

PLÁNOVANIE A VYHODNOCOVANIE EXPERIMENTU

- metóda založená na vopred určenej zmene hodnôt vstupov a hodnotení ich pôsobenia na výstup

Experiment ako nástroj hľadania

ovplyvňujúce vstupné faktory

(materiál, teplota, koncentrácia, napätie, dodávateľ ...)

experimentálny šum

(náhodné vplyvy - sú prítomné v každom procese a spôsobujú variabilitu výsledkov i pri zachovaní úrovni všetkých identifikovaných faktorov)



Úlohou experimentu je ich objasniť neznáme vzťahy medzi vstupmi a výstupmi v procese.

Ideálny prípad: matematický model popisujúci fyzikálne zákony (Planckov zákon žiarenia).

V priemyselnej praxi stačí jednoduchší matematický model (platí iba na obmedzenom intervale hodnôt vstupov a nie je odvodený z fyzikálnych zákonov).

Použitie plánovaného experimentu v súčasnej praxi

- výrobný proces - automobilový a letecký priemysel, strojárstvo....:
 - inžiniersky dizajn – návrhy optimálnej geometrie,
 - zlepšovanie kvality – rôzne typy optimalizácií,
 - priemyselný výskum a výroba – optimálne nastavenie výrobných premenných,
- základný výskum v oblasti fyziky, chémie a biológie,
- výskum v oblasti lekárskeho výskumu a farmaceutického priemyslu,
- výskum v oblasti spoločenských vied, psychológie,
- riadenia podniku a marketingového výskumu

Klasické vs. moderné DOE

metamodel (surrogate modelling)

neurónové siete

Výkonný nástroj v Six Sigma

DOE pri vývoji vakcíny

- Urýchlenie skríningu
- Podpora optimalizácie
- Zabezpečenie robustnej charakteristiky



<https://blog.umetrics.com/using-data-analytics-to-accelerate-covid-19-vaccine-development>

História:

1. anglický matematik **Ronald Fisher** - od r. 1919 spracovával 60-ročné výsledky Rothamstedskej kráľovskej poľnohospodárskej výzkumnej stanice - položil teoretické základy analýzy rozptylu a navrhovania experimentu – 2 knihy: *Štatistické metódy pre výzkumných pracovníkov* (7 rokov) , *Design of Experiments* (r. 1935)

2. **Plackett a Burman** – r. 1946 úsporné experimentálne návrhy, pri ktorom je počet pokusov násobkom 4 (testovanie leteckých púm vo VB, 22 faktorov)

3. **George E. P. Box** - 70. roky – niekoľko modelov, napr. Box-Jenkins models, Box-Cox transformace, Box-Behnken designs

4. **Douglas C. Montgomery**, štátna univerzita v Arizone, učebnica *Design and Analysis of Experiments* (r. 1976) dodnes využívaná nielen praktikmi, ale i tvorcami rôznych softwérov



5. **Genichi Taguchi** - zvyšovanie akosti výrobkov a procesov (pomer signál/šum) - pre verejnosť zrozumiteľná forma bez znalosti štatistiky – v Japonsku, USA, u nás v 90-tych rokoch v automobilovom priemysle.



Sir Ronald Fisher 1890 - 1962

„To call in the statistician after the experiment is done may be no more than asking him to perform a postmortem examination: he may be able to say what the experiment died of.“

„Pokud zavoláte statistika až po provedení experimentu, je to jako byste ho požádali o provedení pitvy. Možná vám řekne, na co pacient zemřel.“

DESIGN AND ANALYSIS OF **EXPERIMENTS**

SEVENTH EDITION

DOUGLAS C. MONTGOMERY



WILEY

The only way to know how a complex system will behave-after you modify it-is to modify it and see how it behaves.

George E. P. Box

“Chceme-li přesně určit, co se událo v procesu, jestliže jsme do něj zasáhli, musíme do něj zasahovat a ne jej pasivně pozorovat.” (George E. P. Box)

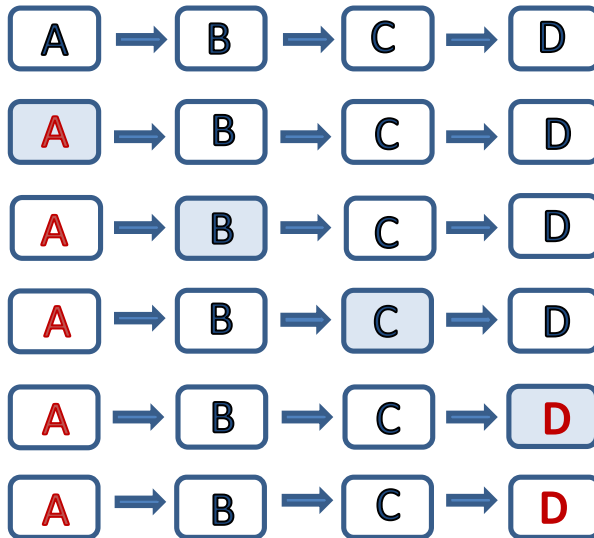
Jednofaktorová analýza

One Factor At aTime (OFAT)

Tradičný prístup: zmena jedného faktora, ostatné sú fixované

Postup:

1. Volíme postupnosť faktorov.
2. Meníme postupne vždy jeden faktor.
3. Ak vedie zmena úrovne faktora k „pozitívnej zmene“ odozvy, ponecháme ju a meníme ďalší faktor.
4. Ak výsledky nie sú lepšie, vrátime sa a meníme iný faktor.



Nevýhody:

Analýza sa zjednodušuje na „výber víťaza“ – nemusíme nájsť skutočné optimum.

Nie je možné zistiť interakcie medzi faktormi.

Jednofaktorová analýza

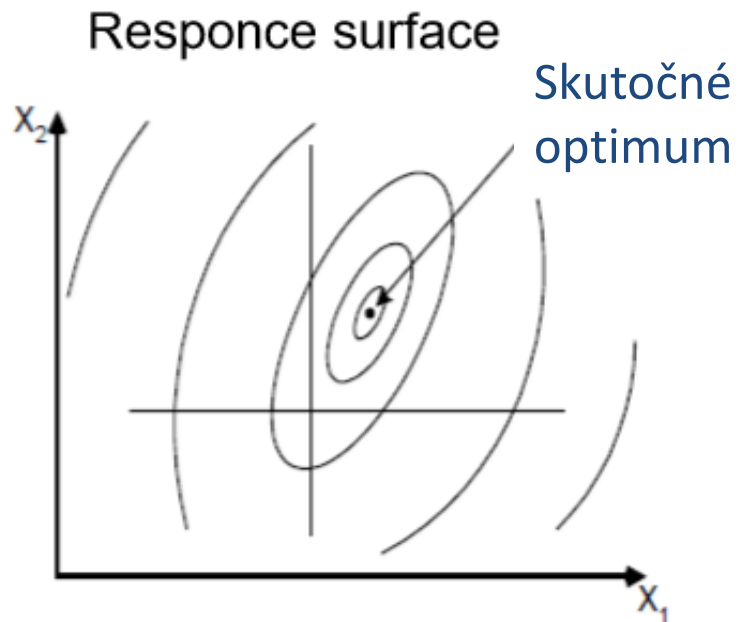
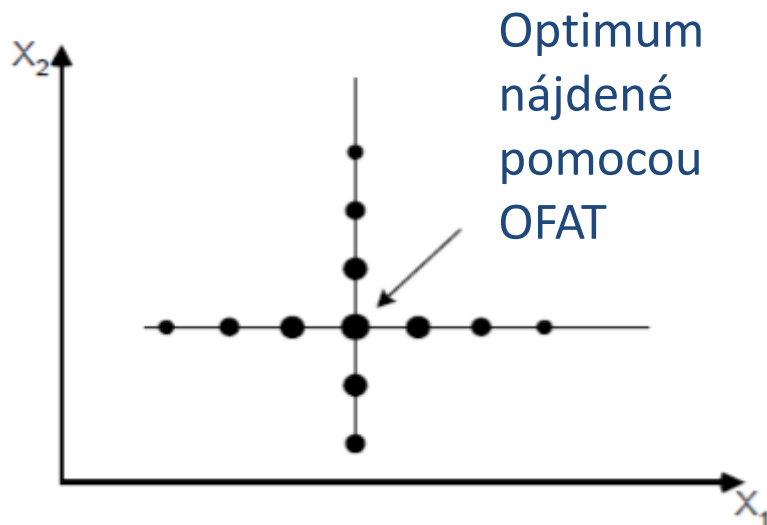
One Factor At aTime (OFAT)

OFAT: zmena jedného parametra, ostatné sú fixované

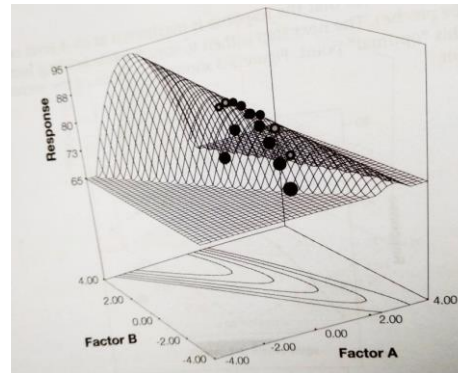
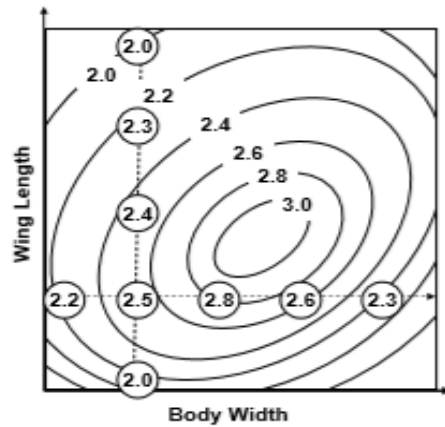
meníme x_1



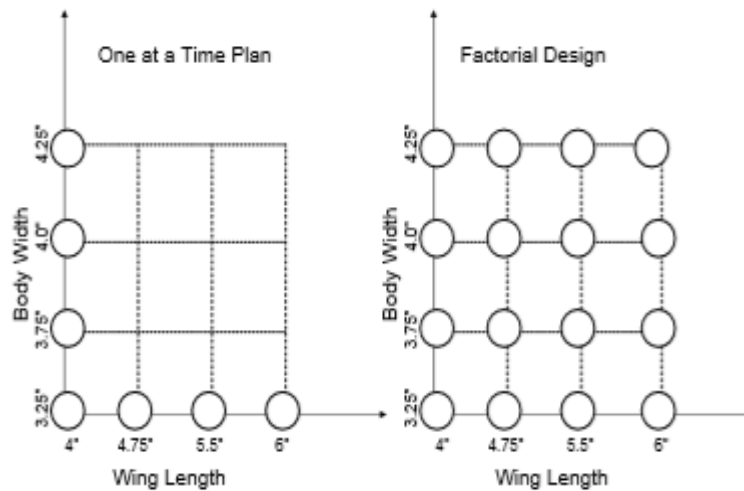
po nájdení optima meníme x_2



Jednofaktorová analýza One Factor At aTime (OFAT)



Porovnanie plánu pre One Factor At aTime (OFAT) a faktorový experiment



One Factor At aTime (OFAT) pre tri faktory

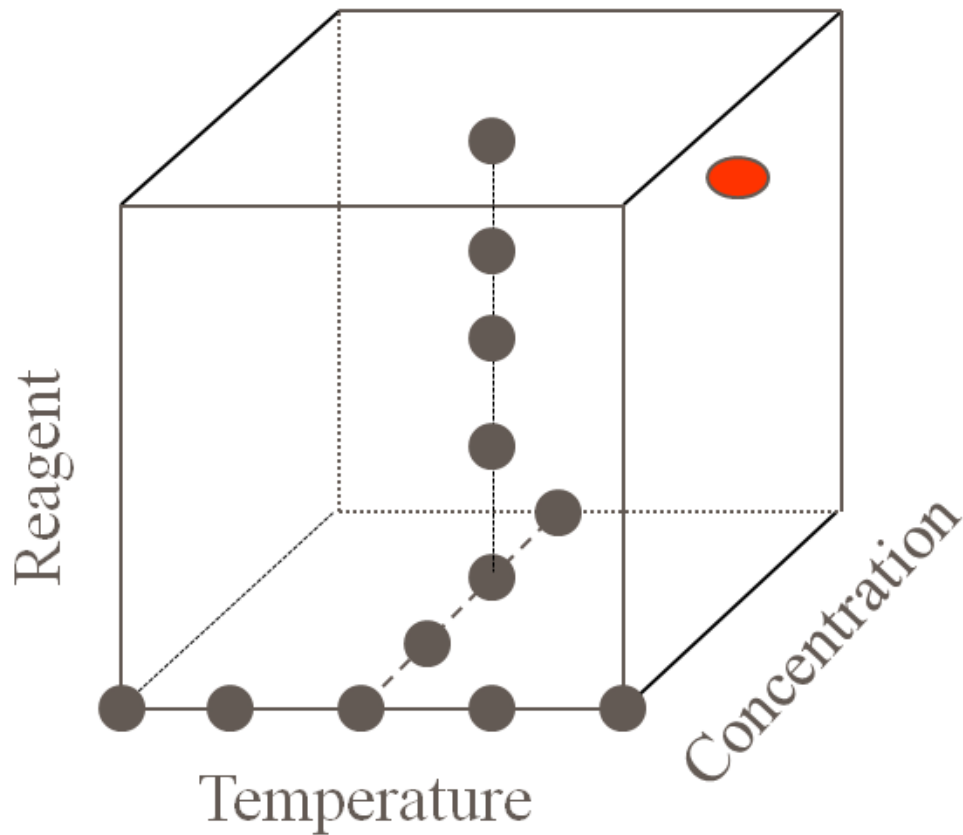
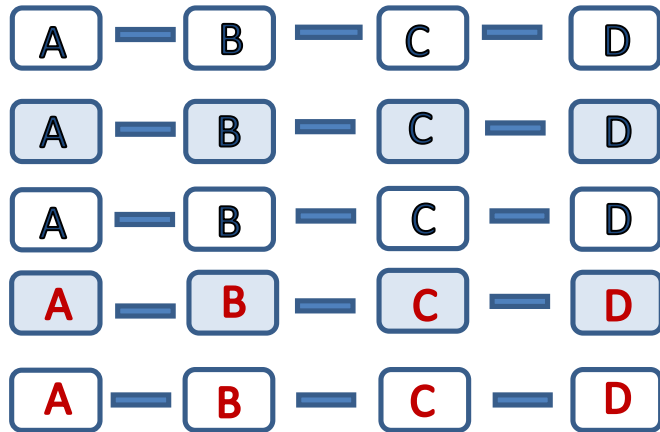


figure 1: One Factor at a Time (OFAT) approach

All [factors] At aTime (AFAT, AAT)

Iný typický prístup: zmena všetkých faktorov naraz



Problémy s týmto prístupom:

Nevieme ktoré konkrétne zmeny spôsobili požadovanú zmenu výstupu.

Nevieme určiť prínos (efekt) jednotlivých faktorov.

Nedokážeme zistiť interakcie medzi faktormi.

Štatisticky navrhnutý experiment (factorial experiment)

Meníme niekoľko faktorov súčasne, pričom uvažujeme všetky možné kombinácie úrovní faktorov:

1. väčšinou začíname s dvoma úrovňami každého faktora (screening)
2. je možné vyskúšať všetky možné kombinácie úrovní faktorov (úplný experiment) alebo vyberieme ich špeciálne podmnožiny (čiastočný experiment)

Skúmame zmenu na výstupe, ktorú spôsobila zmena úrovní faktorov.

Faktorový experiment je navrhnutý tak, aby umožňoval posúdiť nezávisle vplyv každého faktora.

Využíva poznatky štatistiky a teórie pravdepodobnosti.

Výhody štatisticky navrhnutého experimentu

1. Dokážeme identifikovať skutočné zmeny odozvy spôsobené zmenou úrovne faktora – faktorov.
2. Je efektívny – maximalizuje informácie z minimálneho celkového počtu meraní.
3. Výstup je možné jednoducho analyzovať.
4. Dokážeme rozlíšiť dôležité a nedôležité faktory.
5. Dokážeme zistiť interakcie medzi faktormi.
6. Vieme kvantifikovať prínos (efekt) každého faktora a interakcie faktorov.
7. Opakované merania umožňujú zistiť veľkosť náhodných vplyvov (experimentálneho šumu).
8. Výstupom je funkcia, ktorá umožňuje predikovať zmeny sledovanej premennej (odozvy) na základe zmien úrovní faktov, resp. nájsť optimálne alebo robustné riešenie.

Základné pojmy

- **Design of Experiments – DOE** – štatisticky navrhnutý experiment – plán (príprava), návrh a uskutočnenie experimentu, analýza a aplikácia výsledkov
- **Faktory (factors)** – nezávislé premenné, prediktory – vstupy, ktorých vplyv bude predmetom experimentálneho skúmania
- **Odozva (response)** – závislá premenná – hodnota výstupu pri nastavených hodnotách faktorov
- **Úrovně faktorov (factor levels)** – nastavené konkrétne hodnoty faktorov
- **Pokusy – merania (runs, observation)** – meranie odozvy za určitých dopredu plánovaných úrovniach
- **Experiment** – systém všetkých pokusov
- **CPLLOT** – grafické znázornenie plánu experimentu
- **Efekt faktora** – zmena odozvy, ak faktor zmeníme z dolnej úrovne na hornú úroveň

Základné pojmy

- **Interakcia** – vzájomné pôsobenie dvoch a viac faktorov v skúmanom procese; interakcia medzi faktormi A a B znamená, že efekt faktora A na závislú premennú závisí od úrovne faktora B
- **Interakcia n-tého rádu** – vzájomné pôsobenie n faktorov (do regresného modelu zahrňujeme súčiny týchto n premenných)
- **Regresor** – ľubovoľná funkcia vytvorená z nezávislých premenných zakomponovaná do regresného modelu
- **Rozlíšenie (resolution)** – schopnosť daného návrhu rozlíšiť efekty faktorov od efektov interakcií
- **Úplný faktorový experiment (full factorial design)** – experiment typu „každý s každým“
- **Čiastočný faktorový experiment (fractional factorial design)** – úsporný návrh experimentu, kedy uskutočňujeme iba polovicu, štvrtinu, osminu počtu krokov experimentu „každý s každým“

Základné prístupy DOE

- **Replikácia** – znovurealizácia merania za podmienky, že boli znovu nastavené hodnoty faktorov po realizácii predchádzajúcich meraní – replikácia $\neq$ opakované meranie $\rightarrow$ vieme odhadnúť náhodnú zložku (experimentálny šum), t.j. spoľahlivosť záveru zvýšiť použitím testu adekvátnosti modelu.
Počet replikácií by mal byť najmenej 2, aby bolo možné odhadnúť PE; správne by mal byť počet replikácií určený na základe analýzy sily testu a veľkosti vzorky
- **Randomizácia (znáhodnenie)** – jednotlivé merania experimentu robíme v náhodnom poradí, čím eliminujeme systematickú chybu experimentu (únava operátora, kolísanie teploty alebo vlhkosti vo výrobnnej hale)
- **Blokovanie** – používa sa na redukovanie variability faktorov, ktoré nie je možné znáhodniť (rôzni dodávatelia, časovo alebo materiálovo náročný experiment)

Tri základné princípy DOE

- Hierarchický princíp

Efekty interakcií nižších rádov budú dôležitejšie ako efekty interakcií vyšších rádov.

- Princíp úspornosti (Occamova britva)

Počet dôležitých efektov vo faktoriálnom experimente bude relatívne malý.

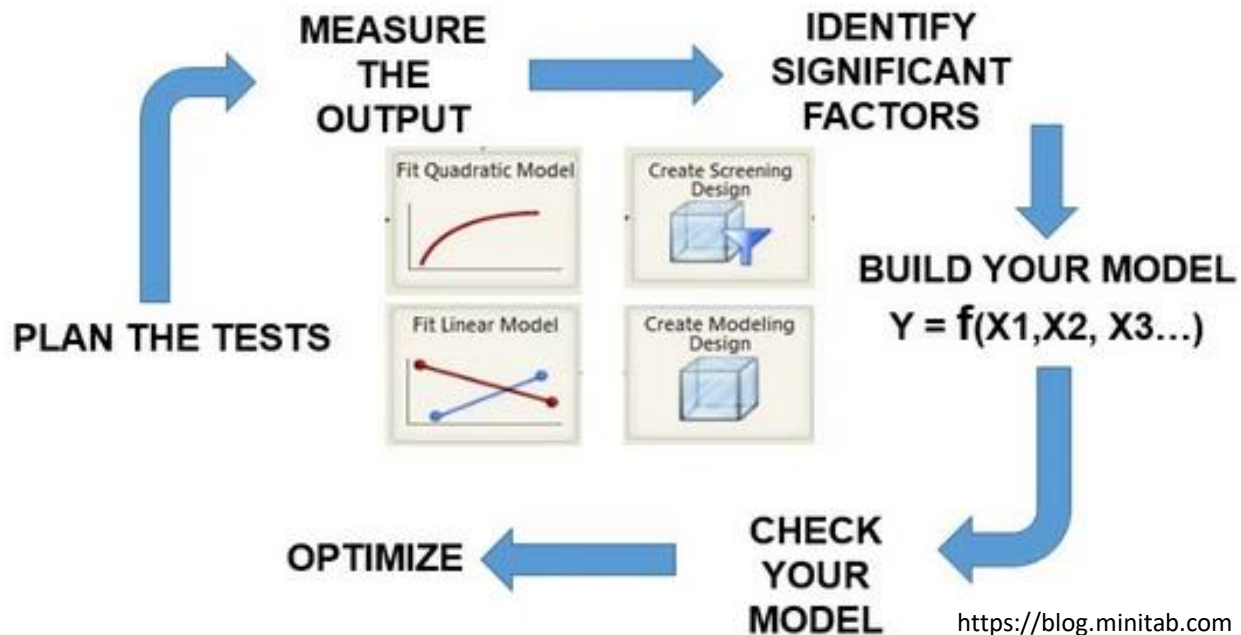
- Princíp dedičnosti

Aby mohol byť významný efekt interakcie, musí byť významný aspoň jeden z jeho „rodičovských“ faktorov.

Cieľ

čo najviac poznať proces pri čo najmenšom počte meraní =
identifikácia významných vstupov + matematický model
systému a optimalizácia

kvantifikujeme vzťah medzi vstupmi a výstupmi a pomocou neho určíme predpokladanú hodnotu odozvy; hľadáme, ktoré faktory majú najväčší vplyv a vyberáme nastavenie, ktoré by bolo najlepšie zo všetkých testovaných .



Podľa charakteru riešeného problému môžeme cieľ plánovaného experimentu rozdeliť do niekoľkých kategórií:

1. Screening (preosievanie faktorov)

Hľadáme, ktoré faktory majú najväčší vplyv - kvantifikujeme mieru štatistickej významnosti každého z faktorov, t.j. rozhodujeme, ktoré z faktorov X_1 , X_2 , X_3 , (A, B, C)... rozhodujúcim spôsobom ovplyvňujú úroveň odozvy Y.

2. Predikcia

Vzťah medzi dôležitými faktormi a odozvou vyjadrujeme analyticky, t.j. hľadáme matematický model popisujúci vzťah medzi vstupmi a výstupom a ten použijeme na predikovanie výstupných hodnôt v rámci skúmanej oblasti vstupov.

3. Optimalizácia

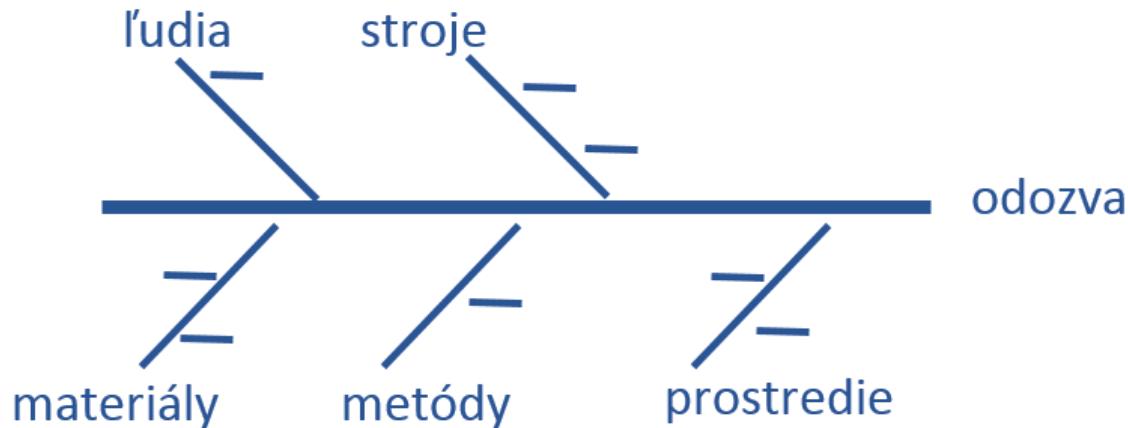
Vyberáme také nastavenie, ktoré by bolo najlepšie zo všetkých testovaných (optimálne nastavenie). Podľa ďalšieho cieľa:

- maximalizujeme alebo minimalizujeme odozvu (maximalizácia pevnosti zliatiny, minimalizácia počtu vlasových trhliniek);
- znižujeme variabilitu (čo najmenšia premenlivosť hrúbky výlisku);
- dosiahnutie odolnosti voči vplyvom, ktoré nedokážeme riadiť (nájdenie prac. postupu, ktorý nebude závislý na tvrdosti vody);
- hľadáme pracovný bod procesu, ktorý je prijateľný z viacerých hľadísk (malá nasiakavosť a zároveň nízka cena).

