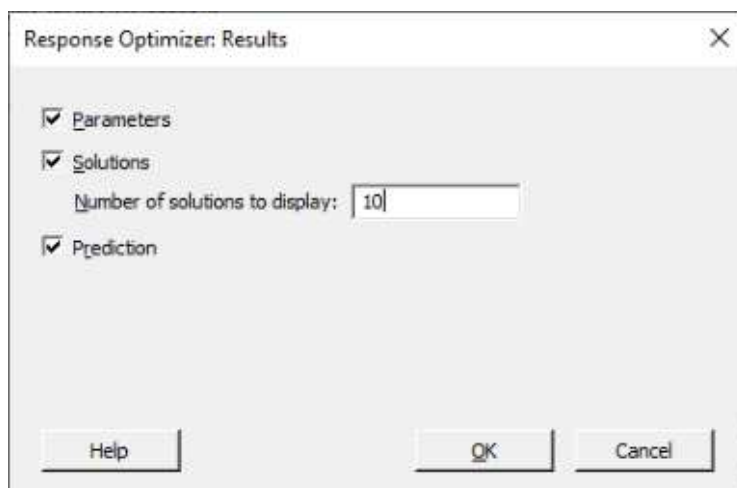
Confidence level for all intervals: 95

Type of confidence level: Two-sided

Help OK Cancel

Obr. 24 Okno pre zadávanie obmedzení pre faktory

Zadáваме počet riešení, ktoré chceme zobrazit', obr. 25.



Response Optimizer: Results

☒ Parameters

☒ Solutions

Number of solutions to display: 10

☒ Prediction

Help OK Cancel

Obr. 25 Okno pre zadávanie požiadaviek na výsledky

Minitab našiel 5 rôznych riešení. Prvé z nich je veľmi podobné riešeniu, ktoré sme vypočítali v Exceli, vid' riešený príklad z nitrídového leptania v kap. 8.

Response Optimization: Y

Parameters						
Response	Goal	Lower	Target	Upper	Weight	Importance
Y	Target	700	720	740	1	1

Solutions

Solution	medzera	vykon na katode	Y Fit	Composite Desirability
1	1,01487	291,129	720	1
2	1,19617	297,998	720	1
3	1,20000	298,279	720	1
4	0,81020	288,462	720	1
5	0,92991	289,739	720	1

Multiple Response Prediction

Variable	Setting
medzera	1,01487
vykon na katode	291,129

Response	Fit	SE Fit	95% CI	95% PI
Y	720,0	11,1	(695,8; 744,2)	(626,0; 814,0)

Obr. 26 Nájsené optimálne riešenia (všetky sú vzhľadom na hodnotu Desirability funkcie rovnako vhodné)

Autori: PaedDr. Janette Kotianová, PhD.
Názov: Matematické metódy plánovania a vyhodnocovania
experimentu
Mathematical Methods of Experiment Planning
and Evaluation
Miesto vydania: Trnava
Vydavateľ: Materiálovotechnologická fakulta STU, Vydavateľstvo
AlumniPress
Rok vydania: 2025
Vydanie: prvé
Rozsah: 239 strán (17,80 AH, 243 obrázkov, 7 tabuliek)
Edičné číslo: 2/AP/2025

ISBN 978-80-8096-310-1
EAN 9788080963101