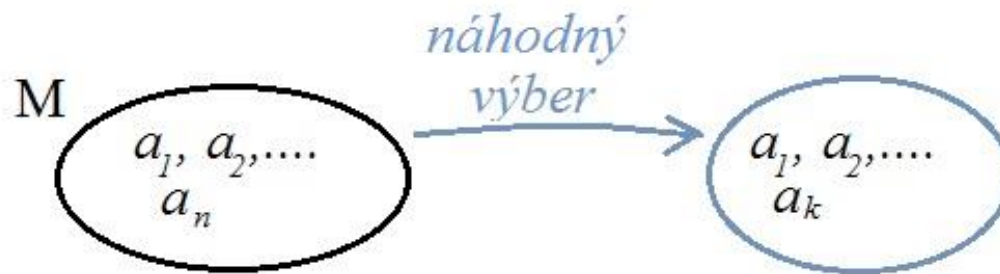


KOMBINATORIKA

- náuka o permutáciách, variáciách a kombináciách



množina $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
obsahuje n ($n \in \mathbb{N}$) navzájom
rôznych prvkov

výber, t.j. vzorku $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$
nazývame **výber s rozsahom k**
($k \in \mathbb{N}$)

Rozlišujeme pritom dve veci:

1. či výber realizujeme bez opakovania alebo s opakovaním ;
2. či záleží na poradí prvkov vo výbere (usporiadaný výber) alebo nezáleží (neusporiadaný výber).

$M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ je množina n navzájom rôznych prvkov

robíme výber s rozsahom k

bez opakovania

s opakovaním

záleží na poradi

nezáleží na poradi

$k \leq n$

variácie
bez opakovania

ich počet je

$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

= PERMUT ($n; k$)

kombinácie
bez opakovania

ich počet je

$$C_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

= COMBIN ($n; k$)

variácie
s opakovaním

ich počet je

$$V'_k(n) = n^k$$

= POWER ($n; k$)

kombinácie
s opakovaním

ich počet je

$$C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k}$$

= COMBIN ($n+k-1; k$)

$k=n$

permutácie

ich počet je $V_n(n) = P(n) = n!$

= FACT (n)

Permutácie s opakovaním

$$M = \left\{ \underbrace{a_1, \dots, a_1}_{i_1 \text{ rovnakých prvkov}}, \underbrace{a_2, \dots, a_2}_{i_2 \text{ rovnakých prvkov}}, \dots, \underbrace{a_j, \dots, a_j}_{i_j \text{ rovnakých prvkov}} \right\}, \text{ kde } i_1 + i_2 + \dots + i_j = n$$

= MULTINOMIAL ($i_1; i_2; \dots; i_j$)

počet permutácií s opakovaním je

$$P'_{i_1, i_2, \dots, i_j}(n) = \frac{n!}{i_1! \cdot i_2! \cdot \dots \cdot i_j!}$$

Príklady_kombinatorika

1. Koľkými spôsobmi možno náhodne poskladať výrobnú linku pozostávajúcu z 5 rôznych montážnych panelov?

Riešenie:

$$\textcircled{1} \quad M = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\} \quad n=5$$

myšľay : $k=5$; bez opakovania, všetci na poradi!

$$F(5) = V_5(5) = 5! = 120 = \text{FACT}(5)$$

2. Koľkými spôsobmi možno náhodne vybrať z 23 diplomových prác tri, ktoré budú ocenené sumami 300, 200 a 100 eur?

Riešenie:

$$\textcircled{2} \quad M = \{DP_1, DP_2, \dots, DP_{23}\} \quad n=23$$

myšľay : $k=3$; všetci na poradi! ; bez opak.

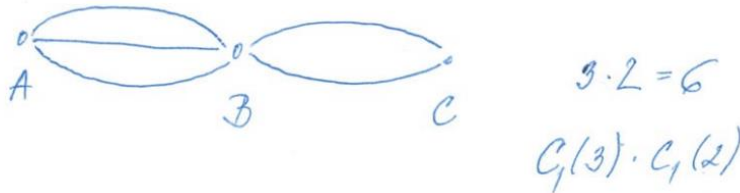
$$V_3(23) = \frac{23!}{(23-3)!} = \frac{23!}{20!} = \frac{23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20!}{20!} = 10\,626 = \text{PERMUT}(23; 3)$$



Príklady_kombinatorika

3. Koľkými spôsobmi možno prejsť priamou cestou (bez cyklenia) z miesta A do miesta C, ak z miesta A vedú do miesta B tri cesty a z miesta B vedú do miesta C 2 cesty?