4. Zvláštnou úlohou je **optimalizácia zmesí** – faktory nie sú nezávislé (čím viac cementu, tým menej vápna a piesku).

Ishikawov diagram

(rybia kosť, diagram príčin a následkov)



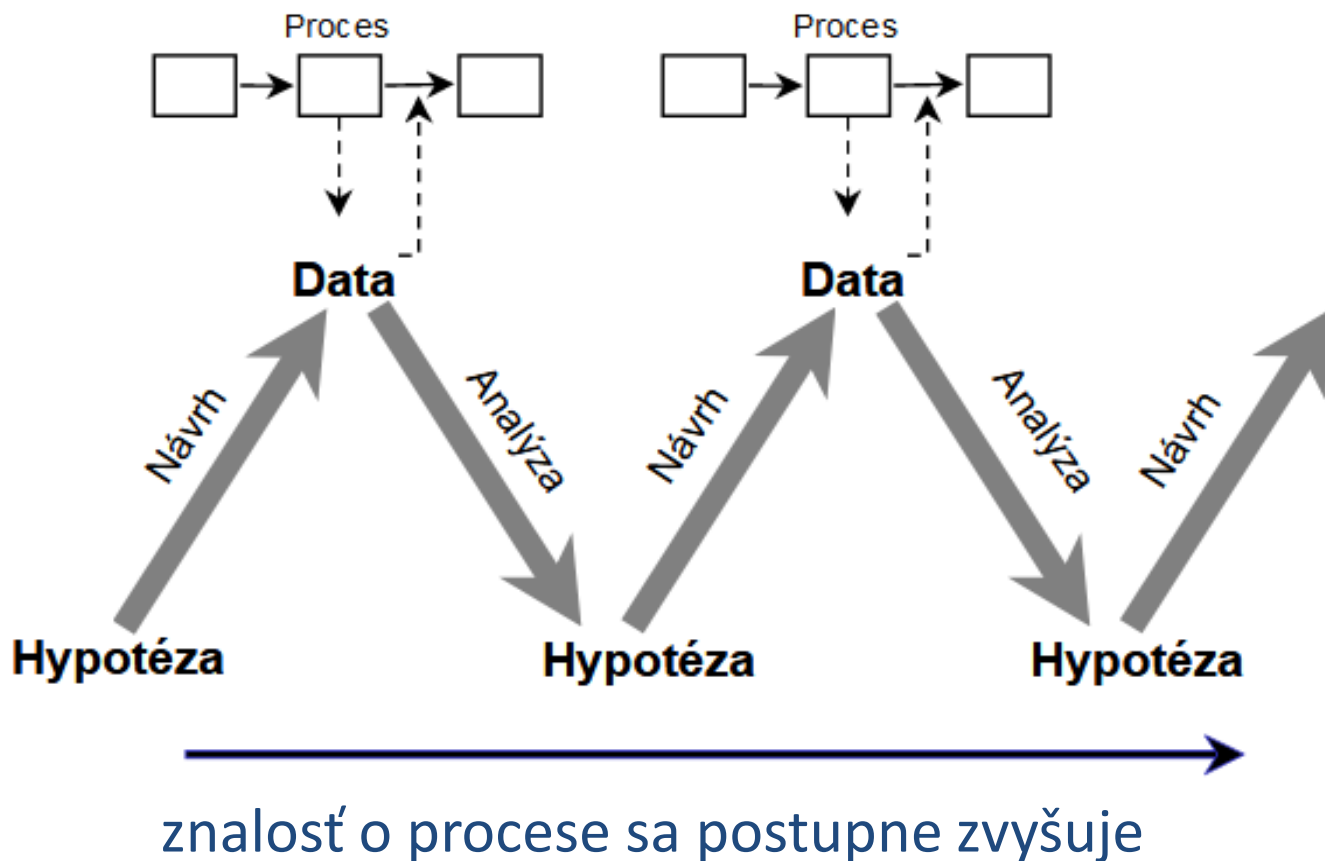
Experiment = práca v tíme:

- odborníci na samotný proces (technológovia, procesní inžinieri, analytici);
- ľudia, ktorý sa zaoberajú kvalitou;
- zástupcovia zákazníka;
- ľudia, ktorí s procesom alebo produktom prichádzajú do styku (predajcovia, servis);
- ľudia, ktorí majú nejakú skúsenosť s vyhodnocovaním dát

Princíp postupného experimentovania

Experiment realizujeme v etapách – do 1. kola vložíme $\frac{1}{4}$ až $\frac{1}{3}$ dostupných zdrojov.

Testované hypotézy



Plánovanie zdrojov pre experiment

- kapacita strojov a zariadení
- financie
- ľudia
- čas
- software (Excel, Minitab, Design Expert, JMP, SPSS, Statgraphics, Statistica, Matlab, R, Python, MODDE Pro....)



Plánovanie experimentu – typy experimentov

- Podľa počtu meraní v naplánovaných bodoch:

vyvážený model – v každom bode rovnaký počet meraní

nevyvážený model – v každom bode rôzny počet meraní

- Podľa toho, či zostavujeme plán pre každý faktor:

úplný (full) experiment – plán zostavujeme pre každý faktor, t.j. zahrňuje všetky možné kombinácie úrovní faktorov

čiastočný (fractional) experiment – plán zostavujeme iba pre hlavné faktory, vedľajšie faktory vyjadríme pomocou hlavných (resolution)

- Podľa typu plánu experimentu:

Faktorový (Factorial) - 2^k

Čiastočný (Fractional Factorial)

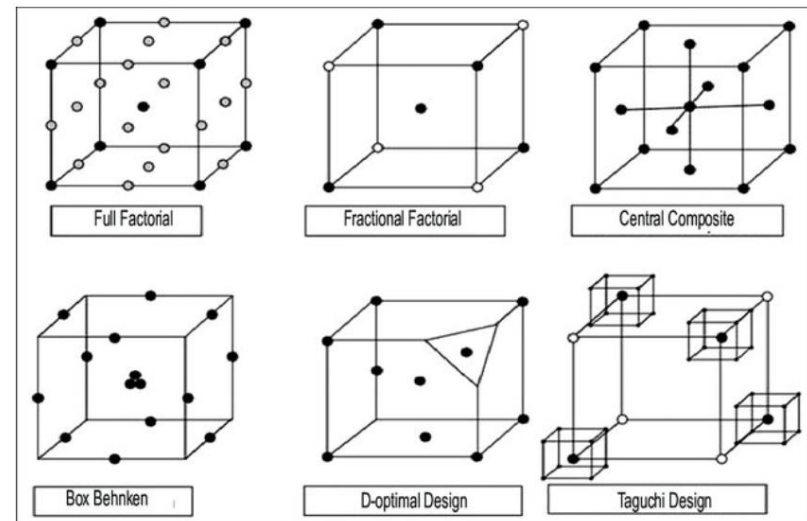
Centrálny kompozitný

Box- Behnken

D-optimal

Split plot

Taguchi ...



Plánovanie experimentu – factorial design

Naplánovať (úplný) experiment typu n^k , znamená určiť

1. n^k rôznych bodov, v ktorých budeme realizovať merania pričom

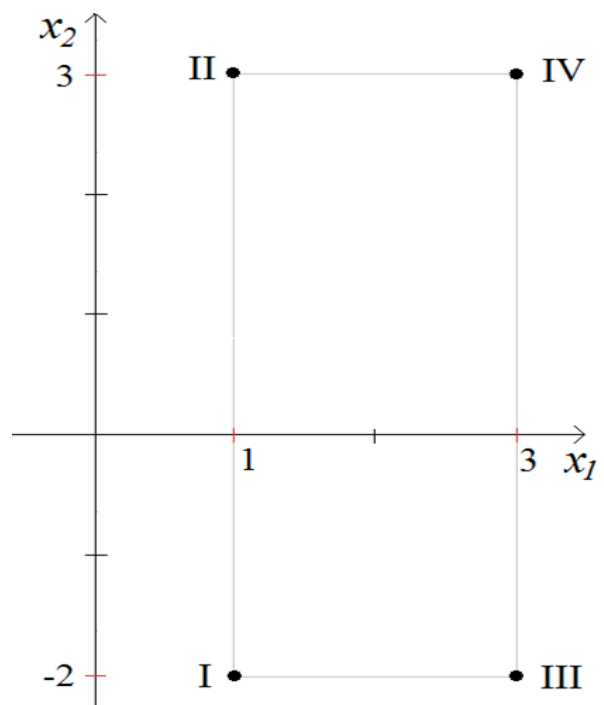
- n je počet úrovní faktorov (počet bodov, ktorými delíme interval na $n - 1$ podintervalov rovnakej dĺžky),
- k je počet faktorov,

2. m počet meraní v každom naplánovanom bode.

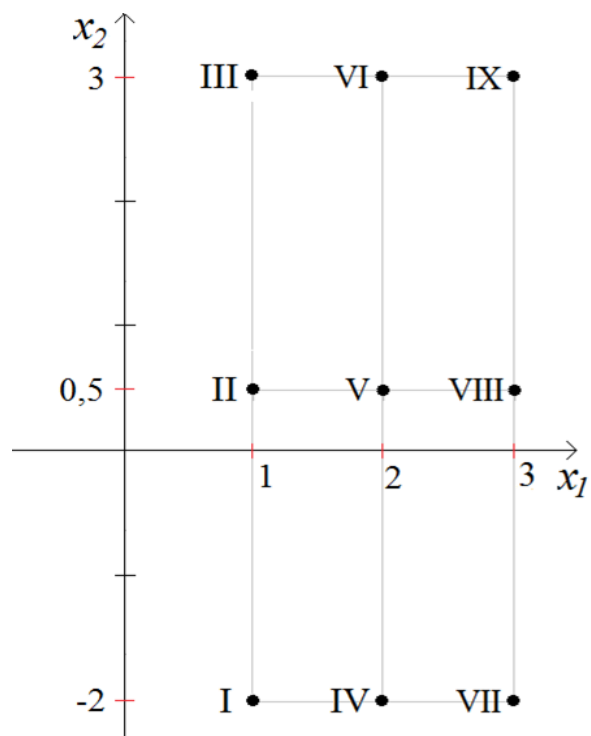
Po samotnej realizácii plánovaného experimentu získame celkový počet meraní $m \cdot n^k$.

Počet bodov (úplného) faktorového plánu experimentu podľa počtu úrovní faktorov:

2^2

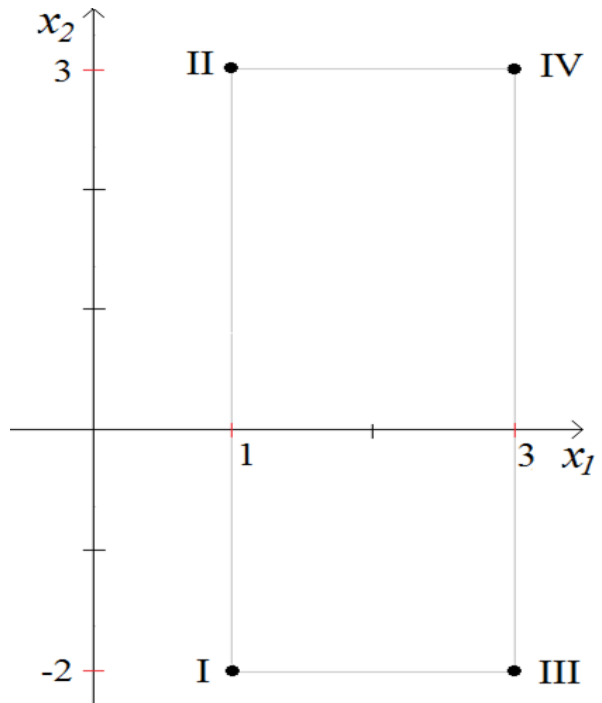


3^2

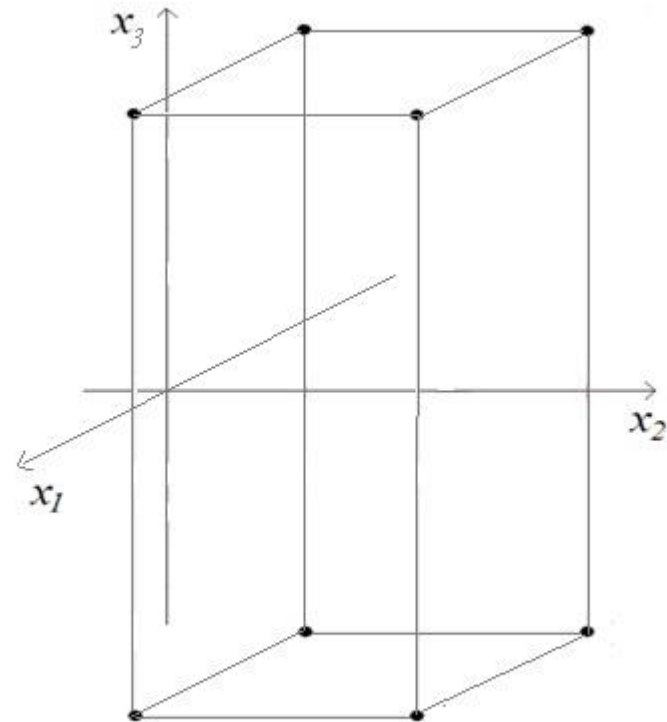


Počet bodov (úplného) faktorového plánu experimentu podľa počtu faktorov:

$$2^2$$

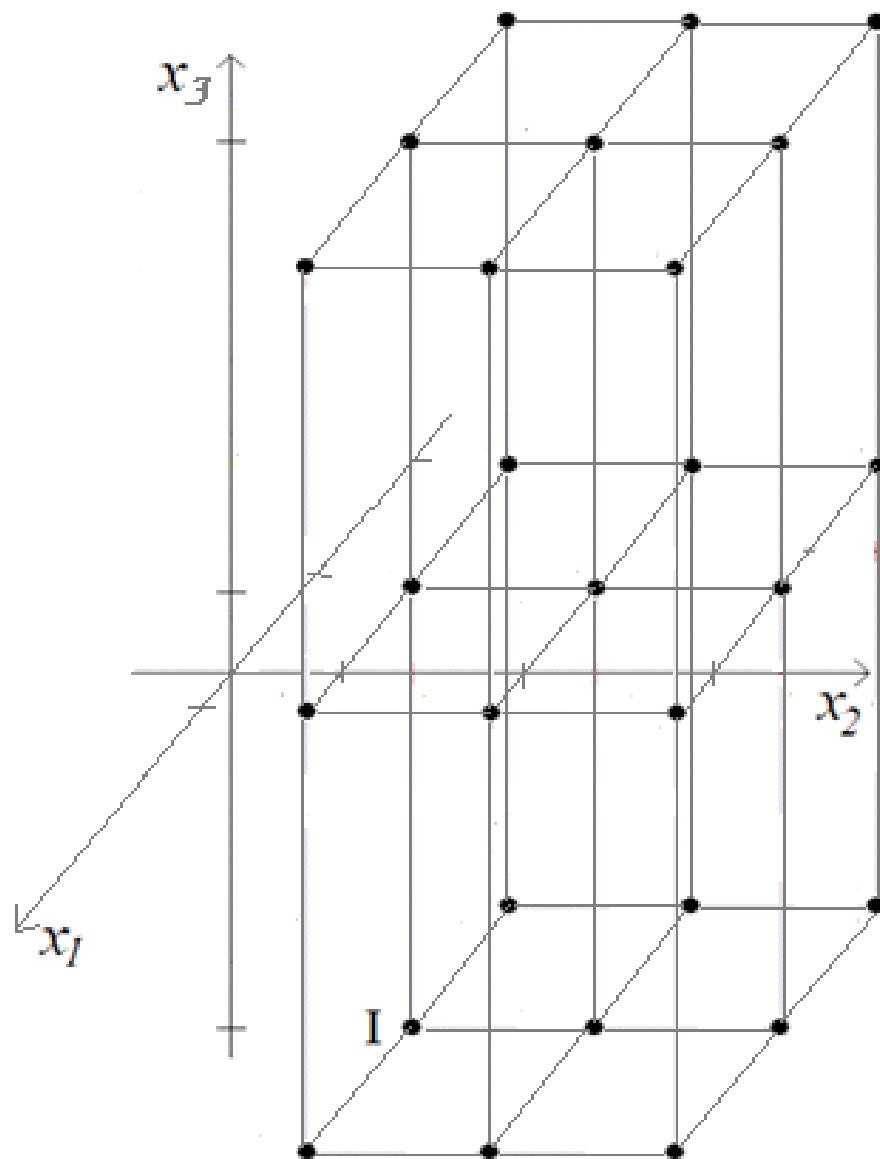


$$2^3$$



Počet bodov (úplného) faktorového plánu experimentu podľa počtu úrovní a počtu faktorov:

$$3^3$$



Významné body plánovaného experimentu

vrcholové body (factorial points) – slúžia na výpočet efektov faktorov; ich súradnice zapisujeme pomocou ± 1 ;

centrálne body (central points) – doporučený počet 3-5; centrálne body sa nepoužívajú pri výpočte efektov faktorov; ich súradnice zapisujeme pomocou 0 – môžu byť pridané do modelu, iba ak sú všetky faktory kvantitatívne využívajú sa:

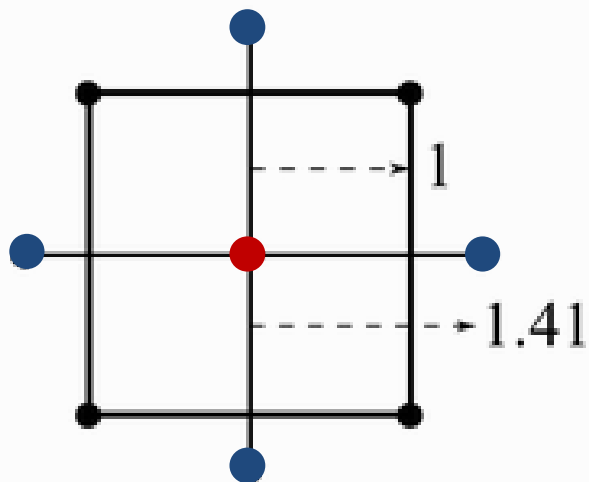
- pri teste krivosti (testujeme, či postačuje lineárny model) z Y_i v centrálnych bodoch sa počíta priemer a porovnáva sa s priemerom Y_i vo vrcholových bodoch;
- z Y_i v centrálnych bodoch sa počíta odhad rozptylu ako náhrada za odhad rozptylu z opakovaných meraní;
- z e_i v centrálnych bodoch sa počíta čistá chyba merania (pure error);

Významné body plánovaného experimentu

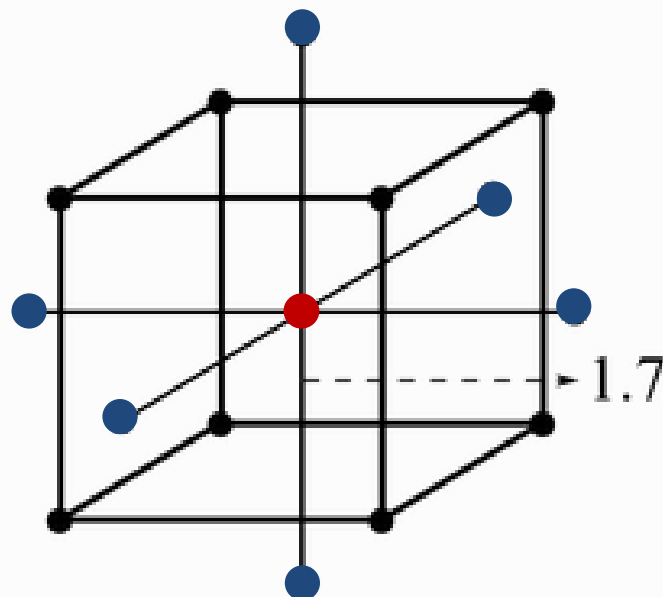
hviezdicové body (axial = star points) – pri dvoch faktoroch ležia na kružnici so stredom $(0,0)$, ktorá prechádza vrcholmi štvorca, pri troch faktoroch tam, kde guľová plocha prechádzajúca vrcholovými bodmi plánu prechádza súradnicovými osami; ich význam:

- umožňujú výpočet koeficientov v úplnom kvadratickom modeli;
- spresňujú výpočet regresných koeficientov

Významné body plánovaného experimentu



2-factor
system



3-factor
system

Regresný model pre 2 faktory

- **Lineárny** – neuvažuje interakcie faktorov, je popísaný lineárnou funkciou
$$Y = f(X_1, X_2) = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2;$$
koeficienty je možné nájsť ako polovičné odhady efektov alebo MNŠ;
 b_0 je celkový priemer
- **Kvadratický neúplný – regresný model lineárneho typu** – neobsahuje kvadratické členy, avšak uvažujeme interakcie medzi faktormi
$$Y = f(X_1, X_2) = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_{12}X_1X_2;$$
koeficienty je možné nájsť ako polovičné odhady efektov alebo MNŠ;
 b_0 je celkový priemer
- **Kvadratický úplný** – popísaný kvadratickou funkciou
$$Y = f(X_1, X_2) = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_{11}X_1^2 + b_{22}X_2^2 + b_{12}X_1X_2;$$
koeficienty nie je možné nájsť pomocou efektov, ale MNŠ;
vyžaduje zložitejšie plány experimentu (kombinovaný, viacúrovňový...);
slúži k výpočtu optimálnych hodnôt faktorov, k výpočtu hodnôt Y pre ľubovoľnú úroveň faktorov

Lineárny model (first-order model) pre 2 faktory

3D graf (Response surface plot)

Vrstevnicový graf (Contour plot)

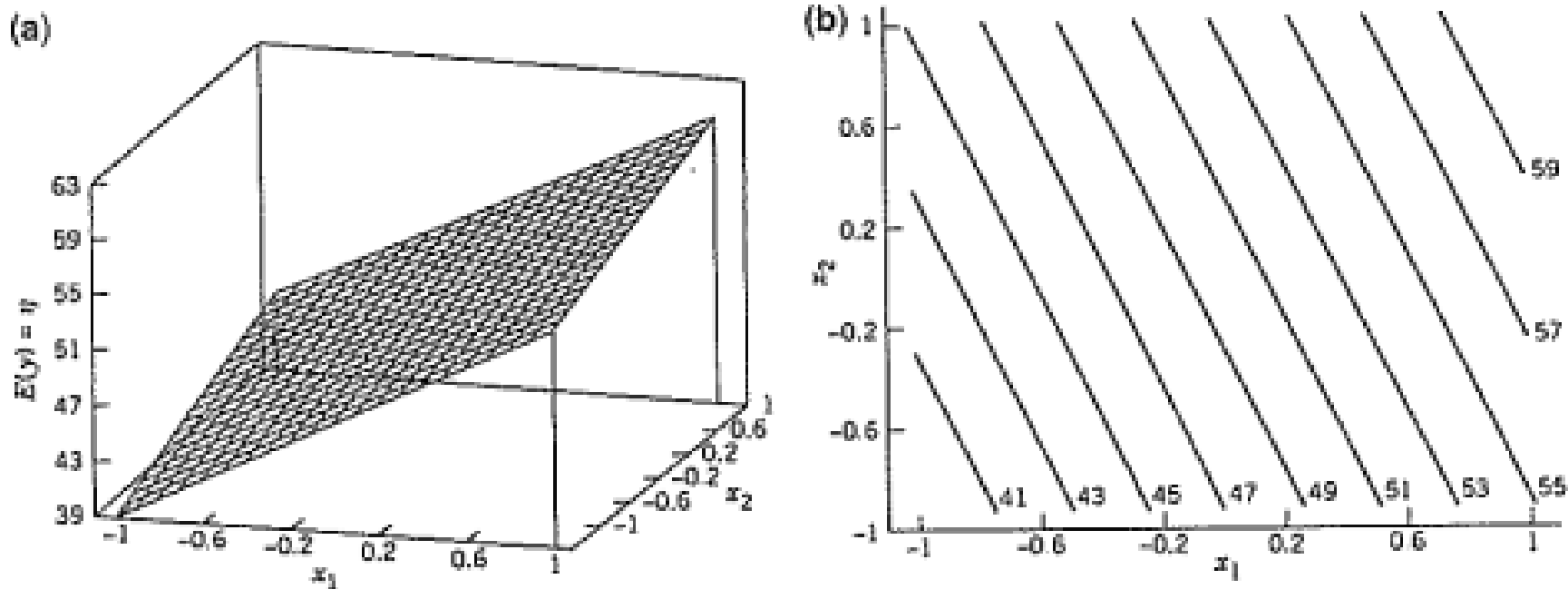


Figure 1.2 (a) Response surface for the first-order model $\eta = 50 + 8x_1 + 3x_2$. (b) Contour plot for the first-order model.

Kvadratický úplný model (second-order model) pre 2 faktory

3D graf (Response surface plot)

Vrstevnicový graf (Contour plot)

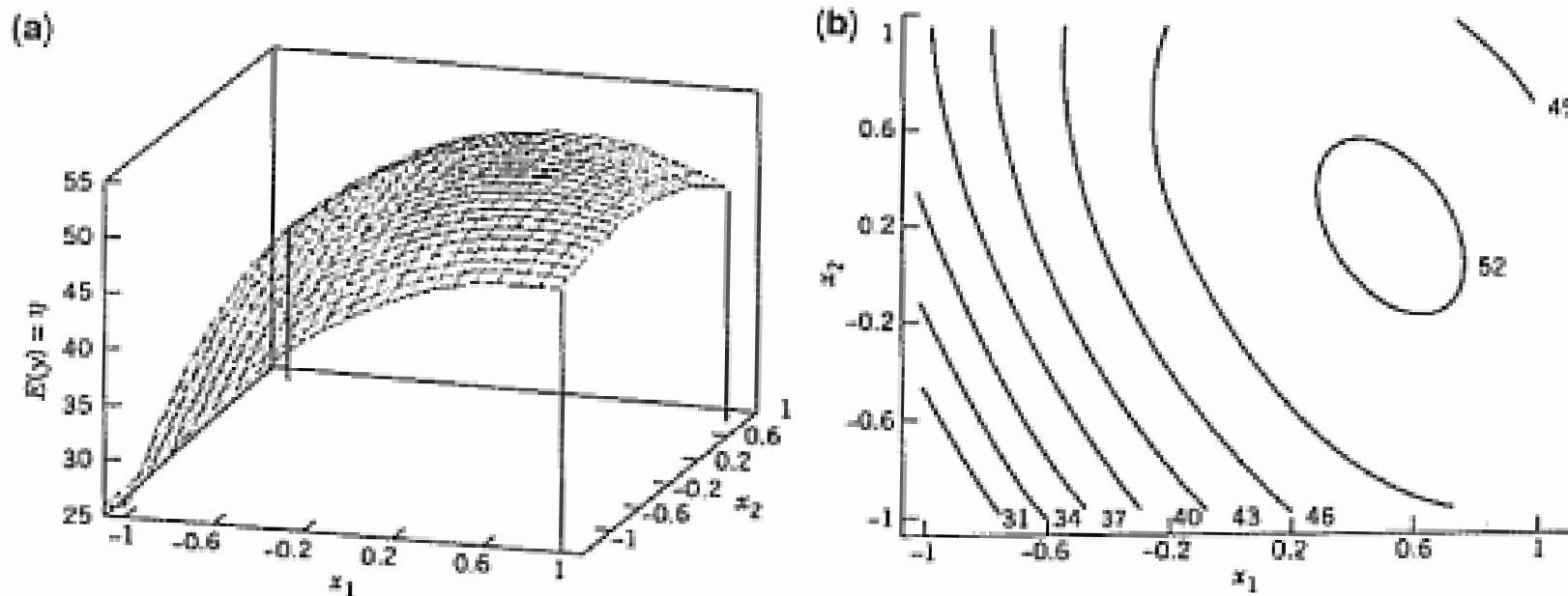


Figure 1.4 (a) Response surface for the second-order model $\eta = 50 + 8x_1 + 3x_2 - 7x_1^2 - 3x_2^2 - 4x_1x_2$. (b) Contour plot for the second-order model.

Kvadratický neúplný model (first-order model with interaction) pre 2 faktory

3D graf (Response surface plot)

Vrstevnicový graf (Contour plot)

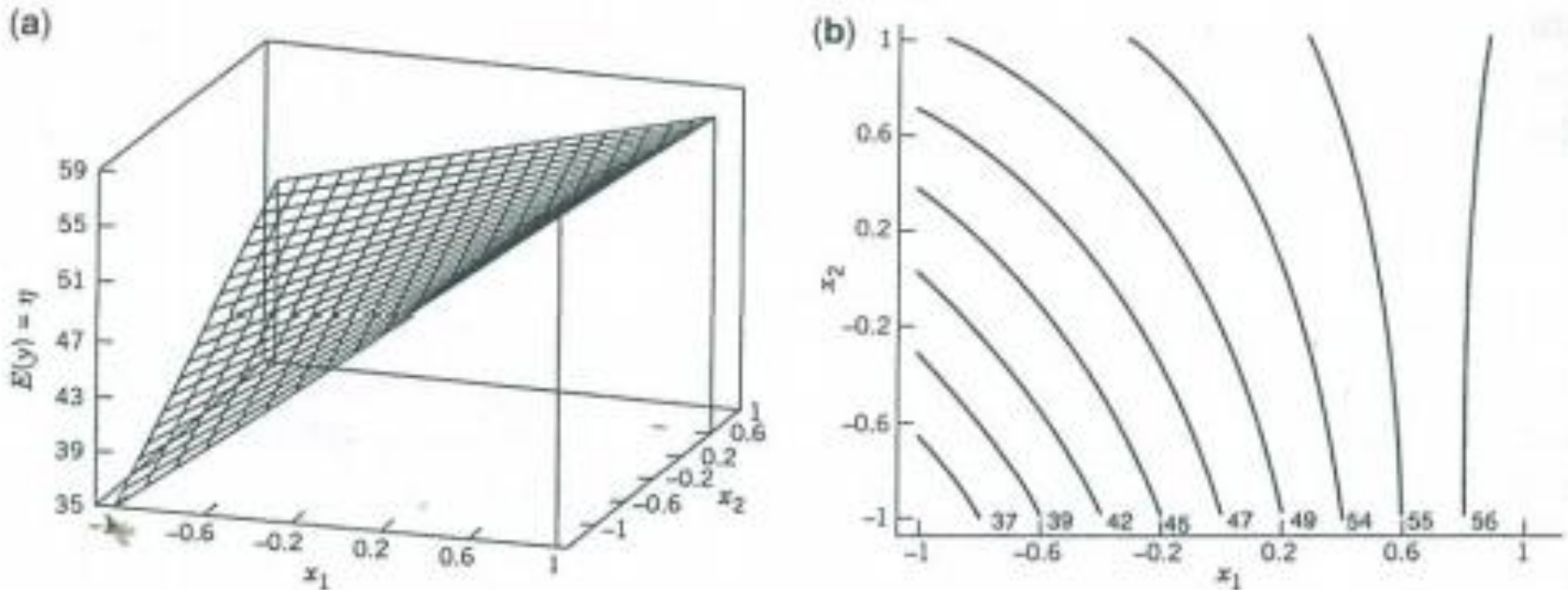
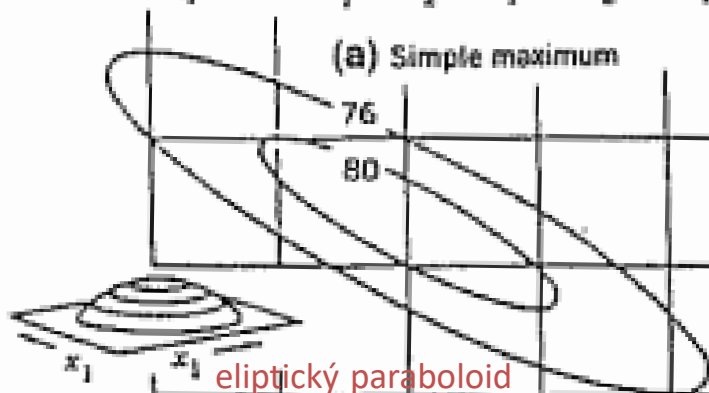


Figure 1.3 (a) Response surface for the first-order model with interaction $\eta = 50 + 8x_1 + 3x_2 - 4x_1x_2$. (b) Contour plot for the first-order model with interaction.

Porovnanie rôznych kvadratických modelov pre 2 faktory

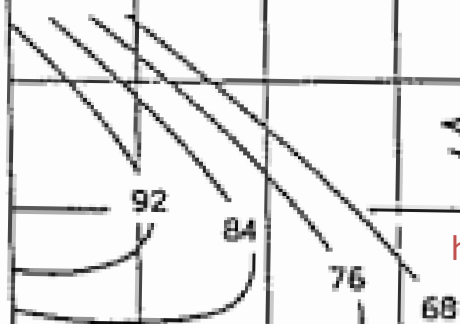
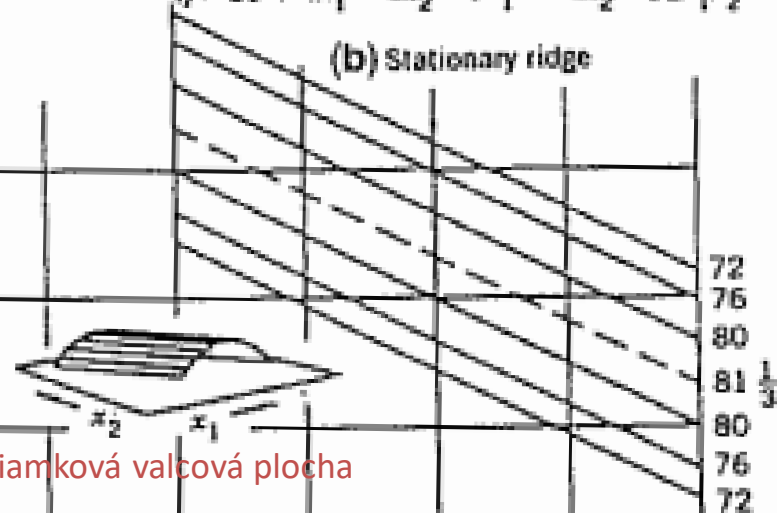
$$\eta = 80 + 4x_1 + 8x_2 - 4x_1^2 - 12x_2^2 - 12x_1x_2$$

(a) Simple maximum



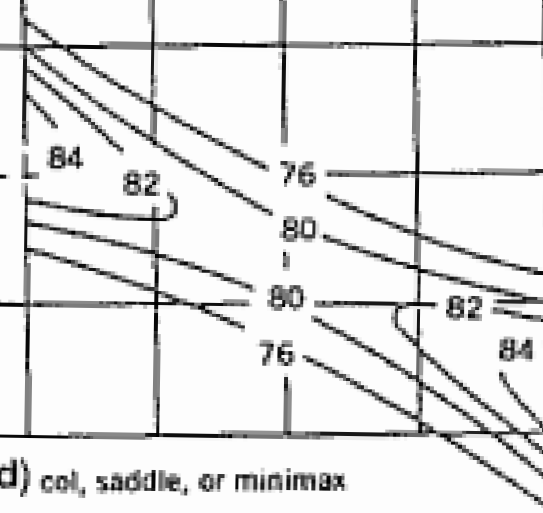
$$\eta = 80 + 4x_1 + 8x_2 - 3x_1^2 - 12x_2^2 - 12x_1x_2$$

(b) Stationary ridge

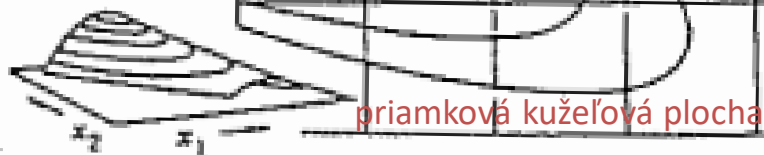


(c) Rising ridge

$$\eta = 80 - 4x_1 + 12x_2 - 3x_1^2 - 12x_2^2 - 12x_1x_2$$



$$\eta = 80 + 4x_1 + 8x_2 - 2x_1^2 - 12x_2^2 - 12x_1x_2$$



Postup pri hľadaní regresnej funkcie lineárneho typu pre 2 faktory

1. funkcia lineárneho typu:

$$y = f_L(x_1, x_2) = B_0 + B_1x_1 + B_2x_2 + B_{12}x_1x_2$$

2. transformovaná (kódovaná) funkcia lineárneho typu:

$$y_t = (f_L)_t(t_1, t_2) = b_0 + b_1t_1 + b_2t_2 + b_{12}t_1t_2$$

3. odhad transformovanej funkcie MNŠ – transformovaná regresná funkcia lineárneho typu:

$$\hat{y}_t = (\hat{f}_L)_t(t_1, t_2) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1t_1 + \hat{b}_2t_2 + \hat{b}_{12}t_1t_2$$

4. odhad pôvodnej regresnej funkcie lineárneho typu:

$$\hat{y} = \hat{f}_L(x_1, x_2) = \hat{B}_0 + \hat{B}_1x_1 + \hat{B}_2x_2 + \hat{B}_{12}x_1x_2$$

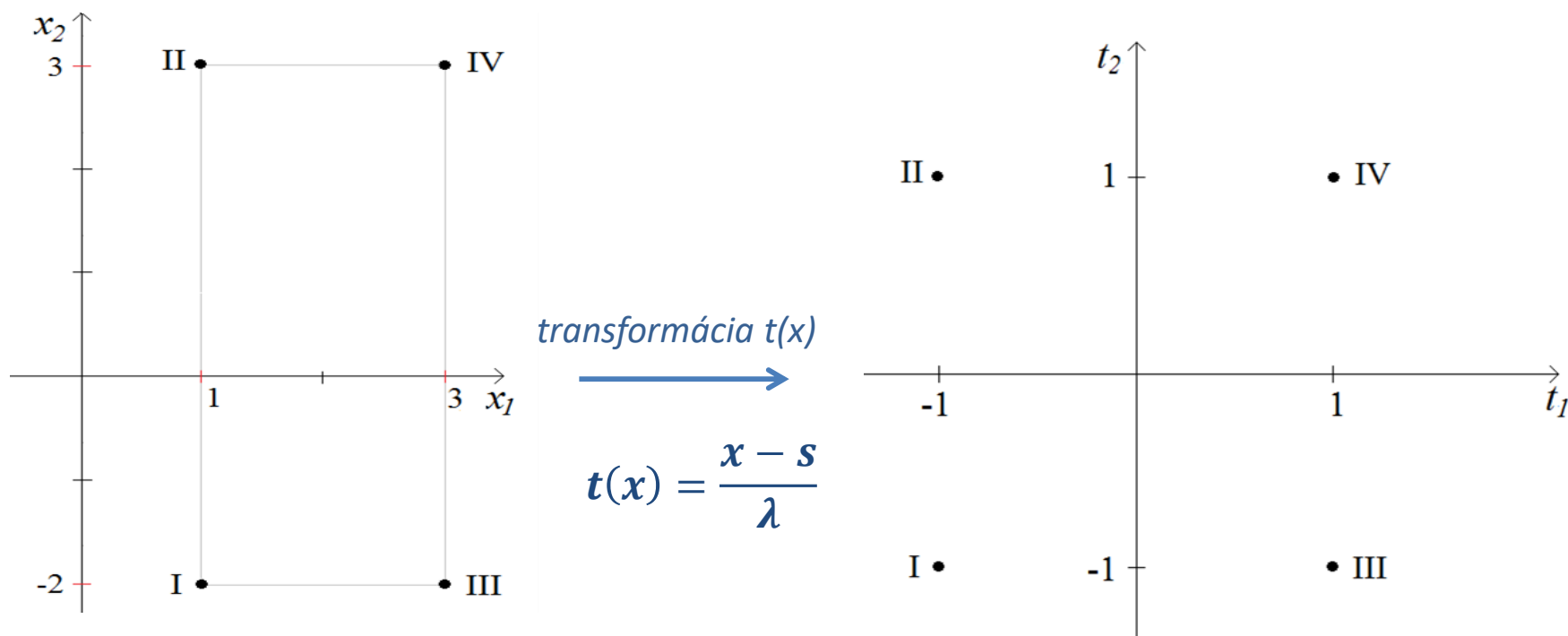
Lineárna transformácia – kódovanie

$$\langle a, b \rangle \xrightarrow{t(x)} \langle -1, 1 \rangle$$

$x \in \langle a, b \rangle$,

$s = \frac{a+b}{2}$ je stred intervalu $\langle a, b \rangle$,

$\lambda = \frac{b-a}{2}$ je polovica dĺžky (variačné rozpätie) intervalu $\langle a, b \rangle$.



Význam kódovania premenných

Výsledkom regresnej analýzy kódovaných premenných sú kódované , t.j. bezrozmerné koeficienty – vyjadrujú účinok zmeny každého faktora na rovnakom intervale.

Bodový odhad všetkých koeficientov robíme s rovnakou presnosťou.

	<i>Coefficients</i>	<i>Standard Error</i>	<i>t Stat</i>	<i>P-value</i>	<i>Lower 95%</i>	<i>Upper 95%</i>
Intercept	776,0625	11,86529208	65,4061	3,32E-12	748,701087	803,423913
t1	-50,8125	11,86529208	-4,28245	0,002679	-78,173913	-23,451087
t2	3,6875	11,86529208	0,31078	0,763911	-23,673913	31,0489126
t3	153,0625	11,86529208	12,90002	1,23E-06	125,701087	180,423913
t1*t2	-12,4375	11,86529208	-1,04823	0,325168	-39,798913	14,9239126
t1*t3	-76,8125	11,86529208	-6,47371	0,000193	-104,17391	-49,451087
t2*t3	-1,0625	11,86529208	-0,08955	0,930849	-28,423913	26,2989126
t1*t2*t3	2,8125	11,86529208	0,237036	0,818586	-24,548913	30,1739126

Pomocou relatívnej veľkosti efektov kódovaných faktorov dokážeme porovnávať ich „dôležitosť“ vplyv na odozvu.

Odhad koeficientov transformovanej regresnej funkcie lineárneho typu v úplnom experimente typu 2^2 MNŠ

$$\hat{y}_t = (\hat{f}_L)_t(t_1, t_2) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 t_1 + \hat{b}_2 t_2 + \hat{b}_{12} t_1 t_2$$

Nastavenia úrovní transformovaných faktorov tvoria plán experimentu:

$$\text{I: } \hat{y}_t = (\hat{f}_L)_t(-1; -1) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1(-1) + \hat{b}_2(-1) + \hat{b}_{12}(-1)(-1)$$

$$\text{II: } \hat{y}_t = (\hat{f}_L)_t(-1; 1) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1(-1) + \hat{b}_2(1) + \hat{b}_{12}(-1)(1)$$

$$\text{III: } \hat{y}_t = (\hat{f}_L)_t(1; -1) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1(1) + \hat{b}_2(-1) + \hat{b}_{12}(1)(-1)$$

$$\text{IV: } \hat{y}_t = (\hat{f}_L)_t(1; 1) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1(1) + \hat{b}_2(1) + \hat{b}_{12}(1)(1)$$

transformovaná matica plánu experimentu: $X_t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

transponovaná matica k transformovanej matici plánu experiment X_t :

$$X_t^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Odhad koeficientov transformovanej regresnej funkcie lineárneho typu v úplnom experimente typu 2^2 MNŠ

matica nameraných hodnôt: $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$

vektor odhadov koeficientov: $\hat{b} = \begin{pmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_{12} \end{pmatrix}$

$$(\hat{f}_L)_t(t_1, t_2) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 t_1 + \hat{b}_2 t_2 + \hat{b}_{12} t_1 t_2 = \hat{y}_t$$

zapísané pomocou maticovej rovnice: $X_t \cdot \hat{b} = Y$

Bodový odhad koeficientov v experimente 2^2 :

$$\hat{b} = \begin{pmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_{12} \end{pmatrix} = (X_t^T \cdot X_t)^{-1} \cdot X_t^T \cdot Y = \frac{1}{2^2} \cdot X_t^T \cdot Y$$

Odhad koeficientov transformovanej regresnej funkcie lineárneho typu v úplnom experimente typu 2^k MNŠ

pre m meraní v každom bode a k faktorov: $\hat{b} = \begin{pmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{m \cdot 2^k} \cdot X_t^T \cdot Y$

v skriptách Palumbíny: $\hat{b} = \begin{pmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{m \cdot 2^k} \cdot X_T' \cdot Y$

Skrátená metóda výpočtu

Stĺpcový vektor nameraných hodnôt $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{m \cdot 2^k} \end{pmatrix}$ nahradíme stĺpcom ich aritmetických

priemerov v každom bode experimentu $Y = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 \\ \bar{y}_4 \end{pmatrix}$ a počet meraní považujeme $m = 1$.

Odhad koeficientov pomocou rozšírenej matice plánu

matica plánu experimentu X - matica vytvorená zo stĺpcov normovaných faktorov a ich interakcií

stĺpce samostatného pôsobenia faktorov t_1, t_2

stĺpec spoločného pôsobenia faktorov t_1, t_2

aditívna konštanta

namerané hodnoty y

1	-1	-1	1	y_1
1	-1	1	-1	y_2
1	1	-1	-1	y_3
1	1	1	1	y_4

$\sum$ 4 0 0 0

Súčet prvkov v 1. stĺpci označíme N .

Súčet prvkov v 2., 3., 4. stĺpci je rovný nule – plán je vyvážený.

Skalárny súčin dvojíc vektorov v stĺpcoch je rovný nule – plán je **ortogonálny**.

Vzorec pre odhad (výpočet) koeficientov:
$$\hat{b}_i = \frac{1}{N} \sum_j t_{ji} y_j$$

Vyhodnotenie experimentu

$$(f_L)_t(t_1, t_2) = b_0 + b_1 t_1 + b_2 t_2 + b_{12} t_1 t_2$$

Ak je b_i v absolútnej hodnote **malé** číslo (zapisujeme $b_i = 0$), potom faktor t_i **nemá významný vplyv** na hodnotu transformovanej funkcie $(f_L)_t(t_1, t_2)$,

ak b_i je v absolútnej hodnote **veľké** číslo ($b_i \neq 0$), potom faktor t_i má **veľký vplyv** na hodnotu transformovanej funkcie $(f_L)_t(t_1, t_2)$.

Rovnaké úvahy platia aj pre koeficient b_{ij} , ktorým popisujeme veľkosť vzájomného pôsobenia faktorov t_i a t_j .

Tvrdenia $b_i = 0$, resp. $b_i \neq 0$ sú pre nás hypotézami, ktorých platnosť testujeme.

V praxi hodnoty b -koeficientov nepoznáme, poznáme iba ich odhady $\hat{b}$, ktoré použijeme pri výpočte testovacej štatistiky.

Štatistická významnosť jednotlivých parametrov (faktorov) lineárneho modelu pre experiment typu 2^2 .

$$(f_L)_t(t_1, t_2) = b_0 + b_1 t_1 + b_2 t_2 + b_{12} t_1 t_2$$

Individuálny t-test – štatistická významnosť vzťahu Y (závislej premennej) s určitou nezávislou premennou x_i v danom modeli.

$$H_0: b_i = 0 \text{ } >< \text{ } H_1: b_i \neq 0 \text{ pre } i = 1, 2, 12$$

H_0 : Regresný koeficient nie je štatisticky významný ($b_i = 0, i = 1, 2, 12$), t.j. faktor t_i nemá veľký vplyv na funkciu $(f_L)_t$, t.j. x_i nemá veľký vplyv na funkciu f_L – vplyv nie je štatisticky významný

H_1 : Regresný koeficient je štatisticky významný ($b_i \neq 0, i = 1, 2, 12$), t.j. faktor t_i má veľký vplyv na funkciu $(f_L)_t$, t.j. x_i má veľký vplyv na funkciu f_L – vplyv je štatisticky významný

Testovacia charakteristika (štatistika):

$$t(b_i) = \frac{\hat{b}_i \cdot 2^k \cdot \sqrt{m(m-1)}}{R_0} = \frac{\hat{b}_i}{SE(b_i)}$$

R_0^2 je súčet reziduálnych štvorcov $R_0^2 = \sum_{i=1}^{m \cdot 2^k} (y_i - \hat{y}_i)^2$, kde y_i sú namerané hodnoty, $\hat{y}_i$ sú vyrovnané teoretické hodnoty.

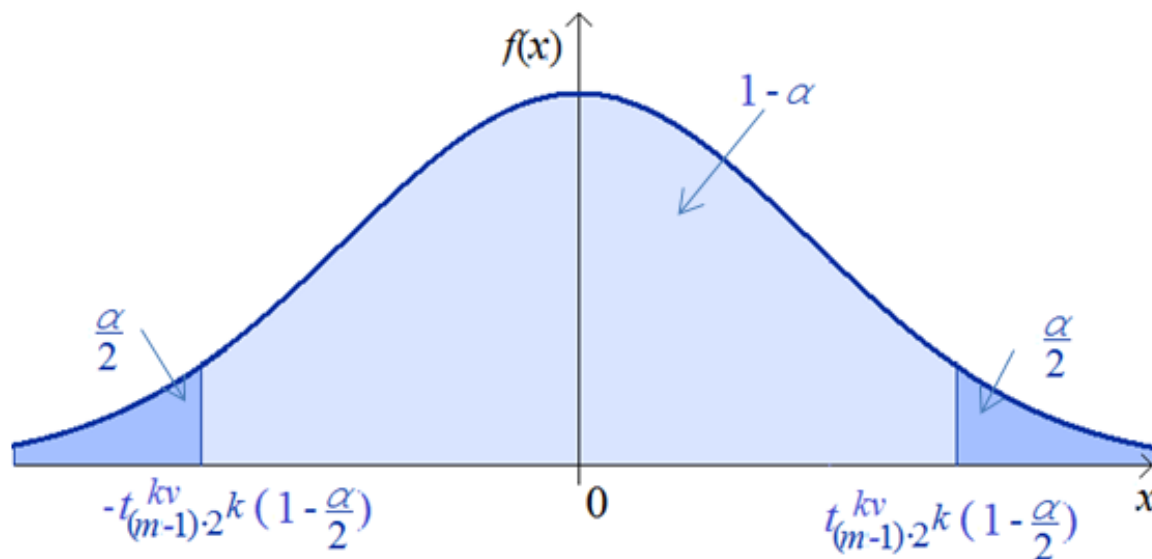
v Exceli: Data analysis → Regression: $R_0^2 = \text{SSE}$ v tabuľke ANOVA

Testovacia charakteristika t má Studentovo rozdelenie so stupňom voľnosti $(m - 1) \cdot 2^k$.

Rozhodovanie o výsledku testu pomocou:

a) **kritického oboru**: Ak $|t| > t_{(m-1) \cdot 2^k}^{kv} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ alebo ak $t_{(m-1) \cdot 2^k}^{kv} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ patrí

$W = \left(-\infty; -t_{(m-1) \cdot 2^k}^{kv} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right) \cup \left(t_{(m-1) \cdot 2^k}^{kv} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right), \infty\right)$ zamietame H_0 .



H_0 zamietame

H_0 nezamietame (prijímame)

H_0 zamietame

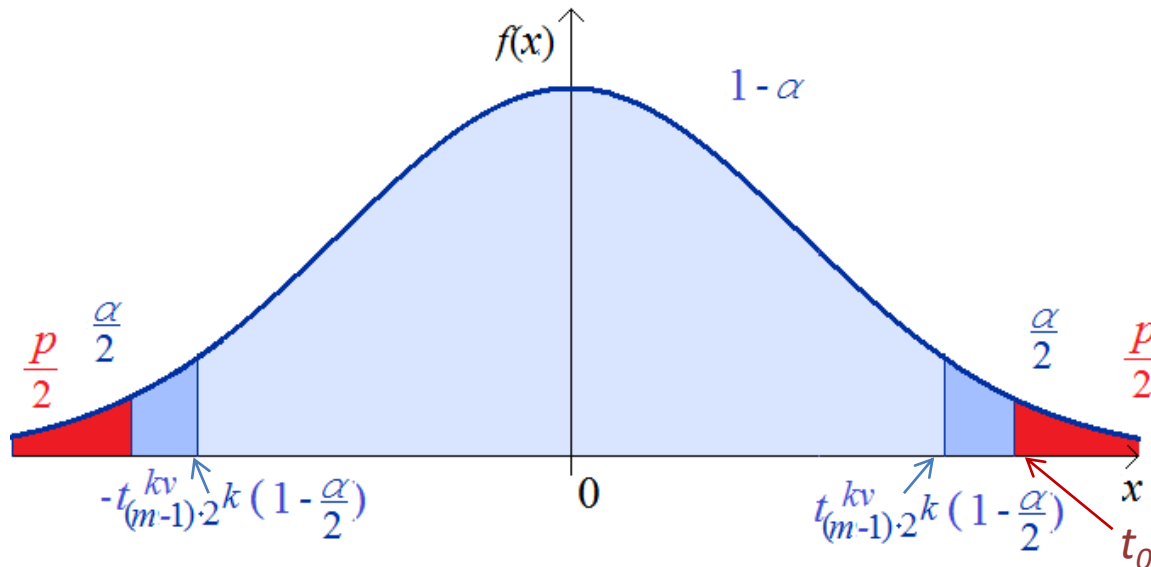
b) intervalu spoľahlivosti pre b - koeficienty

V prípade, že číslo 0 ($H_0: b_i = 0$) leží v $(1 - \alpha) \cdot 100$ %-nom intervale spoľahlivosti, na hladine významnosti α prijímame H_0 .

v Exceli: Data analysis → Regression – automaticky hľadá 95% interval spoľahlivosti (možno zadať aj inú spoľahlivosť)

c) p-hodnoty: $p \leq \alpha$ zamietame H_0 , $p > \alpha$ nezamietame H_0

v Exceli: Data analysis → Regression



Štatistická významnosť regresného modelu

Celkový F – test - významnosť regresného vzťahu Y (závislej premennej) a x_1, x_2 (nezávislých premenných).

$$H_0: b_1 = b_2 = b_{12} = 0 \text{ } >< \text{ } H_1: \exists \text{ aspoň jedno } i: b_i \neq 0$$

H_0 : Regresný model nie je štatisticky významný (t.j. všetky regresné koeficienty $b_i = 0, i = 1, 2, 12$),

H_1 : Regresný model je štatisticky významný (aspoň jeden regresný koeficient $b_i \neq 0$)

Zamietnutie H_0 znamená, že aspoň jedna z nezávislých premenných vplýva významne na Y .

Testovacia charakteristika (štatistika):

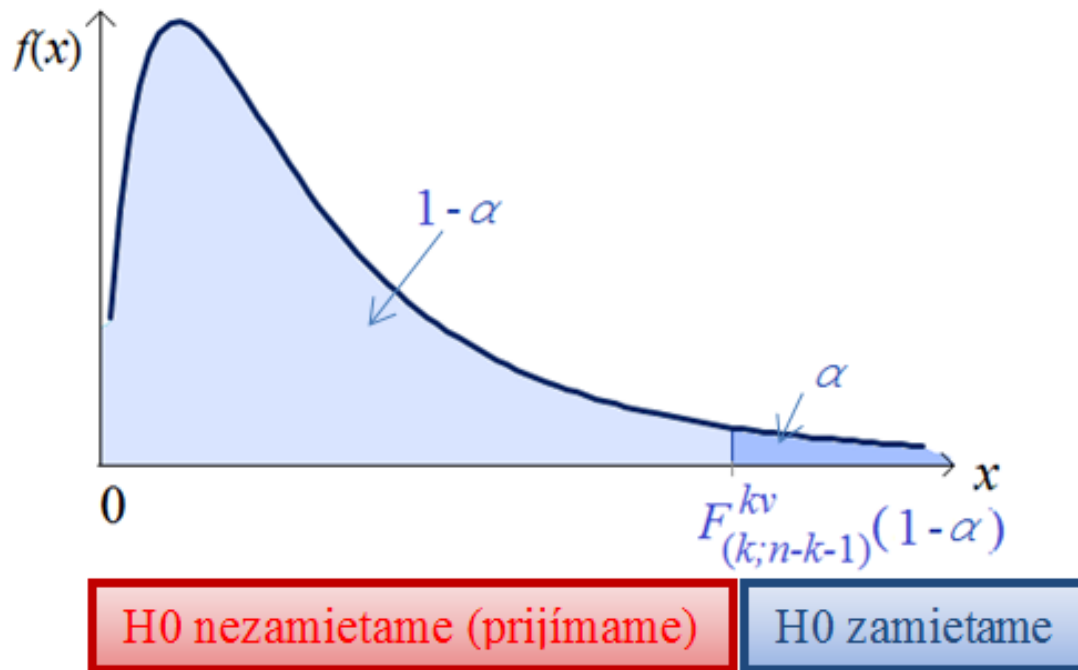
$$F = \frac{\frac{SSR}{k}}{\frac{SSE}{n - k - 1}} = \frac{(n - k - 1) \cdot \sum_{i=1}^{m \cdot 2^k} (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{k \sum_{i=1}^{m \cdot 2^k} (y_i - \hat{y}_i)^2},$$

kde n je rozsah výberového súboru ($n = m \cdot 2^k$), k je počet faktorov a interakcií (regresorov), $\bar{y}$ je priemer nameraných hodnôt, y_i je i -ta nameraná hodnota, $\hat{y}_i$ je i -ta modelovaná hodnota.

Testovacia štatistika F má Fisherovo rozdelenie so stupňami voľnosti $k, n - k - 1$, kde k je počet faktorov a interakcií (regresorov), n je celkový počet nameraných hodnôt.

Rozhodovanie o výsledku testu pomocou

a) **kritického oboru**: Ak $F > F_{(k,n-k-1)}^{kv}(1 - \alpha)$, H_0 zamietame.



b) **p-hodnoty**: $p \leq \alpha$ zamietame H_0 .

Excel: v Exceli: Data analysis → Regression → tabuľka ANOVA

Hodnotiť **kvalitu regresného modelu** môžeme aj

a) pomocou **indexu determinácie R^2** , ktorý vyjadruje pomer modelom vysvetleného súčtu štvorcov SSR a celkového súčtu SSY - je mierou zhody pozorovaných hodnôt s modelom (vyjadruje, aký podiel variability závislej premennej je daným modelom popísaný);

platí $0 \leq R^2 \leq 1$ – dokonalý model vysvetľuje celkový rozptyl ($R^2 = 1$), za dobrý model považujeme ak $R^2 \geq 0,8$;

b) testom **Lack of fit (chyba nedostatočného prispôsobenia)** – možno použiť ak máme pre každé nastavenie faktora skupinu nameraných hodnôt – regresný model dobre popisuje závislosť Y od faktorov, ak je variabilita reziduí približne rovnaká ako variabilita vo vnútri skupín.

Nadbytočnému rozptylu reziduí v dôsledku zlého prispôsobenia modelu hovoríme chyba nedostatočného prispôsobenia (lack of fit).

$$H_0: SSLF - SSPE = 0 > H_1: SSLF - SSPE > 0$$

Testujeme F testom. Zamietnutie H_0 znamená štatisticky významnú chybu neprispôsobenia a teda nedostatočný model.

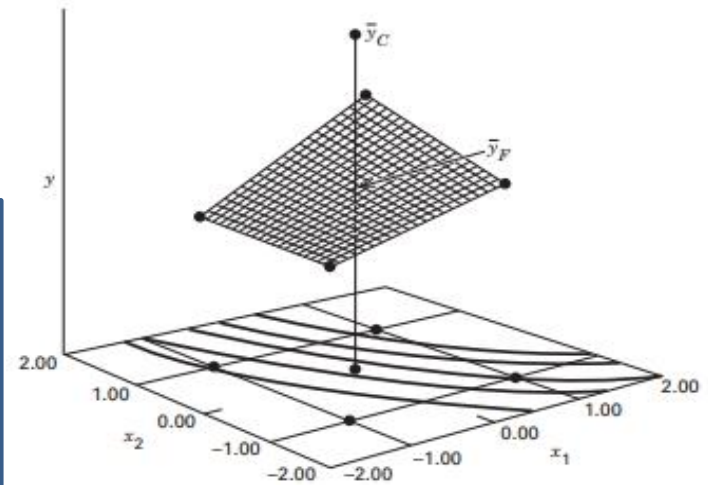
Hodnotiť **kvalitu regresného modelu** môžeme aj

c) **testom krivosti (curvature)** – vyžaduje meranie v centrálnych bodoch - overujeme, či je potrebný úplný kvadratický model $f_L = b_0 + \sum_{j=1}^k b_j t_j + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k b_{ij} t_i t_j + \sum_{j=1}^k b_{jj} t_j^2$

$$H_0: \sum_{j=1}^k b_{jj} = 0 >< H_1: \sum_{j=1}^k b_{jj} \neq 0$$

Pridanie centrálnych bodov do faktorového návrhu poskytuje informáciu o zakrivení odozvovej plochy.

Ak zakrivenie existuje, potom je odozva v centrálnom bode väčšia alebo menšia ako v krajných bodoch experimentálneho priestoru.



Zdroj: Montgomery

Testovacie kritérium $F = \frac{\frac{SS_{CPQ}}{1}}{\frac{\sum(y_i - \bar{y}_C)^2}{n_C - 1}} \sim F(1; n_C - 1)$, kde

súčet štvorcov odchýlok kvadratického zakrivenia $SS_{CPQ} = \frac{n_F n_C (\bar{y}_F - \bar{y}_C)^2}{n_C + n_F}$;

n_C je počet centrálnych bodov;

n_F je počet faktoriálnych bodov (bez replikácií);

$\bar{y}_C$ je priemerné y v centrálnych bodoch;

$\bar{y}_F$ je priemerné y vo faktoriálnych bodoch (bez replikácií);

Test krivosti (replikácie vo faktoriálnych bodoch)

$$H_0: \sum_{j=1}^k b_{jj} = 0 \text{ vs } H_1: \sum_{j=1}^k b_{jj} \neq 0$$

Testovacie kritérium $F = \frac{\frac{SS_{CPQ}}{1}}{\frac{SSPE}{df_{PE}}} \sim F(1; df_{PE})$, kde

súčet štvorcov odchýlok kvadratického zakrivenia $SS_{CPQ} = \frac{n_F n_C (\bar{y}_F - \bar{y}_C)^2}{n_C + n_F}$;

n_C je počet centrálnych bodov;

n_F je počet faktoriálnych bodov (s replikáciami);

$\bar{y}_C$ je priemerné y v centrálnych bodoch;

$\bar{y}_F$ je priemerné y vo faktoriálnych bodoch (s replikáciami);

$SSPE$ je súčet štvorcov odchýlok v dôsledku čistej chyby;

df_{PE} sú stupne voľnosti vypočítané z čistej chyby

d) normalitou reziduí - grafické metódy: histogram, Q-Q plot, normálny pravdepodobnostný graf, homogénosť rozptylu; testy normality

Model by mal vyhovovať:

- ✓ vysokou štatistickou významnosťou (malou p-hodnotu $<0,05$)
- ✓ vysokou koreláciou (R^2 a adj R^2)
- ✓ bez nedostatočnosti modelu

✓ Model should fit with:

- ✓ High significance (low p value: <0.05)
- ✓ High correlation (R^2 and adjusted R^2)
- ✓ No lack of fit

✓ Testovacia štatistika F ANOVY vyjadruje pomer rozptylu vysvetleného vypočítanou regresnou funkciou a rozptylu reziduálnych odchýlok.

✓ Index determinácie vyjadruje percentuálny podiel z rozptylu nameraných hodnôt vysvetlený vypočítanou regresnou funkciou.

✓ Testovacia štatistika F testu LOF vyjadruje pomer rozptylu reziduí spôsobeného nedokonalosťou modelu k rozptylu reziduí vplyvom chyby merania.

Inflačný faktor rozptylu VIF (Variance inflation factor)

detekuje multikolinearitu

$$VIF_i = \frac{1}{1 - R_i^2}$$

kde R_i^2 je koeficient determinácie vo viacnásobnom regresnom modeli pre i -tu nezávislú premennú

multikolinearita = viacnásobná korelácia medzi prediktormi

Interpretácia regresného koeficientu b_i : predstavuje strednú zmenu závislej premennej pre každú jednotkovú zmenu v nezávislej premennej $\Delta x_i = 1$, keď *udržíte všetky ostatné nezávislé premenné konštantné*.

Multikolinearita = nezávislé premenné majú tendenciu sa meniť súbežne.

Multikolinearita sťažuje interpretáciu koeficientov a znižuje silu modelu identifikovať nezávislé premenné, ktoré sú štatisticky významné (ovplyvňuje koeficienty a p-hodnoty).

Ak je $\det(X^T X)^{-1}$ veľmi blízky nule – maticu $(X^T X)^{-1}$ odhadujeme za cenu veľkých štatistických chýb v odhadoch parametrov v regresnom modeli.

VIF (Variance inflation factor)

VIF nadobúda hodnoty 1 a viac.

VIF hovorí, o koľko je rozptyl navýšený pre každý koeficient v porovnaní s tým, ak by neexistovala jeho korelácia s inými prediktormi.

Napríklad hodnota VIF 1,9 vám hovorí, že rozptyl konkrétneho koeficientu je o 90% väčší, ako by ste očakávali, keby neexistovala žiadna multikolinearita.

Pravidlo pre interpretáciu:

- $VIF=1$ - prediktor nekoreluje s ostatnými prediktormi;
- VIF medzi 1 a 5 - stredne koreluje;
- VIF viac ako 5 - vysoko korelované.

Príklad 1

Bolo skúmané ako ovplyvňuje výslednú známku zo skúšky z predmetu MMPVE celkový počet hodín prípravy a počet hodín spánku v noci pred skúškou. Pri skúmaní bol preto u vybraných študentov meraný celkový počet získaných bodov na skúške v závislosti od faktorov x_1 – čas štúdia v hodinách, x_2 – čas spánku v noci pred skúškou v hodinách, pričom $x_1 \in \langle 1, 51 \rangle$, $x_2 \in \langle 0, 12 \rangle$. Pri uvažovanom experimente typu 2^2 a regresnej funkcii $f(x_1, x_2)$ lineárneho typu boli v každom zo 4 naplánovaných bodov vykonané 2 merania:

$$\begin{aligned} f(51; 12) &= 100; f(1; 0) = 18; f(1; 12) = 40; f(51; 0) = 20; \\ f(1; 12) &= 39; f(51; 0) = 29; f(51; 12) = 95; f(1; 0) = 30; \end{aligned}$$

1. Odhadnite metódou najmenších štvorcov MNŠ $\hat{b}$ - koeficienty transformovanej regresnej funkcie lineárneho typu $(\hat{f}_L)_t(t_1, t_2)$.

Príklad 1

2. Napíšte bodový odhad transformovanej regresnej funkcie $(\hat{f}_L)_t(t_1, t_2)$ lineárneho typu.
3. Napíšte bodový odhad regresnej funkcie $\hat{f}_L(x_1, x_2)$ lineárneho typu (bez úpravy).
5. Určte, či je samostatný vplyv faktora x_1 na hodnotu regresnej funkcie lineárneho typu štatisticky významný. Testujte na hladine významnosti $\alpha = 0,05$.
6. Na hladine významnosti $\alpha = 0,01$ otestujte, či je čas spánku pred skúškou rozhodujúci pre výslednú známku zo skúšky .
7. Na hladine významnosti $\alpha = 0,02$ otestujte, či je interakcia času štúdia a spánku rozhodujúca pre známku zo skúšky.
8. Na hladine významnosti $\alpha = 0,03$ otestujte štatistickú významnosť regresného modelu lineárneho typu.
9. Charakterizujte kvalitu získaného modelu pomocou indexu determinácie.

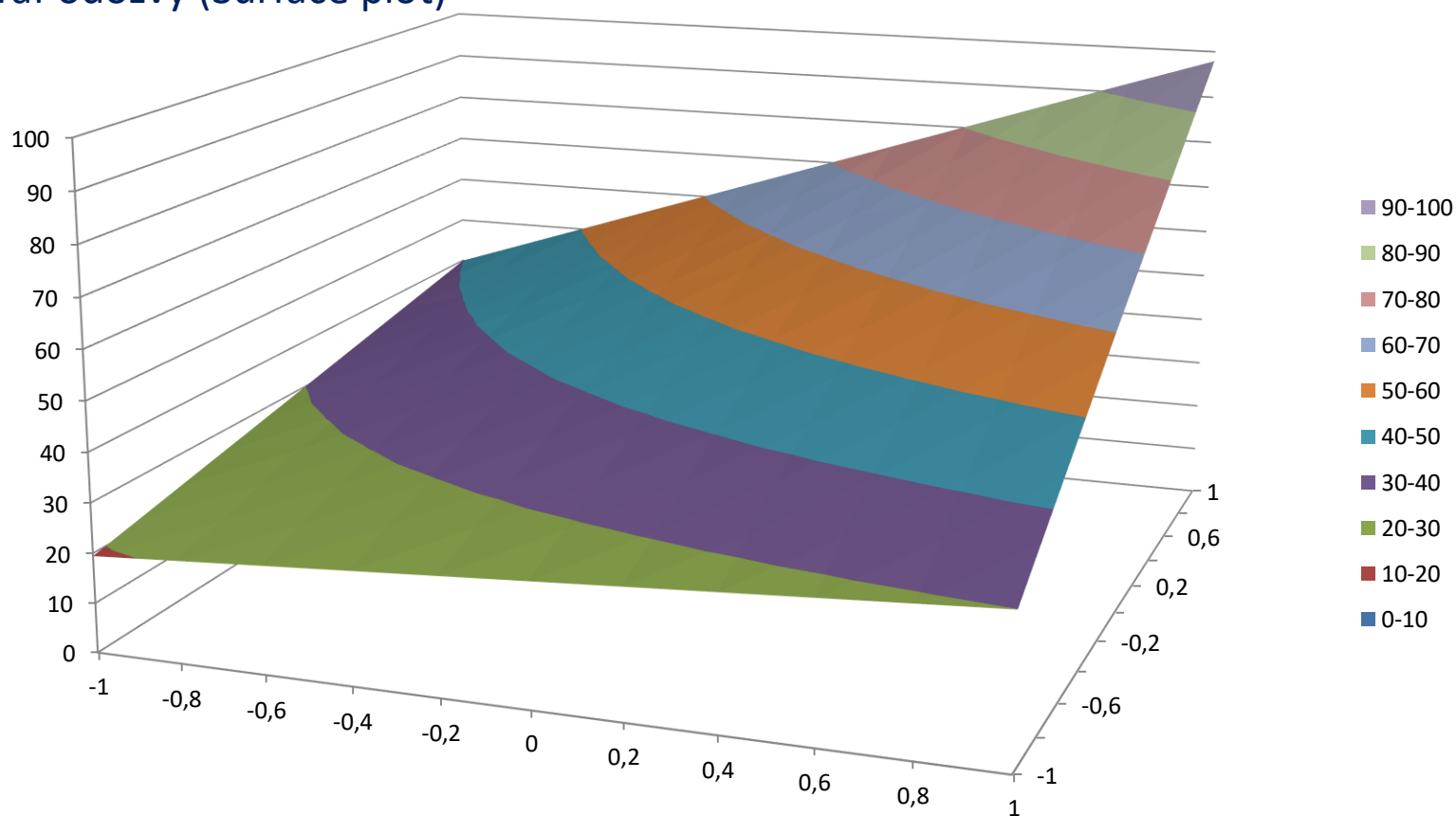
Príklad 1

10. Na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ otestujte kvalitu modelu testom Lack of Fit(3 merania v centrálnom bode 46, 50, 48).
11. Pomocou získaného regresného modelu určte, aký predpokladaný počet získaných bodov možno očakávať u študenta, ktorý sa bude pripravovať 15 hodín a v noci pred skúškou bude spať 6 hodín.

$$(\hat{f}_L)_t(t_1, t_2) = 46,375 + 17,125t_1 + 22,125t_2 + 11,875t_1t_2$$

$$\hat{f}_L(x_1, x_2) = \hat{f}_L\left(\frac{x_1-26,5}{25}, \frac{x_2-6}{6}\right) = 46,375 + 17,125\frac{x_1-26,5}{25} + 22,125\frac{x_2-6}{6} + 11,875\frac{x_1-26,5}{25}\frac{x_2-6}{6} = 18,685 + 0,21x_1 + 1,59x_2 + 0,079x_1x_2$$

3D graf odozvy (Surface plot)



Príklad 2

Bola skúmaná závislosť rýchlosti nitrídového leptania plazmových dosťčiek v závislosti od medzery medzi elektródami, prietoku plynu a výkonu na katóde:

$x_1 \in \langle 0,8; 1,2 \rangle$ je medzera v cm,

$x_2 \in \langle 125; 200 \rangle$ je prietok plynu v cm^3/min ,

$x_3 \in \langle 275; 325 \rangle$ je výkon na katóde vo W.

Pri uvažovanom experimente typu 2^3 boli namerané hodnoty v $10^{-10}\text{m}/\text{min}$:

$f(0,8; 125; 325) = 1052; f(0,8; 125; 275) = 550; f(0,8; 200; 275) = 601;$

$f(1,2; 200; 275) = 635; f(1,2; 125; 275) = 669; f(0,8; 200; 275) = 633;$

$f(1,2; 125; 275) = 650; f(0,8; 125; 275) = 604; f(1,2; 200; 275) = 642;$

$f(0,8; 125; 325) = 1037; f(1,2; 125; 325) = 749; f(1,2; 200; 325) = 860;$

$f(1,2; 125; 325) = 868; f(0,8; 200; 325) = 1075; f(1,2; 200; 325) = 729;$

$f(0,8; 200; 325) = 1063;$

Príklad 2

1. Odhadnite MNŠ $\hat{b}$ - koeficienty transformovanej regresnej funkcie lineárneho typu $(\hat{f}_L)_t(t_1, t_2, t_3)$.
2. Na hladine významnosti 0,05 rozhodnite, ktoré z faktorov a interakcií nie sú štatisticky významné a z modelu ich možno vylúčiť.
3. Napíšte bodový odhad transformovanej regresnej funkcie $(\hat{f}_L)_t(t_1, t_2, t_3)$ lineárneho typu, ktorý vznikne po vylúčení štatisticky nevýznamných členov.
4. Napíšte bodový odhad regresnej funkcie $\hat{f}_L(x_1, x_2, x_3)$ lineárneho typu po vylúčení štatisticky nevýznamných členov (bez úpravy).
5. Určte, či je samostatný vplyv faktora x_1 na hodnotu regresnej funkcie lineárneho typu štatisticky významný. Testujte na hladine významnosti $\alpha = 0,03$.
6. Na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ otestujte, či je prietok plynu rozhodujúci pre rýchlosť nitridového leptania.
7. Na hladine významnosti $\alpha = 0,02$ otestujte, či je samostatný vplyv výkonu na katóde rozhodujúci pre rýchlosť nitridového leptania.

Príklad 2

8. Na hladine významnosti $\alpha = 0,01$ otestujte, či je interakcia medzery medzi elektródami a výkonu na katóde rozhodujúca pre odozvu.
9. Na hladine významnosti $\alpha = 0,03$ otestujte celkovú štatistickú významnosť neúplného kvadratického modelu.
10. Charakterizujte kvalitu získaného modelu pomocou indexu determinácie.
11. Na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ otestujte kvalitu modelu testom Lack of Fit, ak viete, že bolo v centrálnom bode urobených 5 dodatočných meraní s výsledkami 779; 770; 775; 777; 760.
12. Pomocou získaného regresného modelu určte, akú predpokladanú rýchlosť nitridového leptania možno očakávať ak medzera medzi elektródami bude 0,9 cm, prietok plynu bude 150 cm³/min a výkon na katóde bude 280 W.

Príklad 3

Palumbíny 108/11.1

Uvažujme experiment 2^2 , pričom $x_1 \in \langle 10, 80 \rangle$; $x_2 \in \langle 30, 60 \rangle$ a transformovanú regresnú funkciu lineárneho typu, pričom vo všetkých zo 4 bodov sme vykonali po 2 merania, čím sme získali nasledujúce hodnoty:

$$y_1 = f(10, 30) = 5; \quad y_3 = f(10, 60) = 9; \quad y_5 = f(80, 30) = 2;$$

$$y_7 = f(80, 60) = 5; \quad y_2 = f(10, 30) = 7; \quad y_4 = f(10, 60) = 8;$$

$$y_6 = f(80, 30) = 3; \quad y_8 = f(80, 60) = 4$$

Odhadnite $\hat{b}$ - koeficienty transformovanej regresnej funkcie lineárneho typu $(\hat{f}_L)_t(t_1, t_2)$ MNŠ.

Stanovte $\hat{B}$ - koeficienty pôvodnej regresnej funkcie lineárneho typu $\hat{f}_L(x_1, x_2)$.

Na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ otestujte, či

- a) samostatné pôsobenie faktora t_1 má veľký vplyv na hodnotu funkcie $(f_L)_t(t_1, t_2)$;
- b) samostatné pôsobenie faktora t_2 má veľký vplyv na hodnotu funkcie $(f_L)_t(t_1, t_2)$;
- c) spoločné pôsobenie faktorov t_1, t_2 má veľký vplyv na hodnotu funkcie $(f_L)_t(t_1, t_2)$.

Príklad 4

Sledovali sme opotrebovanie pneumatiky pomocou hĺbky dezénu pneumatiky v mm v závislosti od faktorov x_1, x_2 , kde x_1 je počet najazdených km v tisíc km ($x_1 \in \langle 10, 70 \rangle$) a x_2 je vek pneumatiky v rokoch ($x_2 \in \langle 5, 10 \rangle$). Uvažujme experiment typu 2^2 a regresnú funkciu $f(x_1, x_2)$ lineárneho typu, pričom v každom zo 4 bodov sme vykonali po 3 merania, čím sme získali nasledujúce hodnoty:

$$\begin{array}{llll} y_1 = f(10, 5) = 3; & y_4 = f(10, 10) = 2,4; & y_7 = f(70, 5) = 2,25; & y_{10} = f(70, 10) = 1,95; \\ y_2 = f(10, 5) = 3,27; & y_5 = f(10, 10) = 3,09; & y_8 = f(70, 5) = 2,01; & y_{11} = f(70, 10) = 1,5; \\ y_3 = f(10, 5) = 3,5; & y_6 = f(10, 10) = 3,025; & y_9 = f(70, 5) = 2; & y_{12} = f(70, 10) = 1,7. \end{array}$$

1. Metódou najmenších štvorcov odhadnite koeficienty regresnej funkcie lineárneho typu.
2. Na hladine významnosti 5% otestujte, ktoré faktory sú rozhodujúce pre hĺbku dezénu pneumatiky.

$(k + 1)$ faktorový dvojúrovňový plán experimentu

$(k + 1)$ faktorový plán experimentu dostaneme z k faktorového plánu jeho zdvojením a pridaním stĺpca pre ďalší faktor

k faktorový dvojúrovňový plán

bod	t1	t2
I	-1	-1
II	-1	1
III	1	-1
IV	1	1

$(k + 1)$ faktorový dvojúrovňový plán

bod	t1	t2	t3
I	-1	-1	-1
II	-1	-1	1
III	-1	1	-1
IV	-1	1	1
V	1	-1	-1
VI	1	-1	1
VII	1	1	-1
VIII	1	1	1

$k + 1$ faktorový dvojúrovňový plán experimentu

bod	t1	t2	t3
I	-1	-1	-1
II	-1	-1	1
III	-1	1	-1
IV	-1	1	1
V	1	-1	-1
VI	1	-1	1
VII	1	1	-1
VIII	1	1	1

bod	t1	t2	t3	t4
I	-1	-1	-1	-1
II	-1	-1	-1	1
III	-1	-1	1	-1
IV	-1	-1	1	1
V	-1	1	-1	-1
VI	-1	1	-1	1
VII	-1	1	1	-1
VIII	-1	1	1	1
IX	1	-1	-1	-1
X	1	-1	-1	1
XI	1	-1	1	-1
XII	1	-1	1	1
XIII	1	1	-1	-1
XIV	1	1	-1	1
XV	1	1	1	-1
XVI	1	1	1	1

Možný je aj zápis plánu experimentu v tvare:

	A	B
bod	t1	t2
I	-1	-1
II	1	-1
III	-1	1
IV	1	1

	A	B	C
bod	t1	t2	t3
I	-1	-1	-1
II	1	-1	-1
III	-1	1	-1
IV	1	1	-1
V	-1	-1	1
VI	1	-1	1
VII	-1	1	1
VIII	1	1	1

Napr. MINITAB používa plán experimentu v takomto tvare.

Neúplný kvadratický model - stanovenie regresnej funkcie lineárneho typu pre tri faktory

1. funkcia lineárneho typu: $y = f_L(x_1, x_2, x_3) = B_0 + B_1x_1 + B_2x_2 + B_3x_3 + B_{12}x_1x_2 + B_{13}x_1x_3 + B_{23}x_2x_3 + B_{123}x_1x_2x_3$

2. transformovaná (kódovaná) funkcia lineárneho typu:

$$y_t = (f_L)_t(t_1, t_2, t_3) = b_0 + b_1t_1 + b_2t_2 + b_3t_3 + b_{12}t_1t_2 + b_{13}t_1t_3 + b_{23}t_2t_3 + b_{123}t_1t_2t_3$$

3. odhad transformovanej regresnej funkcie lineárneho typu:

$$\hat{y}_t = (\hat{f}_L)_t(t_1, t_2, t_3) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1t_1 + \hat{b}_2t_2 + \hat{b}_3t_3 + \hat{b}_{12}t_1t_2 + \hat{b}_{13}t_1t_3 + \hat{b}_{23}t_2t_3 + \hat{b}_{123}t_1t_2t_3$$

4. odhad pôvodnej regresnej funkcie lineárneho typu (v pôvodných jednotkách):

$$\hat{y} = \hat{f}_L(x_1, x_2, x_3) = \hat{B}_0 + \hat{B}_1x_1 + \hat{B}_2x_2 + \hat{B}_3x_3 + \hat{B}_{12}x_1x_2 + \hat{B}_{13}x_1x_3 + \hat{B}_{23}x_2x_3 + \hat{B}_{123}x_1x_2x_3$$

Úplný kvadratický model - stanovenie kvadratickej regresnej funkcie pre tri faktory

1. funkcia pre úplný kvadratický model:

$$y = f(x_1, x_2, x_3) = B_0 + B_1x_1 + B_2x_2 + B_3x_3 + B_{11}x_1^2 + B_{22}x_2^2 + B_{33}x_3^2 + B_{12}x_1x_2 + B_{13}x_1x_3 + B_{23}x_2x_3 + B_{123}x_1x_2x_3$$

2. transformovaná kvadratická funkcia:

$$y_t = f_t(t_1, t_2, t_3) = b_0 + b_1t_1 + b_2t_2 + b_3t_3 + b_{11}t_1^2 + b_{22}t_2^2 + b_{33}t_3^2 + b_{12}t_1t_2 + b_{13}t_1t_3 + b_{23}t_2t_3 + b_{123}t_1t_2t_3$$

3. odhad transformovanej kvadratickej regresnej funkcie:

$$\hat{y}_t = \hat{f}_t(t_1, t_2, t_3) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1t_1 + \hat{b}_2t_2 + \hat{b}_3t_3 + \hat{b}_{11}t_1^2 + \hat{b}_{22}t_2^2 + \hat{b}_{33}t_3^2 + \hat{b}_{12}t_1t_2 + \hat{b}_{13}t_1t_3 + \hat{b}_{23}t_2t_3 + \hat{b}_{123}t_1t_2t_3$$

4. odhad pôvodnej kvadratickej regresnej funkcie: $\hat{y} = \hat{f}(x_1, x_2, x_3) = \hat{B}_0 + \hat{B}_1x_1 + \hat{B}_2x_2 + \hat{B}_3x_3 + \hat{B}_{11}x_1^2 + \hat{B}_{22}x_2^2 + \hat{B}_{33}x_3^2 + \hat{B}_{12}x_1x_2 + \hat{B}_{13}x_1x_3 + \hat{B}_{23}x_2x_3 + \hat{B}_{123}x_1x_2x_3$

Regresný model – všeobecný zápis pre n faktorov

- **Lineárny (First-Order Model)**

$$Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = B_0 + \sum_{i=1}^n B_i x_i$$

- **Kvadratický neúplný – regresný model lineárneho typu (First-Order Model with Interaction)**

$$Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = B_0 + \sum_{i=1}^n B_i x_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n B_{ij} x_i x_j$$

- **Kvadratický úplný (Second-Order Model)**

$$Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = B_0 + \sum_{i=1}^n B_i x_i + \sum_{i=1}^n B_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n B_{ij} x_i x_j$$

Úplný kvadratický model - jeho potrebu overujeme:

- testom krivosti
- testom Lack of fit
- pomocou ANOVY

Do plánu experimentu musia byť zaradené axiálne body.

Používame:

- Kombinovaný plán (Composite design)
- Trojúrovňový plán (Three level design)
- Box-Behnkenov plán

Koeficienty úplného kvadratického modelu nie sú polovicou efektov, ak to bolo pri lineárnom a neúplnom kvadratickom modeli.

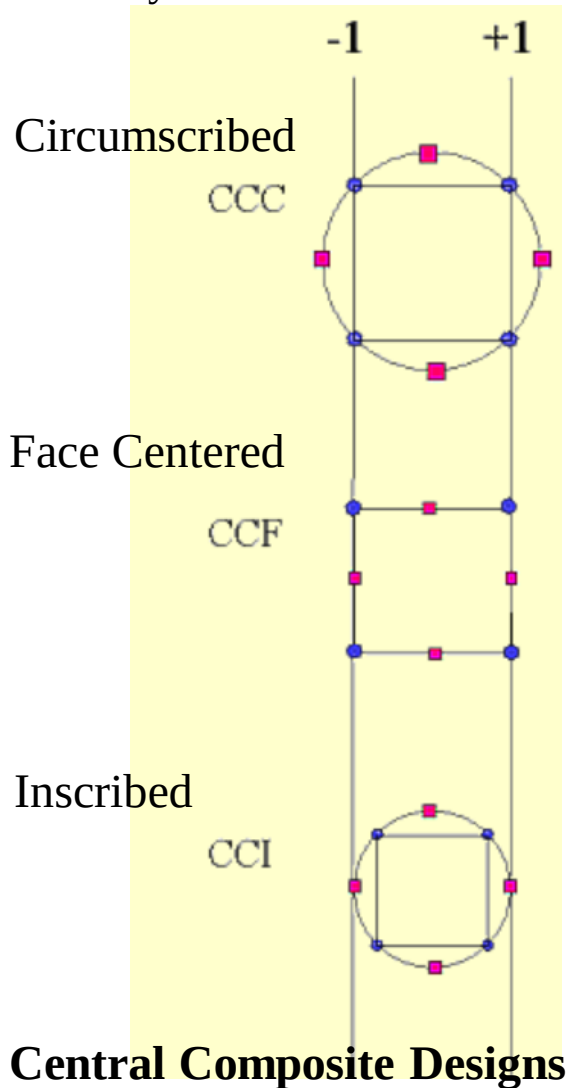
Poznámka:

Optimálne hodnoty významných parametrov pre úplný kvadratický model hľadáme v stacionárnych bodoch.

U lineárnych modelov hovoríme o optimálnej úrovni faktora (dolnej alebo hornej) – extrémny nemá, pretože grafom je rovina, resp. nadrovina.

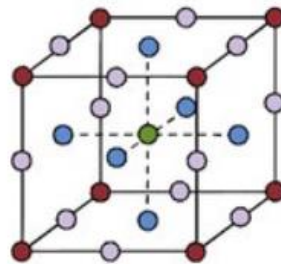
Úplný kvadratický model (Response surface design)

2 faktory:

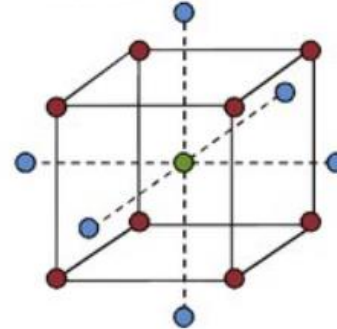


3 faktory:

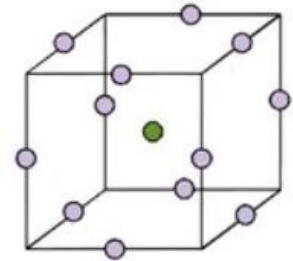
a) Full factorial,
 $n = 27$



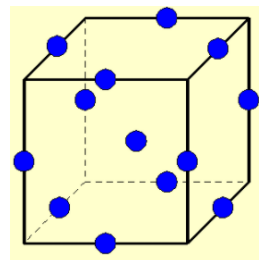
b) CCD,
 $n = 15$



c) BBD,
 $n = 13$



<https://www.researchgate.net/>



A Box-Behnken Design for Three Factors

<https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/index.htm>

Úplný kvadratický model pre dva faktory - optimalizácia

$$y_t = f_t(t_1, t_2) = b_0 + b_1 t_1 + b_2 t_2 + b_{11} t_1^2 + b_{22} t_2^2 + b_{12} t_1 t_2$$

$$\frac{\partial y_t}{\partial t_1} = b_1 + 2b_{11} t_1 + b_{12} t_2 = 0$$

$$\frac{\partial y_t}{\partial t_2} = b_2 + 2b_{22} t_2 + b_{12} t_1 = 0$$

$$2b_{11} t_1 + b_{12} t_2 = -b_1$$

$$2b_{22} t_2 + b_{12} t_1 = -b_2$$

$$\begin{pmatrix} 2b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & 2b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$2 \begin{pmatrix} b_{11} & \frac{b_{12}}{2} \\ \frac{b_{12}}{2} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot B \cdot x_t = -b \Rightarrow x_t = -\frac{1}{2} B^{-1} b$$

Použijeme značenie

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \frac{b_{12}}{2} \\ \frac{b_{12}}{2} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$x_t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Úplný kvadratický model pre dva faktory - optimalizácia

$$y_t = f_t(t_1, t_2) = b_0 + b_1 t_1 + b_2 t_2 + b_{11} t_1^2 + b_{22} t_2^2 + b_{12} t_1 t_2$$

zapísaný pomocou matíc $y_t = f_t(t_1, t_2) = b_0 + x_t^T b + x_t^T B x_t$,

$$\text{kde } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, x_t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \frac{b_{12}}{2} \\ \frac{b_{12}}{2} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Stacionárny bod: $x_t = -\frac{1}{2} B^{-1} b$

Typ extrému sa určí podľa koreňov characteristickej rovnice matice B :

$$\det(B - \lambda I) = 0$$

- a) pre $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ je stacionárny bod minimom;
- b) pre $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ je stacionárny bod maximom;
- c) pre rôzne znamienka λ_1, λ_2 je stacionárny bod sedlovým bodom.

Optimálna hodnota odozvy je pre nájdený vektor $x_{t \text{ optim}}$ rovná

$$y_{t \text{ optim}} = b_0 + x_{t \text{ optim}}^T b + x_{t \text{ optim}}^T B x_{t \text{ optim}}$$

Optimalizácia v Minitabe

The screenshot illustrates the steps to access the Response Optimizer in Minitabe. The 'Stat' menu is open, and the 'DOE' (Design of Experiments) sub-menu is selected. Within 'DOE', the 'Factorial' option is chosen, leading to a list of tools. The 'Response Optimizer...' option is highlighted at the bottom of this list. A blue arrow points from this option to the 'Response Optimizer' dialog box on the right. In the dialog, the 'Goal' for 'Molecular Weight' is set to 'Do not optimize'. Another blue arrow points from the 'Do not optimize' option in the goal list to the 'Response Optimizer' title bar at the bottom of the dialog.

Stat Graph View Help Assistant Predictive Analytics Module Additional Tools

- Basic Statistics
- Regression
- ANOVA
- DOE**
 - Screening
 - Factorial**
 - Create Factorial Design...
 - Define Custom Factorial Design...
 - Select Optimal Design...
 - Pre-Process Responses for Analyze Variability...
 - Response Surface
 - Analyze Factorial Design...
 - Analyze Binary Response...
 - Analyze Variability...
 - Mixture
 - Predict...
 - Factorial Plots...
 - Cube Plot...
 - Contour Plot...
 - Surface Plot...
 - Overlaid Contour Plot...
 - Taguchi
 - Response Optimizer...
 - Control Charts
 - Quality Tools
 - Reliability/Survival
 - Predictive Analytics
 - Multivariate
 - Time Series
 - Tables
 - Nonparametrics
 - Equivalence Tests
 - Power and Sample Size

Equation in Uncoded Units

$$\text{molecular weight} = 2512,8 + 62,8 A - 5,3 B - 12,8 B^*C + 0,9 B^*D + 0,9 B^*C^*D - 11,6 A^*B$$

Fits and Diagnostics for Unusual Observed Values

	Obs	molecular weight	Fit	SE Fit	95% CI	Resid	Std Resid	Del Resid	HI
	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	
↓	StdOrder	RunOrder	CenterPt	Blocks	A	B	C	D	

Response Optimizer

Optimize up to 25 responses:

Response	Goal	Target
Molecular Weight	Do not optimize	

Do not optimize
Minimize
Target
Maximize

Setup... Options... Graphs...
Results... Storage... View Model...
Help OK Cancel

Response Optimizer

Identify the combination of predictor values that jointly optimize one or more fitted responses.

Optimalizácia v Minitabe - Setup

Response Optimizer: Setup

Response	Goal	Lower	Target	Upper	Weight	Importance
Molecular Weight	Target	2300	2450	2775	1	1

Response Optimizer: Setup

Response	Goal	Lower	Target	Upper	Weight	Importance
Molecular Weight	Minimize	2300	2300	2775	1	1

Response Optimizer: Setup

Response	Goal	Lower	Target	Upper	Weight	Importance
Molecular Weight	Maximize	2300	2775	2775	1	1

Desirability functions for different goals - how weights affect their shapes

Minimize the response



Hit a target value



Maximize the response



Help OK Cancel

Optimalizácia v Minitabe

Options

Response Optimizer: Options

Constraints

Variable	Constraint	Hold Value	Lower	Upper
Temperature	Constrain to region			
Catalyst concentration	Hold at value			
Time	No constraints			

Starting Values

Variable	Starting Value
Temperature	
Catalyst concentration	
Time	

Confidence level for all intervals: 95

Type of confidence level: Two-sided

Help OK Cancel

Results

Response Optimizer: Results

☒ Parameters

☒ Solutions

Number of solutions to display: 1

☒ Prediction

☒ Variable ranges

☒ Starting point

Help OK Cancel

Výstup je v tvare:

Parameters

Response	Goal	Lower	Target	Upper	Weight	Importance
Molecular Weight	Maximum	2300	2775		1	1

Solution

Solution	Temperature	Catalyst concentration	Time	Molecular Weight Fit	Composite Desirability
1	200	8	30	2737,81	0,921711

Optimalizácia v Exceli_riešenie cez Solver

Výstup regresnej analýzy – odhad koeficientov transformovanej regresnej funkcie:

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%
Intercept	79,75	1,213605281	65,7133	8,4E-10	76,7804	82,7196
t1	9,82474747	0,858148524	11,4488	2,7E-05	7,72493	11,9246
t2	4,21599026	0,858148524	4,91289	0,00268	2,11618	6,3158
t1*t2	-7,75	1,213605281	-6,3859	0,00069	-10,72	-4,7804
t1^2	-8,875	0,959439217	-9,2502	9E-05	-11,223	-6,5272
t2^2	-5,125	0,959439217	-5,3417	0,00176	-7,4727	

Doplnok Excelu – Riešiteľ (Solver)

	F	G	H	I	J	K
41	Optimalizacia - hladame maximalnu hodnotu odozvy - riesenie cez Solver					
42	Intercept	79,75	1			
43	t1	9,82474747	0,558192709			
44	t2	4,21599026	-0,01073203			
45	t1*t2	-7,75	-0,00599054			
46	t1^2	-8,875	0,311579101			
47	t2^2	-5,125	0,000115177			
48	y modelovane=		82,46942817	- je optimalna hodnota odozvy		

nastavenie buniek, ktoré budú použité pri výpočte maxima funkcie

$$f_t(t_1, t_2) = b_0 + b_1 t_1 + b_2 t_2 + b_{12} t_1 t_2 + b_{11} t_1^2 + b_{22} t_2^2$$

1
=H43*H44
=H43^2
=H44^2
=SUMPRODUCT(G42:G47;H42:H47)

Parametre doplnku Riešiteľ

Nastaviť cieľ: SHS48

Do: ☒ Maximum ☐ Minimum ☐ Hodnota: 0

Zmenou premenných buniek: SHS43:SH44

Podlieha obmedzeniam:

- SHS43 <= 1
- SHS43 >= -1
- SHS44 <= 1
- SHS44 >= -1

riešenie hľadáme iba v rámci experimentálneho priestoru

☐ Vytvorte nezápornú hodnotu premenných, ktoré sú bez obmedzení

Vybrať metódu riešenia: Evolučný algoritmus

Metóda riešenia

Ak chcete v doplnku Riešiteľ riešiť spoj. nelineárne problémy, vyberte nástroj Nelineárny algoritmus GRG. Ak chcete riešiť lineárne problémy, vyberte nástroj Simplex LP algoritmus. Ak chcete riešiť nespojité problémy, vyberte nástroj Evolučný algoritmus.

Pomocník Riešiť Zavrieť

Typy plánov experimentov

ortogonálne

- všetky stĺpce matice plánu experimentu X sú na seba kolmé a sú nenulové

rotabilné

- rozptyl modelovaných hodnôt $\hat{y}_i$ je konštantný vo všetkých bodoch rovnako vzdialených od stredu plánu experimentu, t.j. rozptyl predpokladanej odozvy v ktoromkoľvek bode x_i závisí iba od vzdialenosti x_i od stredového bodu návrhu. Plán môžeme otáčať okolo stredového bodu bez zmeny rozptylu predikcie (žiaduce pre kvadratické modely).

screeningové

- identifikujeme , ktorý z mnohých faktorov má na odozvu významný vplyv (obvykle pre viac ako 5 faktorov)

response surface

- výstupom je odozвовá plocha, resp. hyperplocha (najúčinnšie sú pre menej ako 5 faktorov). Používajú kvadratické modely (centrálne kompozitné a Box-Behnken plány) a pri návrhu sú potrebné najmenej tri úrovne každého faktora.

úplné a čiastočné

- meranie realizujeme vo všetkých alebo vo vybraných bodoch

Hierarchický model

Hierarchický model by mal zahŕňať všetky členy nižšieho rádu (lower-order terms), ktoré obsahujú členy vyššieho rádu (higher-order terms), ktoré sa v modeli nachádzajú.

Nehierarchický model nemusí zostať stabilný, ak sa zmení spôsob kódovania.

Napríklad:

- ak je interakcia BD štatisticky významná, potom by mal model zahŕňať aj lineárny vplyv faktorov B a D, aj keď ich hlavné účinky nie sú signifikantné;
- model, ktorý obsahuje interakciu ABC je hierarchický, ak obsahuje aj členy A, B, C, AB, AC a BC.

Skutočné nekódované modely (v pôvodných jednotkách) budú nesprávne, ak boli odvodené z nehierarchických kódovaných modelov.

DOE v praxi – používané skratky pre faktory a interakcie

Názvom faktorov sa priradujú veľké písmená A, B, C

Interakciu medzi faktormi A, B zapisujeme: $A*B = A \times B = AB$

Pre 2 faktory je možná jediná interakcia (2FI): AB

Pre 3 faktory sú možné 4 interakcie:

- tri interakcie 2. rádu (2FI): AB, AC, BC
- jedna interakcia 3. rádu (3FI): ABC

Pre 4 faktory existuje 11 možných interakcií:

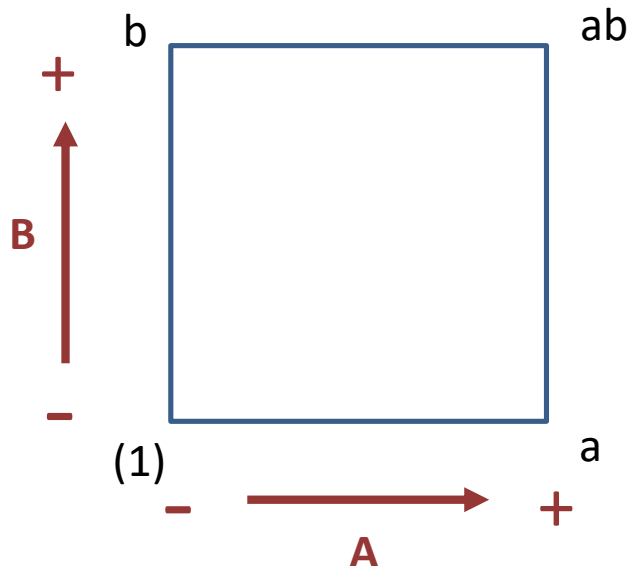
- šesť 2. rádu (2FI): AB, AC, AD, BC, BD, CD
- štyri 3. rádu (3FI): ABC, ABD, ACD, BCD
- jedna 4. rádu (4FI): ABCD

Faktorový experiment n^k

sa spája so súčasným variovaním všetkých k faktorov.

Faktory môžu mať ľubovoľný počet úrovní – v praxi $n = 2, 3$ alebo 5 .

Najjednoduchší dvojúrovňový experiment 2^2 zobrazujeme



Konvencia:

(1) oba faktory na dolnej úrovni

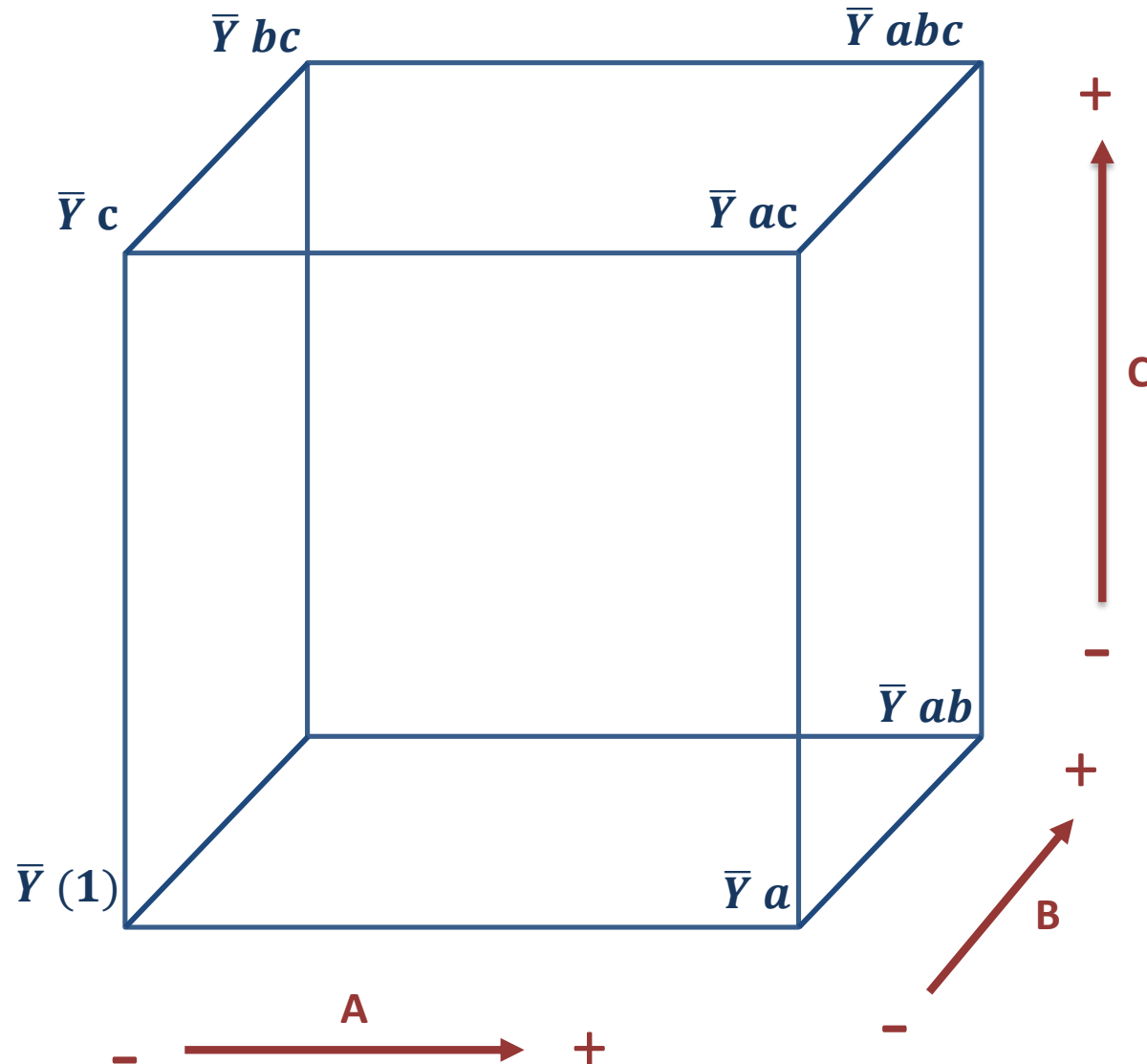
a predstavuje hornú úroveň faktora A a dolnú úroveň faktora B

b predstavuje hornú úroveň faktora B a dolnú úroveň faktora A

ab reprezentuje oba faktory na hornej úrovni

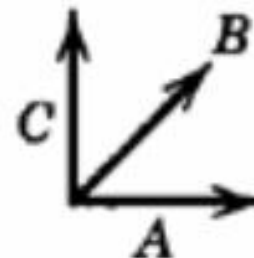
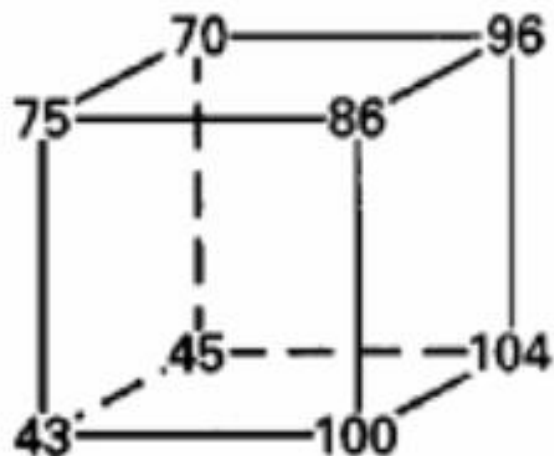
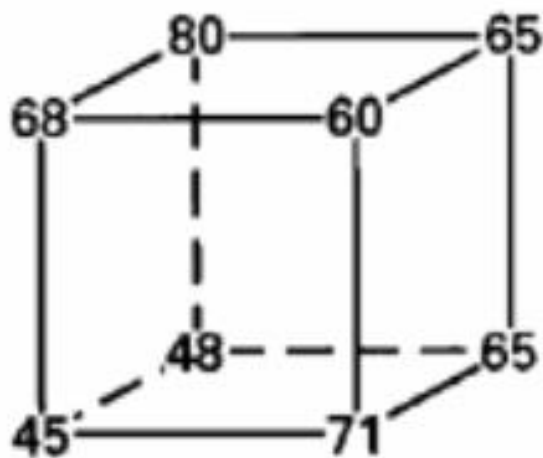
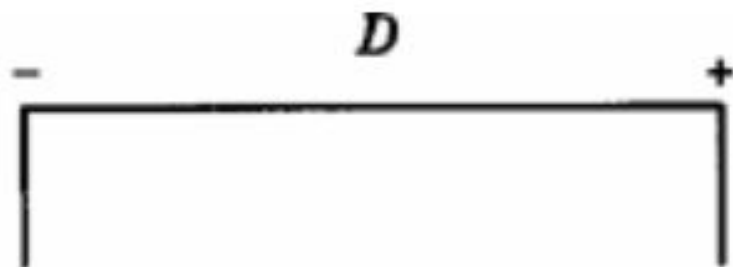
Grafické znázornenie nameraných hodnôt odozvy

Kockový diagram (Cube PLOT) pre tri faktory



CPlot umožňuje prehľadné znázornenie priemerných hodnôt výstupnej premennej v jednotlivých bodoch experimentu.

Kockový diagram (CPLLOT) pre štyri faktory



Hlavný efekt (main effect) faktora

je priemerné zvýšenie (zníženie) hodnoty odozvy Y ak sa faktor zmení z dolnej úrovne (-1) na hornú úroveň (1).

Výpočet efektu faktora je možné (v závislosti od konkrétnej situácie) vypočítať rôznymi spôsobmi:

- ako rozdiel priemerov,
- ako priemer rozdielov,
- znamienkovou metódou,
- Yatesovou metódou,
- ako dvojnásobok regresných koeficientov.

- Efekt faktora (main effect) počítaný pomocou odozvovej tabuľky, ktorú vymysleli v General Electric - ako rozdiel priemerov odoziev pre faktor nastavený na hornej úrovni (+1) a pre faktor nastavený na dolnej úrovni (-1)

odozvová tabuľka pre stanovenie efektu trojfaktorového efektu

cislo kroku	odozva	faktory						interakcie							
		A		B		C		AB		AC		BC		ABC	
		teplota		katalyzator		cistota									
		60 °C	70 °C	typ K1	typ K2	95%	99%								
		-1	1	-1	1	-1	1								
1	26,2	26,2		26,2		26,2			26,2		26,2		26,2	26,2	
2	22,7		22,7	22,7		22,7		22,7		22,7		22,7		22,7	
3	47,1	47,1			47,1	47,1		47,1		47,1	47,1				47,1
4	46,4		46,4		46,4	46,4			46,4	46,4		46,4		46,4	
5	40,9	40,9		40,9		40,9			40,9	40,9		40,9			40,9
6	34,1		34,1	34,1		34,1		34,1		34,1	34,1			34,1	
7	42,9	42,9			42,9	42,9		42,9		42,9		42,9		42,9	
8	40		40		40	40			40		40		40		40
sucet	300,3	157,1	143,2	123,9	176,4	142,4	157,9	146,8	153,5	152,9	147,4	168,5	131,8	149,6	150,7
priemer	37,5	39,3	35,8	31,0	44,1	35,6	39,5	36,7	38,4	38,2	36,9	42,1	33,0	37,4	37,7
efekt		-3,5		13,1		3,9		1,7		-1,4		-9,2		0,3	

Grafom efektu faktora je úsečka:

- koncové body tejto úsečky sú priemery odoziev, kedy bol daný faktor na hornej a dolnej úrovni;
- uhol tejto úsečky s x-ovou osou ukazuje veľkosť efektu:
- nulový efekt zodpovedá úsečke rovnobežnej s x-ovou osou;
- smer rastúci znamená, že prechodom z dolnej na hornú úroveň faktora odozva vzrastie;
- smer klesajúci znamená, že prechodom z dolnej na hornú úroveň faktora odozva klesne;

Píšeme

$$ef(A) = \bar{y}_{A^+} - \bar{y}_{A^-}$$

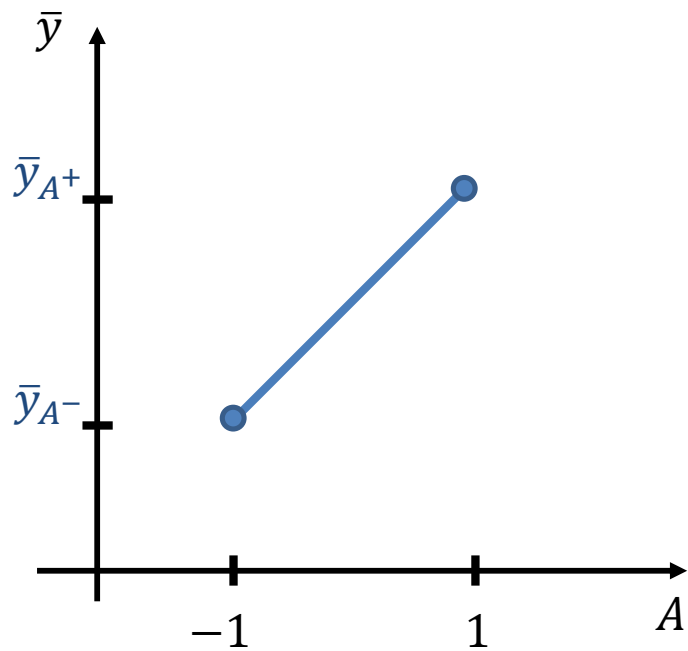
kde $\bar{y}_{A^+}$ je priemerná odozva pri nastavení faktora na hornú úroveň a $\bar{y}_{A^-}$ je priemerná odozva pri nastavení faktora na dolnú úroveň .

Pozn.: U lineárnych a neúplných kvadratických modelov hľadáme optimálnu úroveň faktorov porovnaním grafov efektov.

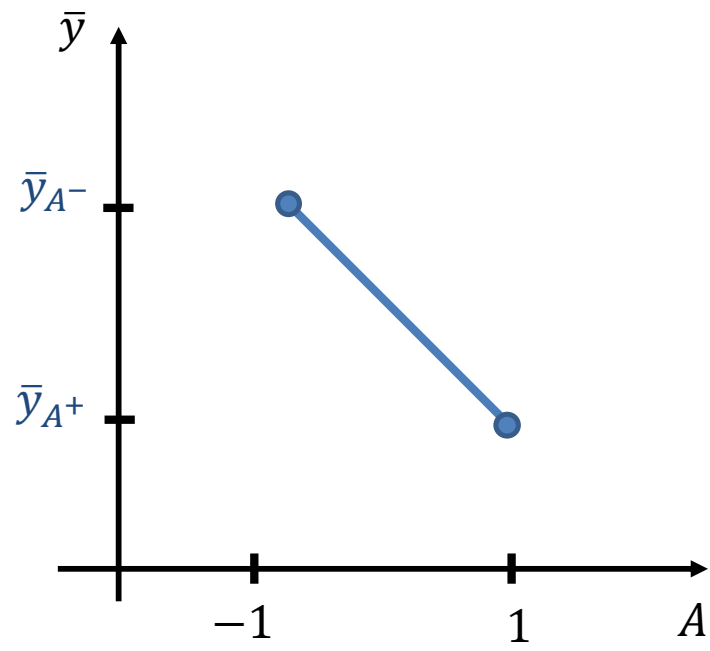
U kvadratických modelov sa optimálna úroveň počíta.

$$ef(A) = \bar{y}_{A^+} - \bar{y}_{A^-}$$

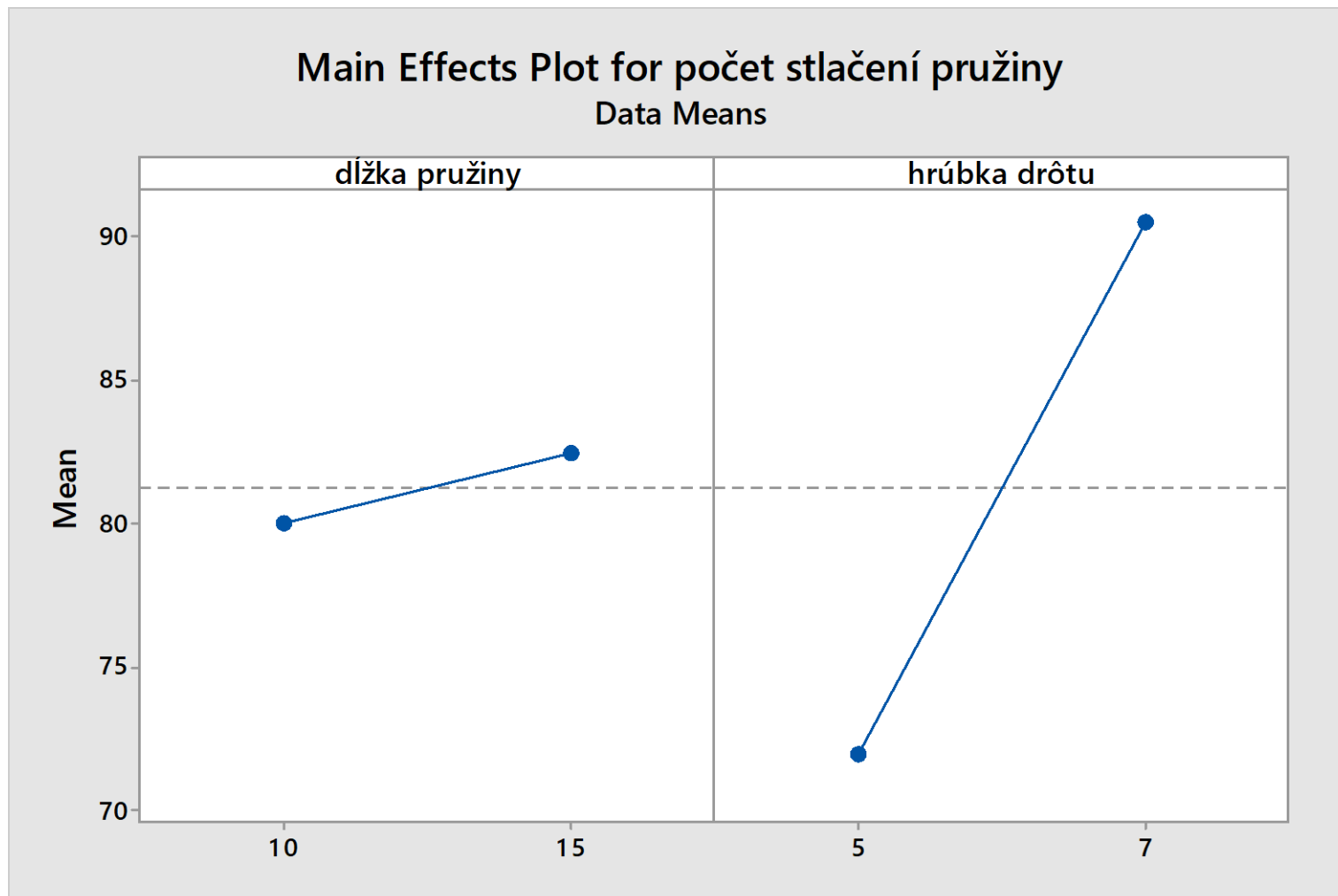
$$ef(A) > 0$$



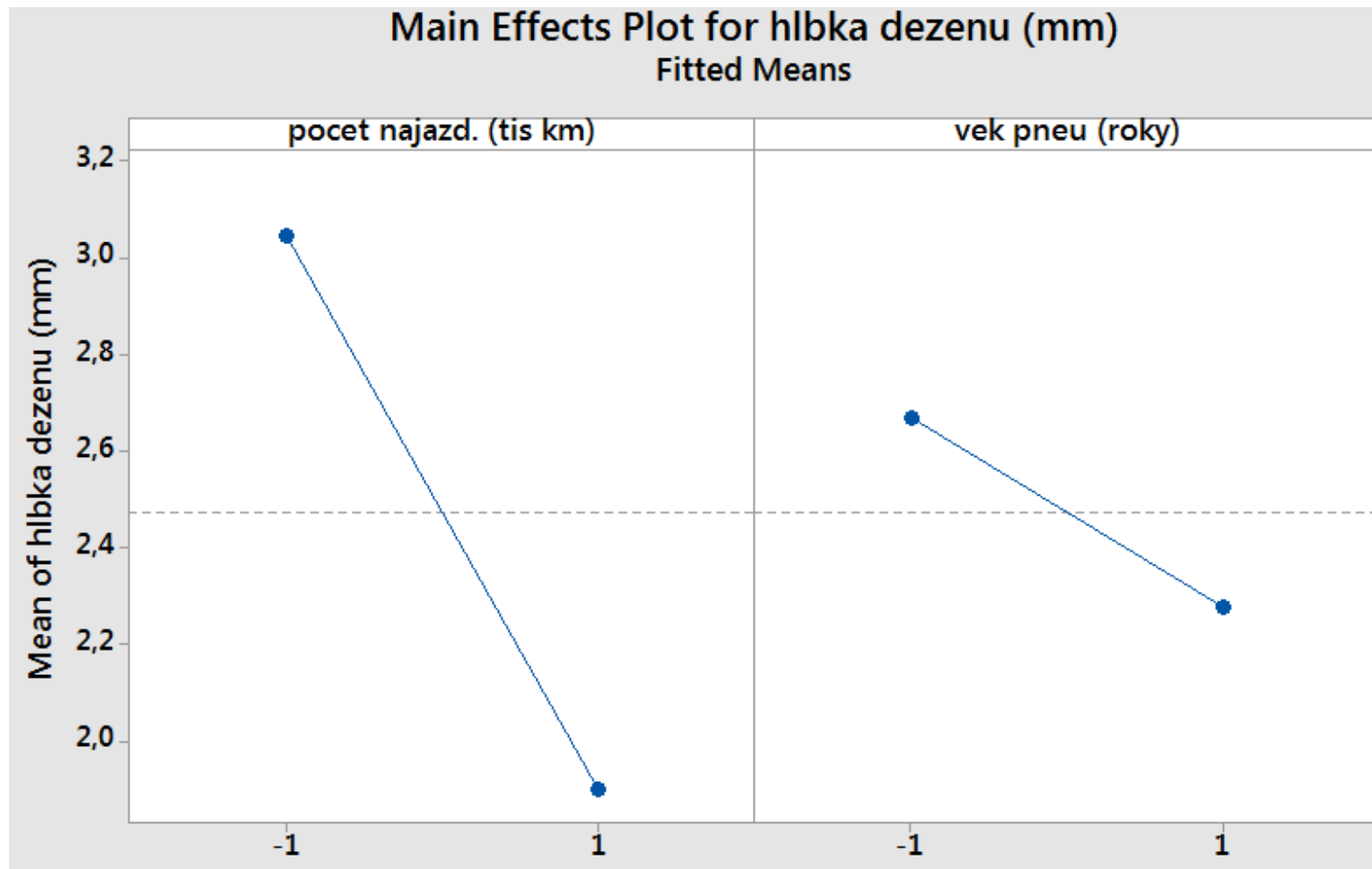
$$ef(A) < 0$$



Podľa grafov hlavných efektov pre dĺžku pružiny a hrúbku drôtu (pri zanedbaní interakcie medzi faktormi), môžeme povedať, že najvyššiu životnosť bude mať pružina pri dĺžke pružiny 15 cm a hrúbke drôtu 7 mm.

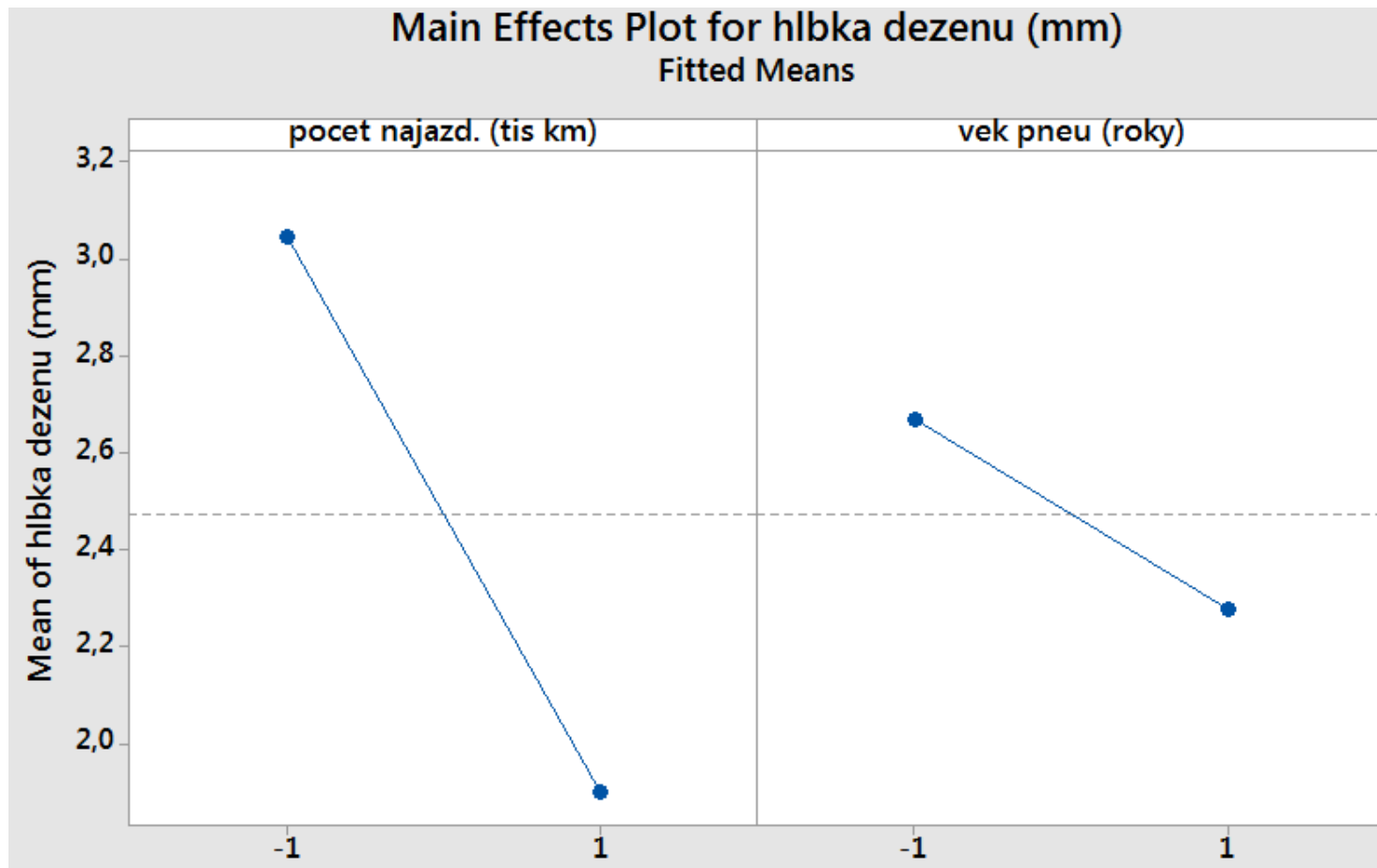


Ak zanedbáme interakcie medzi faktormi, môžeme povedať podľa hlavných efektov faktorov, že najvyššiu životnosť bude mať pneumatika pri nastavení faktorov počet najazdených kilometrov a vek pneumatiky na dolnú úroveň.



Pri zmene nastavenia faktora počet najazdených kilometrov z dolnej na hornú úroveň klesla hĺbka dezénu pneumatiky v priemere o viac ako 1 mm.

Pri zmene nastavenia faktora vek pneumatiky z dolnej na hornú úroveň klesla hĺbka dezénu pneumatiky v priemere o 0,4 mm.



Vplyv interakcií (Interaction effect)

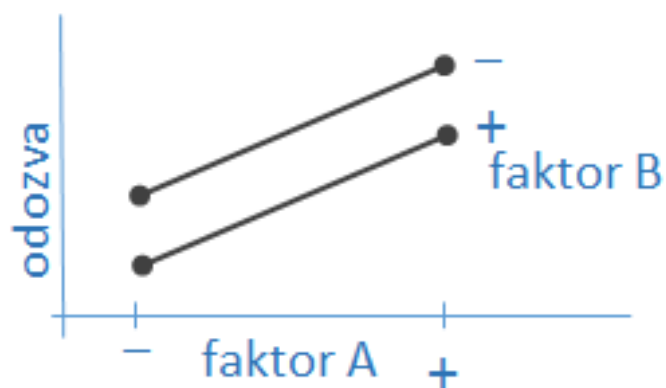
Interakcia znamená, že efekt jedného faktora závisí na úrovni druhého faktora, t.j. tieto dva faktory nie sú nezávislé.

Významná interakcia znamená, že efekt faktorov na závislú premennú nie je aditívny a skúmanie hlavných efektov samostatných faktorov sa dostáva do úzadia. Interakcia sa interpretuje porovnaním priemerov jednotlivých úrovní.

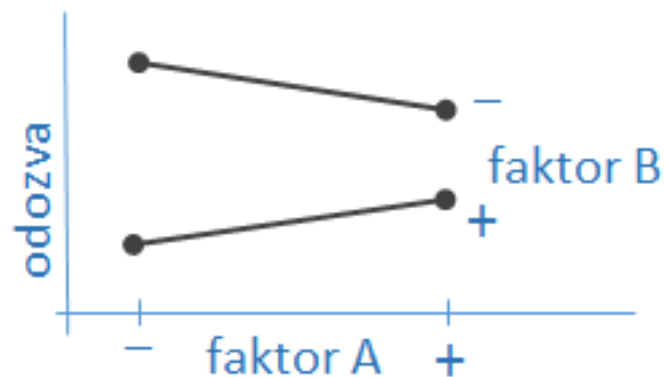
Graf interakcií je graf zobrazujúci priemery každej úrovne jedného faktora pri konštantnej úrovni druhého faktora.

- Rovnobežné priamky ukazujú, že interakcia medzi faktormi neexistuje.
- Ak priamky nie sú rovnobežné, existuje interakcia medzi faktormi.

Bez interakcie
(rovnobežné priamky)



Interakcia
(rôznobežné priamky)



Interakcia medzi dvoma faktormi je prítomná, ak efekt jedného faktora na odozve Y nie je rovnaký pre všetky úrovne iného faktora.

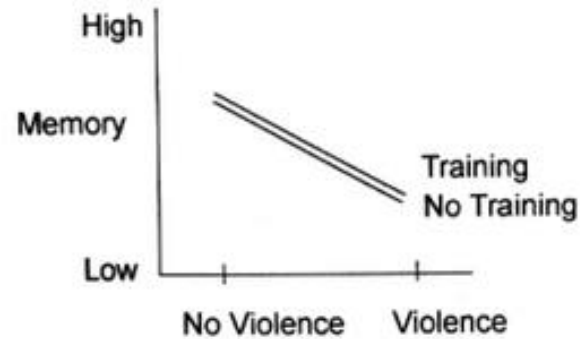
Interpretácia grafov interakcií

	Nulový hlavný efekt faktora A	Kladný hlavný efekt faktora A	Záporný hlavný efekt faktora A
bez interakcie			
malá interakcia			
veľká interakcia			

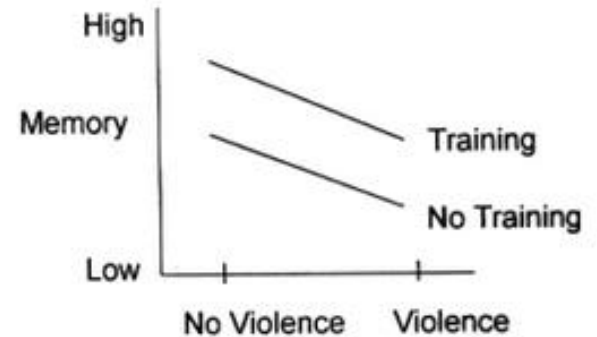
Main Effects without an Interaction

<http://web.pdx.edu>

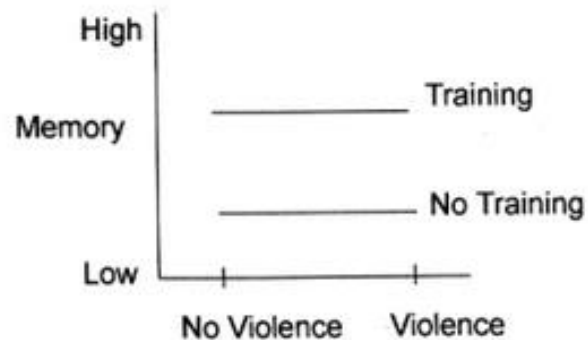
Main Effect for Violence



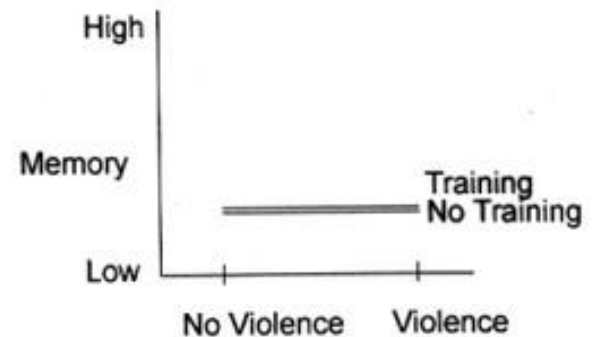
**Main Effect for Violence,
Main Effect for Training**



Main Effect for Training



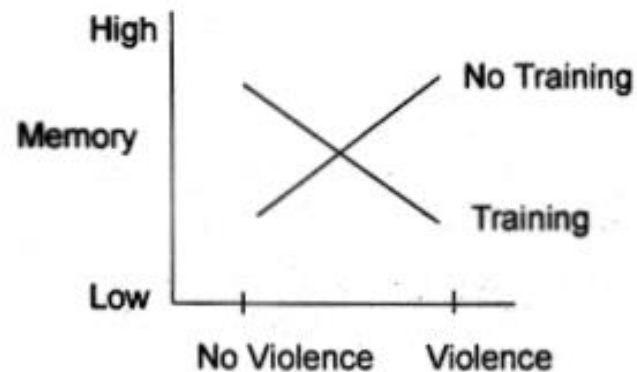
No Main Effects



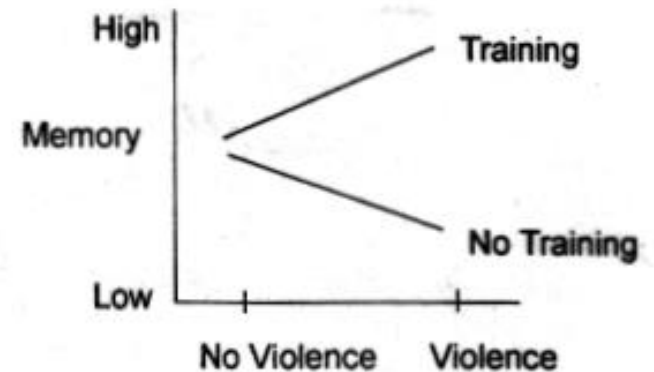
Interactions

<http://web.pdx.edu>

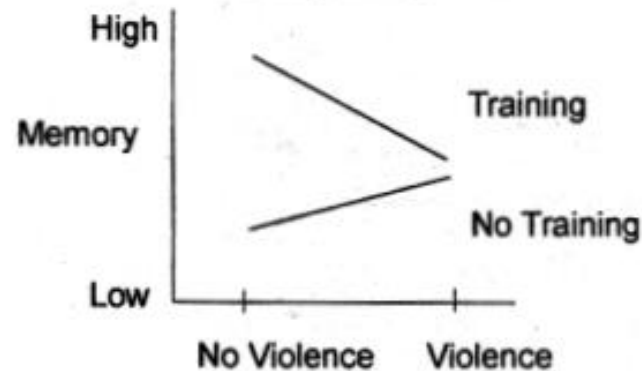
**Interaction with
No Main Effects**



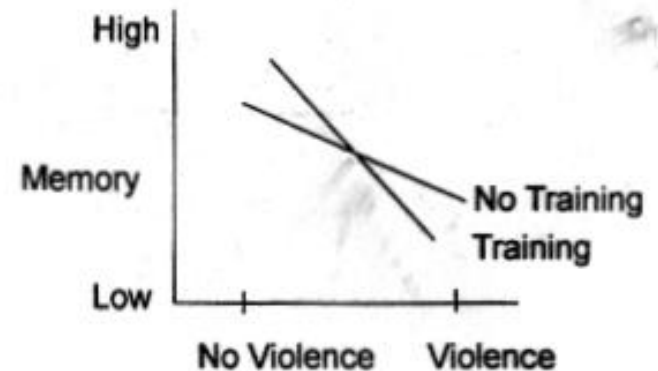
**Interaction with a
Training Main Effect**



**Interaction with a
Training Main Effect**



**Interaction with a
Violence Main Effect**



Výpočet hlavných efektov a efektov interakcií

Task completion rate:

	1 Cup	3 Cups
Morning	12,13,10	10,8,10
Evening	14,15,12	23,18,15

Main effect of coffee

$$\text{avg}(10, 8, 10, 23, 18, 15) - \text{avg}(12, 13, 10, 14, 15, 12)$$

Main effect of time-of-day

$$\text{avg}(14, 15, 12, 23, 18, 15) - \text{avg}(12, 13, 10, 10, 8, 10)$$

Interaction

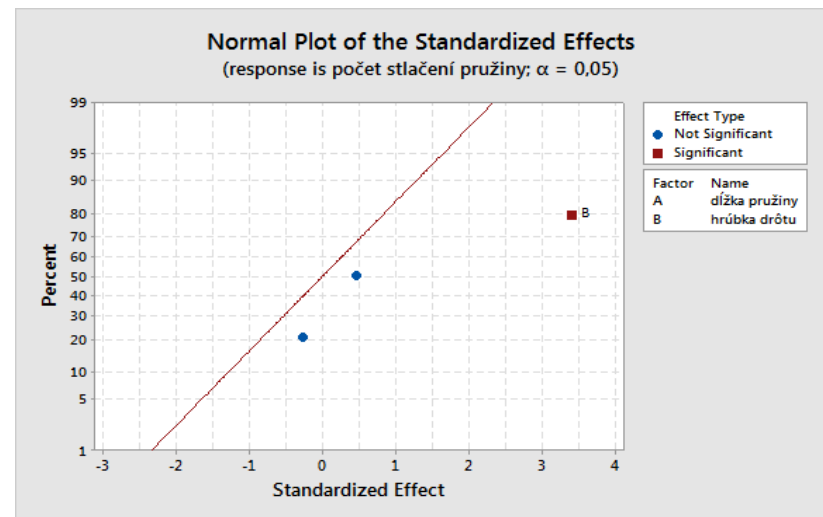
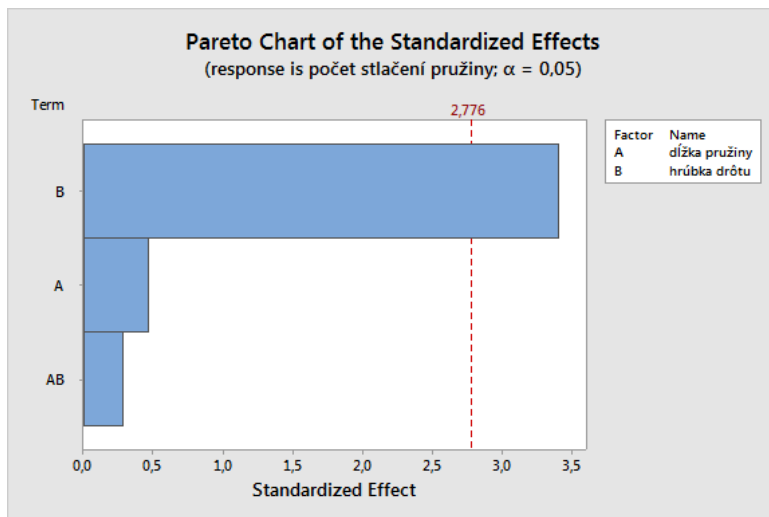
$$\text{avg}(12, 13, 10, 23, 18, 15) - \text{avg}(10, 8, 10, 14, 15, 12)$$

Spôsoby, ktorými rozhodujeme, ktoré efekty sú veľké (významné)

- graf hlavných efektov (Main effect)
- graf interakcií (Interaction effect)
- p hodnota pre každý efekt
- Paretov diagram efektov
- normálny pravdepodobnostný graf

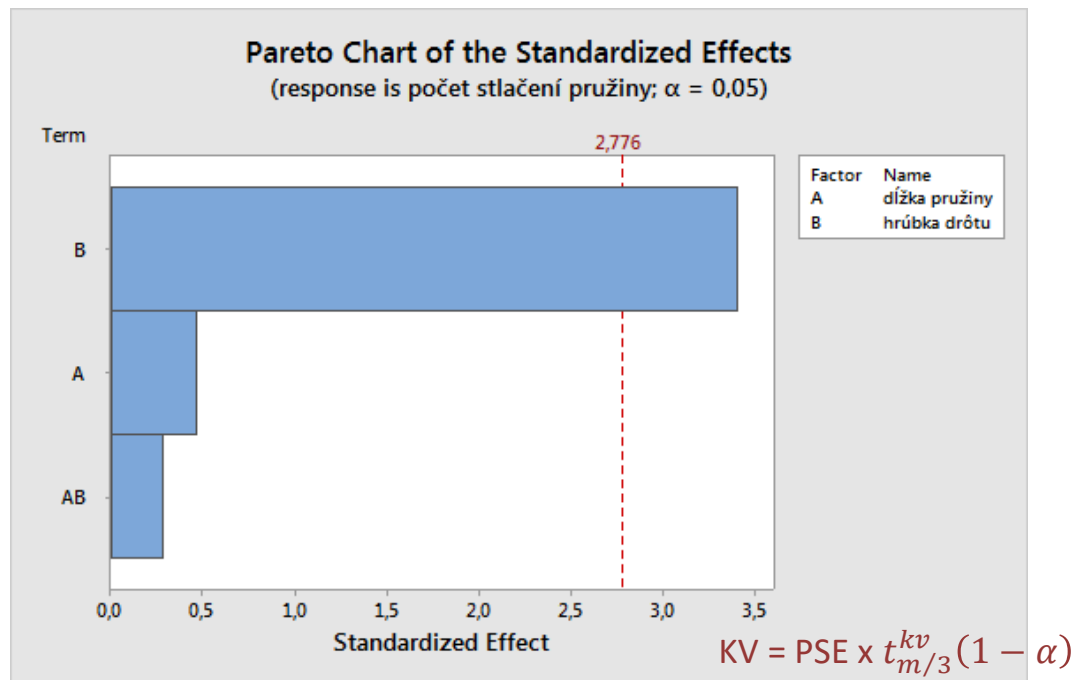
Grafické hodnotenie efektov faktorov a ich interakcií

- Pareto diagram (Pareto chart)
- Normálny pravdepodobnostný diagram (Normal probability plot)



Pareto diagram (Pareto chart)

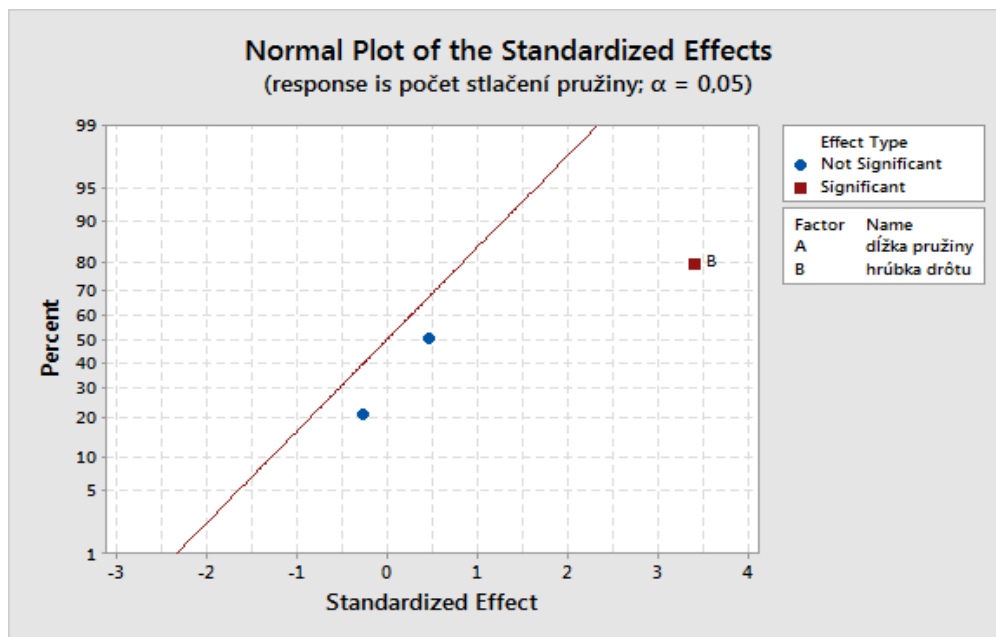
Absolútne hodnoty efektov faktorov a interakcií sú v ňom zoradené podľa veľkosti – vychádzame z toho, že väčšie efekty budú prislúchať tým faktorom, ktoré majú v procese skutočný vplyv.



Normálny pravdepodobnostný graf

Na vodorovnú os vynášame efekty faktorov a interakcií, na zvislú os relatívnu kumulatívnu početnosť $P_i = \frac{(i-0,5) \cdot 100}{m}$, kde $i = 1, 2, \dots, m$; m je počet faktorov a interakcií.

Za významné sa považujú tie faktory a ich interakcie, ktoré sa nachádzajú mimo hlavnej línie znázornenej priamkou, ktorá predstavuje kumulatívne početnosti z Gaussovej krivky.



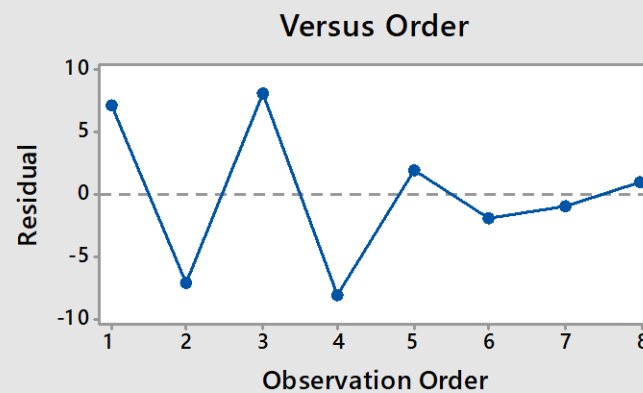
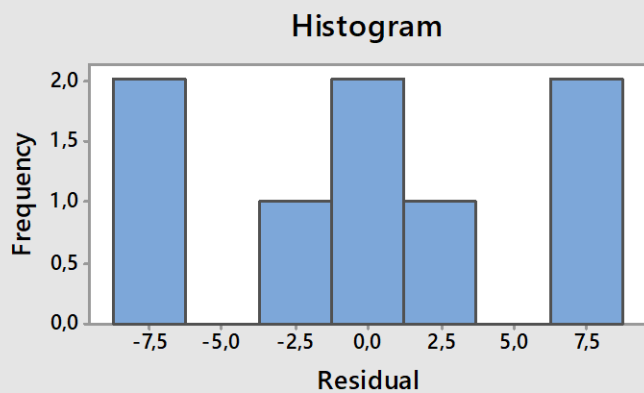
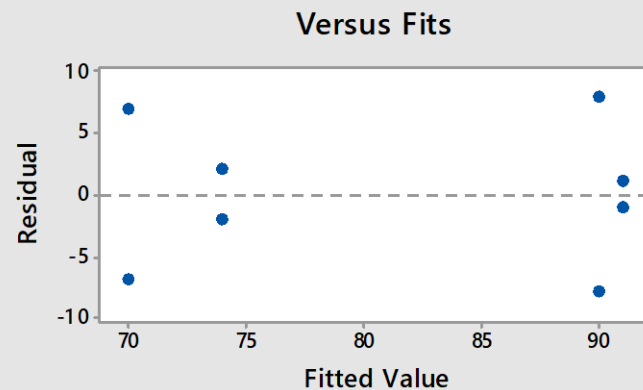
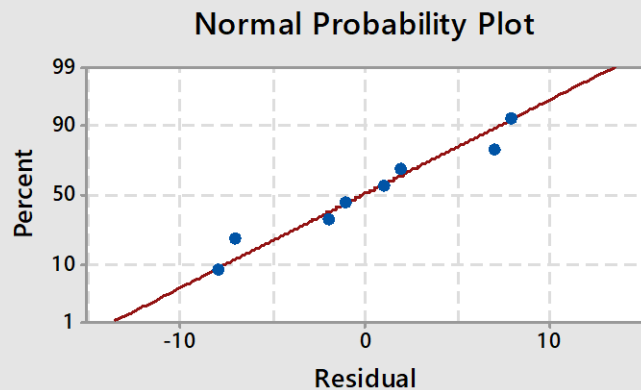
Aká je vypovedacia hodnota regresného modelu?

Kontrolujeme reziduá:

- či majú normálne rozdelenie (normálny pravdepodobnostný graf a histogram);
- mali by byť približne rovnaké bez ohľadu na to, či je vypočítaná (predikovaná) hodnota veľká alebo malá (residuals versus fit);
- správanie reziduí v čase by malo byť konštanté (residuals versus order).

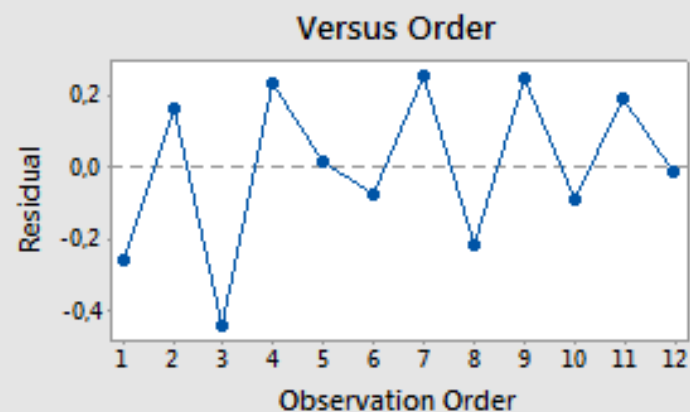
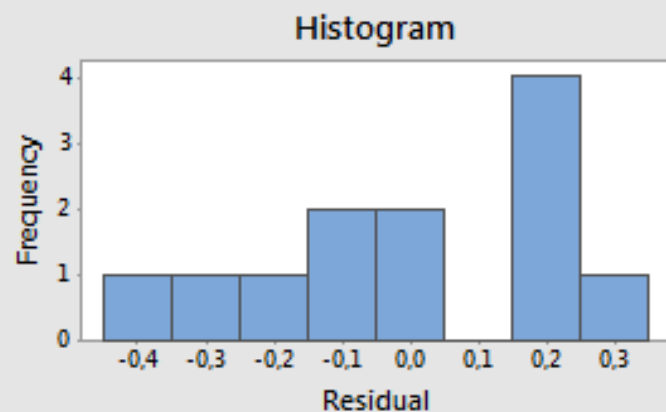
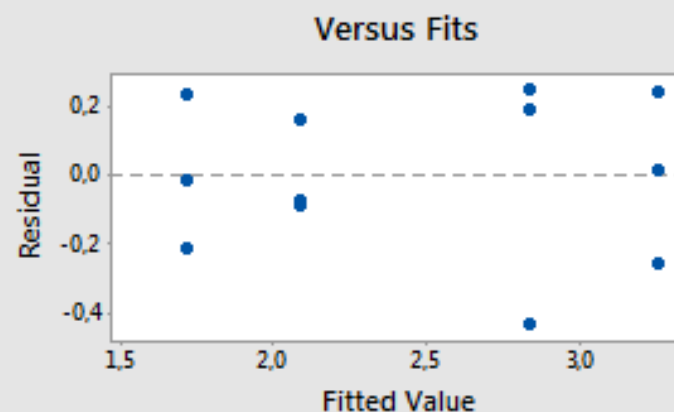
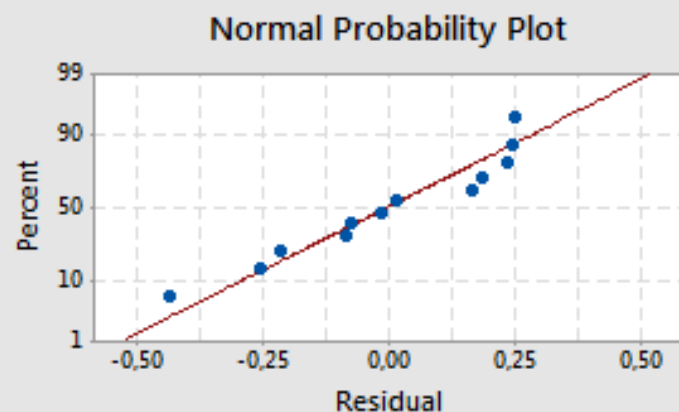
Kontrola reziduí

Residual Plots for počet stlačení pružiny



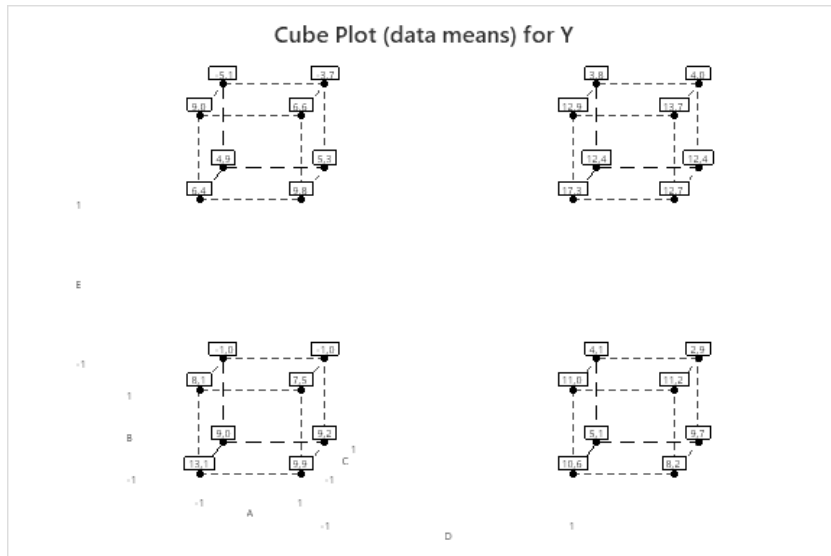
Kontrola reziduí

Residual Plots for hlbka dezenu (mm)

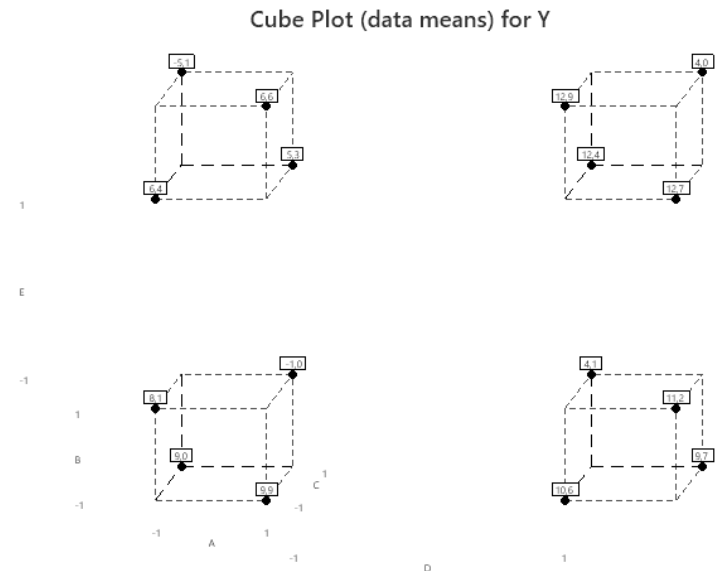


Čiastočný faktorový dvojúrovňový experiment (Fractional factorial experiment at two levels)

2^5



2^{5-1}



Čiastočný faktorový dvojúrovňový experiment (Fractional factorial experiment at two levels)

- experiment nezostavujeme pre každý faktor (vedľajšie faktory vyjadrujeme pomocou hlavných);

úplný experiment: 2^k ;

2 – počet úrovní každého faktora, k – počet faktorov

čiastočný experiment: 2^{k-p} ;

p – stupeň zníženia (počet vedľajších faktorov)

Podľa stupňa zníženia ich delíme na:

- polovičné – s najnižším znížením ($p=1$);
- saturované (nasýtené) – s najvyšším znížením (napr. 2^{7-4});
- Stredové

Počet meraní nesmie byť menší ako počet parametrov v regresnom modeli!

Základné pojmy, operácie s faktormi a ich vlastnosti

- Jednotkový faktor I obsahuje iba úrovne +1.

Pre operácie s faktormi platia vzťahy:

$$1. \quad A \cdot A = I$$

$$2. \quad A \cdot I = I \cdot A = A$$

$$3. \quad (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

$$4. \quad A \cdot B = B \cdot A$$

- Generátor plánu má označenie vedľajšieho faktora, ktorý chceme vyjadriť pomocou hlavných faktorov. V každom pláne je toľko generátorov, koľko má vedľajších faktorov. Generátory musia byť nezávislé.
- Slovo označuje každú kombináciu faktorov.
- Definičné rovnice – slová, ktoré sú rovné jednotkovému faktoru I .
- Rozlíšenie (resolution) R – dĺžka najkratšieho slova v definičných rovniciach, k typu plánu zapisujeme rímskou číslicou ako dolný index.

Príklad

Máme zostaviť polovičný plán pre päť faktorov: A,B,C,D,E

Riešenie:

Zostavíme úplný faktorový plán pre 4 hlavné faktory (napr. A,B,C,D).

Vedľajší faktor E vyjadríme ako ich kombináciu, napr. $E=ABCD$.

$E=ABCD$ *je generátor*

$E.E=E.ABCD$

$I=ABCDE$ *je definičná rovnica*

slovo v definičnej rovnici obsahuje 5 faktorov

Zápis:

2_V^{5-1} značí, že faktory sú na dvoch úrovniach, faktorov je 5, vedľajší faktor je 1, experiment je polovičný, rozlíšenie je V, pretože slovo v definičnej rovnici má dĺžku 5 (5 písmen).

- **Zameniteľné dvojice** – pomocou definičnej rovnice je možné nájsť dvojice faktorov, resp. interakcií, ktoré tvoria rovnaké postupnosti úrovní faktorov, resp. interakcií (rovnaké postupnosti ± 1).

Napr.

$I = ABCDE$

$DE.I = DE.ABCDE$

$DE = ABC$ *interakcie DE a ABC sú zameniteľné - aliasing
(confounded)*

Za najlepšiu zameniteľnú interakciu sa považuje tá, ktorá je tvorená najväčším počtom faktorov.

Čím dlhšie je slovo, tým menší má efekt. Za bezvýznamný sa v praxi považuje efekt interakcie s dĺžkou slova aspoň 3.

Rozlíšenie plánu experimentu R hovorí o tom, ako veľmi sa vplyvom použitia generátora budú zmiešavať interakcie s hlavnými faktormi, resp. medzi sebou. Hovoríme, že sú aliasing. Čím je experiment úspornejší, tým má menšiu rozlišovaciu schopnosť.

V návrhu s rozlíšením R budú interakcie FI rádu rozlíšiteľné od iných interakcií rádu nižšieho ako $R-FI$.

Rozlíšenie III. Značenie pre plány na dvoch úrovniach je 2_{III}^{k-p} .

Návrh tohto typu umožňuje odhady hlavných efektov. Niektoré interakcie druhého rádu však budú zmiešané s hlavnými faktormi a je nutným predpokladom, že sú zanedbateľné.

$R=III$

$FI=1$ $R-FI=3-1=2 \rightarrow$ *hlavné efekty budú rozlíšiteľné navzájom*

$FI=2$ $R-FI=3-2=1$

Rozlíšenie IV. Značenie pre plány na dvoch úrovniach je 2_{IV}^{k-p} .

Návrhy tohto typu umožňujú odhadovať hlavné efekty nezávisle na akejkoľvek interakcii druhého rádu. Niektoré interakcie druhého rádu sú však zmiešané dokopy a nemožno ich odhadnúť.

$R=IV$

$FI=1$ $R-FI=4-1=3 \rightarrow$ *hlavné efekty budú rozlíšiteľné od všetkých interakcií 2. rádu a od iných hlavných efektov*

$FI=2$ $R-FI=4-2=2 \rightarrow$ *2 faktorové interakcie budú rozlíšiteľné od hlavných efektov*

$FI=3$ $R-FI=4-3=1$

Rozlíšenie V. Značenie pre plány na dvoch úrovniach je 2_V^{k-p} .

Návrhy tohto typu umožňujú odhady hlavných faktorov a interakcii druhého a tretieho rádu. Interakcie tretieho a druhého rádu môžu byť zameniteľné.

$R=V$

$FI=1$ $R-FI=5-1=4 \rightarrow$ *hlavné efekty budú rozlíšiteľné od všetkých interakcií 3. a 2. rádu a od iných hlavných efektov*

$FI=2$ $R-FI=5-2=3 \rightarrow$ *2 faktorové interakcie budú rozlíšiteľné od interakcií 2. rádu a od hlavných efektov*

$FI=3$ $R-FI=5-3=2 \rightarrow$ *3 faktorové interakcie budú rozlíšiteľné od hlavných efektov*

$FI=4$ $R-FI=5-4=1$

Resolution	Ability	Example
I	Not useful: an experiment of exactly one run only tests one level of a factor and hence can't even distinguish between the high and low levels of that factor	2^{1-1} with defining relation $I = A$
II	Not useful: main effects are confounded with other main effects	2^{2-1} with defining relation $I = AB$
III	Estimate main effects, but these may be confounded with two-factor interactions	2^{3-1} with defining relation $I = ABC$
IV	Estimate main effects unconfounded by two-factor interactions Estimate two-factor interaction effects, but these may be confounded with other two-factor interactions	2^{4-1} with defining relation $I = ABCD$
V	Estimate main effects unconfounded by three-factor (or less) interactions Estimate two-factor interaction effects unconfounded by two-factor interactions Estimate three-factor interaction effects, but these may be confounded with other two-factor interactions	2^{5-1} with defining relation $I = ABCDE$
VI	Estimate main effects unconfounded by four-factor (or less) interactions Estimate two-factor interaction effects unconfounded by three-factor (or less) interactions Estimate three-factor interaction effects, but these may be confounded with other three-factor interactions	2^{6-1} with defining relation $I = ABCDEF$

Vyhodnotenie experimentu bez replikácií (Unreplicated Factorial Experiments)

Štatistické vyhodnotenie výsledkov experimentu nie je možné.
Na odhad efektov a ich interakcií a posúdenie toho, ktoré sú „významné“ používame:

- **Normálny pravdepodobnostný graf** – indentifikujeme v ňom efekty a interakcie, ktoré sa odchýlili od linearity v značnej vzdialenosti.
- **Pareto graf** - absolútne hodnoty efektov faktorov a interakcií sú v ňom zoradené podľa veľkosti – vychádzame z toho, že väčšie efekty budú prislúchať tým faktorom, ktoré majú v procese skutočný vplyv.

Príklad: (Lenth's analysis)

Russell V. Lenth "Quick and Easy Analysis of Unreplicated Factorials"

Príklad : Experiment 2^4 - skúmame účinky zmeny 4 vstupných faktorov procesu na výťažok procesu (%).

A: Catalyst Charge (lb), 10 and 15,

B: Temperature (°C), 220, 230,

C: Reactant Concentration (%), 10, 12,

D: Pressure (psi), 50, 80.

Design Point	Catalyst Charge (lb)	Temperature °C	Concentration %	Pressure psi	Run Order	Yield %
1	10	220	10	50	8	70
2	15	220	10	50	2	60
3	10	240	10	50	10	89
4	15	240	10	50	4	81
5	10	220	12	50	16	60
6	15	220	12	50	5	49
7	10	240	12	50	11	88
8	15	240	12	50	14	82
9	10	220	10	80	15	69

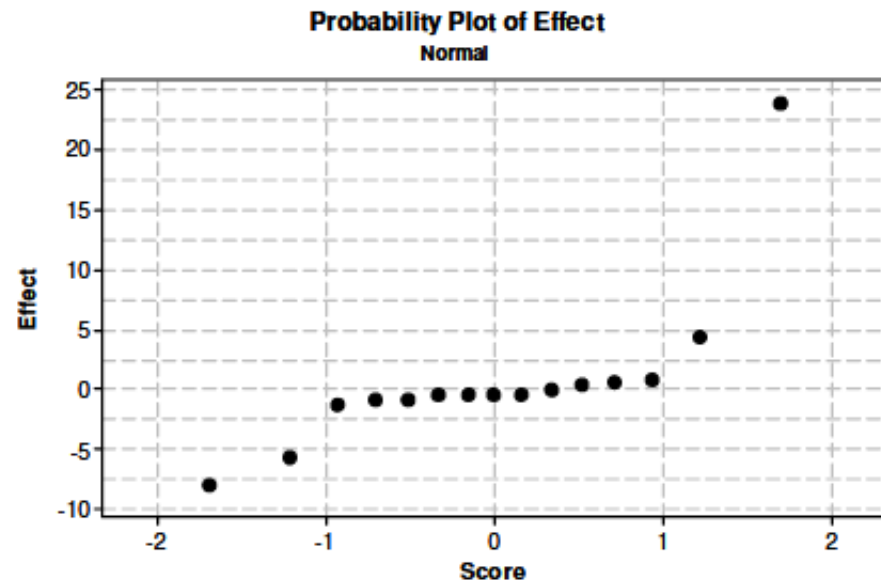
Príklad:

10	15	220	10	80	9	62
11	10	240	10	80	1	88
12	15	240	10	80	13	81
13	10	220	12	80	3	60
14	15	220	12	80	12	52
15	10	240	12	80	6	86
16	15	240	12	80	7	79

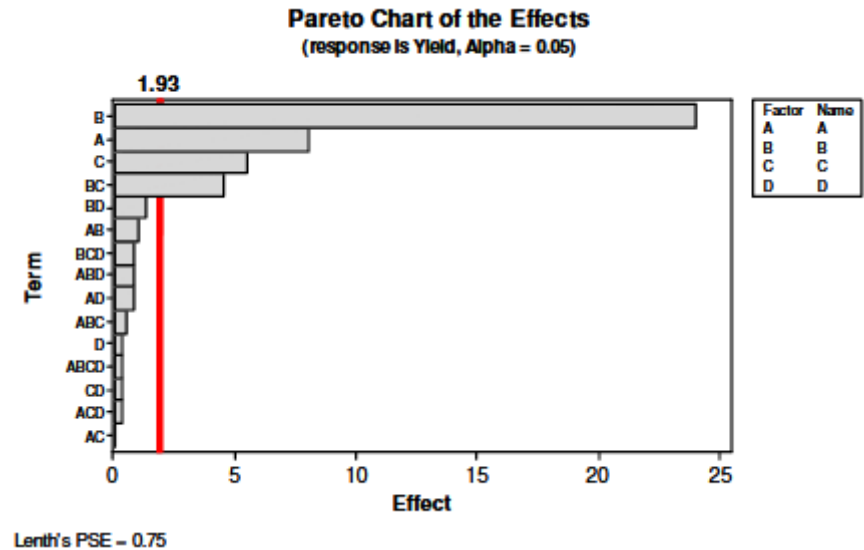
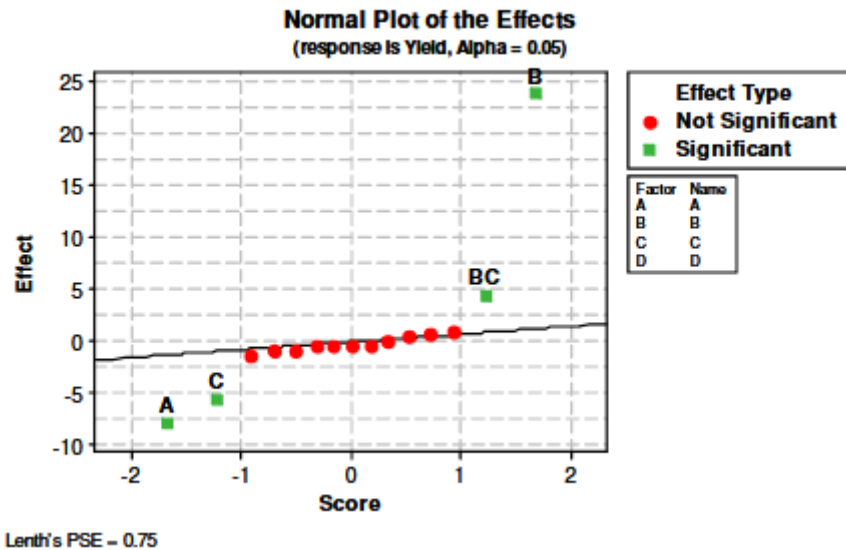
Term	Effect
------	--------

A	-8.00
B	24.00
C	-5.50
D	-0.25
A*B	1.00
A*C	-0.00
A*D	0.75
B*C	4.50
B*D	-1.25
C*D	-0.25
A*B*C	0.50
A*B*D	-0.75
A*C*D	-0.25
B*C*D	-0.75
A*B*C*D	-0.25

Ak by boli všetky účinky nulové, týchto 15 odhadov efektov by predstavovalo jednoduchú náhodnú vzorku z normálneho rozdelenia s konštantnou smerodajnou odchýlkou.



Lenth's analysis



Vychádzame z toho, že väčšie efekty budú prislúchať tým faktorom, ktoré majú v procese skutočný vplyv.

Existuje výrazný rozdiel medzi štyrmi najväčšími a ostatnými efektmi. Tomu zodpovedá umiestnenie Lenthovej „miery chyby“ („margin of error“) na hodnote 1,93. Rozpätie chyby „margin of error“ je súčinom odhadovanej pseudo štandardnej chyby Lenth's PSE = 0,75 a kritickej hodnoty t rozdelenia.

Výpočet kritickéj hodnoty efektov - princíp

Pseudo štandardná chyba (Lenth's PSE) sa používa na výpočet kritickéj hodnoty efektov pri meraniach bez replikácií.

Je založená na skutočnosti, že smerodajnú odchýlku vzorky z rozdelenia $N(0, \sigma^2)$ možno odhadnúť ako $1,5 \times$ medián (abs. hodnôt). V prípade, že niektoré efekty nie sú nulové, vylepšením je vymazať efekty, ktoré presahujú 2,5-násobok tohto odhadu a znovu prepočítať jej hodnotu.

Kritická hodnota efektov = PSE sa vynásobí príslušnou kritickou hodnotou t rozdelenia s $m/3$ stupňami voľnosti, kde m je počet posudzovaných efektov.

$$KV = PSE \times t_{m/3}^{kv} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)$$

Postup výpočtu PSE (Pseudo Standard Error)

PSE je hodnota štandardnej chyby odporúčaná Lenthom na vyhodnotenie štatistickej významnosti odhadov efektov

1. Absolútne hodnoty efektov

Term	Effect
A	8.00
B	24.00
C	5.50
D	0.25
A*B	1.00
A*C	0.00
A*D	0.75
B*C	4.50
B*D	1.25
C*D	0.25
A*B*C	0.50
A*B*D	0.75
A*C*D	0.25
B*C*D	0.75
A*B*C*D	0.25

2. Ich vzostupné usporiadanie

Term	Effect
A*C	0.00
D	0.25
C*D	0.25
A*C*D	0.25
A*B*C*D	0.25
A*B*C	0.50
8. A*D	0.75
A*B*D	0.75
B*C*D	0.75
A*B	1.00
B*D	1.25
B*C	4.50
C	5.50
A	8.00
B	24.00

Za predpokladu, že efekty sú nulové:

Median: $Me=0.75$

Predbežný odhad Lent'ho PSE:

$$1.5 \times 0.75 = 1.125$$

Vylúčenie extrémnych hodnôt

$$2.5 \times 1.125 = 2.8125$$

Postup výpočtu PSE (Pseudo Standard Error)

3. Vzostupné usporiadanie efektov po vylúčení extrémnych hodnôt

	Term	Effect	
	A*C	0.00	
	D	0.25	
	C*D	0.25	
	A*C*D	0.25	
	A*B*C*D	0.25	
6.	A*B*C	0.50	Median: Me=0.5
	A*D	0.75	Spresnený odhad Lent'h PSE:
	A*B*D	0.75	1.5x0.5=0.75
	B*C*D	0.75	
	A*B	1.00	
	B*D	1.25	

Kritická hodnota Studentovho rozdelenia

ak $df=15/3$, potom $t_5^{kv}(0.975) = 2.570582$

Kritická hodnota pre efekty

$$KV = 0.75 \times 2.57 = 1.9275$$