Riešenie:



4. Koľko rôznych EČV možno vytvoriť v okrese, ak predpokladáme, že ev. číslo sa skladá z trojice číslíc a 2 písmen, ktoré vyberáme z 26 písmen abecedy?

Riešenie: ④ $M_1 = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ $n_1 = 10$
mýtery: $k_1 = 3$; súčasná na pozícií; 1. opad. $V_3'(10) = 10^3$
 $M_2 = \{A, B, \dots, Z\}$ $n_2 = 26$
mýtery: $k_2 = 2$; súčasná na pozícií; 1. opad. $V_2'(26) = 26^2$

} $V_3'(10) \cdot V_2'(26) = 10^3 \cdot 26^2 = 1000 \cdot 676 = 676000$

$\overline{10} \quad \overline{10} \quad \overline{10} \quad \overline{26} \quad \overline{26}$

Príklady_kombinatorika

3. Koľkými spôsobmi môžeme kúpiť

a) 5 čokolád z 5 rôznych druhov?

b) 5 rôznych čokolád z 5 rôznych druhov?

Riešenie:

$$\textcircled{5} \quad M = \{\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_5\} \quad n = 5$$

a) výbery: $k = 5$; rozlišujeme poradie; s opak.

$$C_5'(5) = \binom{5+5-1}{5} = \binom{9}{5} = \frac{9!}{4!5!} = 126 = \text{COMBIN}(9, 5)$$

b) výbery: $k = 5$; rozlišujeme poradie; bez opak.

$$C_5(5) = \binom{5}{5} = 1 = \text{COMBIN}(5, 5)$$

Príklady_kombinatorika

6. Medzi 20 výrobkami sú 4 chybné. Koľkými spôsobmi môžeme z nich vybrať 6 výrobkov tak, aby boli 2 z nich chybné (nezáleží na poradí)?

Riešenie:

$$\textcircled{6} \quad M = \underbrace{\{v_1, v_2, \dots, v_{16}\}}_{\substack{16 \text{ dobrých} \\ n_1 = 16}} \underbrace{\{v_{17}, \dots, v_{20}\}}_{\substack{4 \text{ chybné} \\ n_2 = 4}} \quad n = 20$$

min. výber : $k = 6$ (4 dobrých + 2 chybné)
rozlišuje sa poradie; bez opakovania

$$C_4(16) \cdot C_2(4) = \binom{16}{4} \cdot \binom{4}{2} = 10 \cdot 20 = \text{COMBIN}(16;4) \cdot \text{COMBIN}(4;2)$$

TEÓRIA PRAVDEPODOBNOTI

- sa zaoberá matematickými
zákonitosťami, ktoré sa prejavujú
v náhodných pokusoch

Pokus – dej, ktorý má vlastnosť **hromadnosti** – t.j. prebieha, resp. nastáva opakovane za určitých, rovnako nastavených začiatočných podmienok (musí sa dať opakovať nekonečne veľa krát).

deterministické pokusy



Za určitých začiatočných podmienok sa dostaví vždy rovnaký výsledok.

náhodné pokusy



Pre určité začiatočné podmienky existuje množina možných výsledkov, pričom žiadne dva nemôžu nastať súčasne a jeden z nich nastane - ktorý, závisí od náhody.

Náhodný pokus – dej, ktorého výsledok závisí nielen od predpísaných podmienok, ktoré sa pri každej realizácii pokusu nemenia, ale tiež od náhody.

HOD KOCKOU

Náhodný jav – výsledok, resp. tvrdenie o výsledku náhodného pokusu. O pravdivosti tohto tvrdenia je možné po ukončení pokusu rozhodnúť.

PADLA ŠESTKA

PADLO PÁRNE ČÍSLO

PADLO NEPÁRNE ČÍSLO

PADLO ČÍSLO MENŠIE AKO TRI

Elementárny jav – najjednoduchší, elementárny (základný) výsledok náhodného pokusu, ktorý nie je možné vyjadriť ako zjednotenie dvoch rôznych náhodných javov.

Označuje sa $E_1, E_2, \dots$ (niekedy sa používa označenie $\omega_1, \omega_2, \dots$).

Priestor elementárnych javov – množina všetkých elementárnych javov. Označuje sa Ω .

$$\Omega = \{E_1, E_2, \dots, E_n, \dots\}$$

Náhodný jav (inak) – ľubovoľná podmnožina Ω . Označuje sa veľkými písmenami zo začiatku abecedy $A, B, C, \dots, A_1, A_2, \dots$

Nemožný jav – prázdna podmnožina $\emptyset$ množiny Ω , t.j. jav, ktorý nikdy nenastane.

Istý jav – celá množina (ako podmnožina) Ω , t.j. jav, nastane pri každom náhodnom pokuse. Označuje sa I .

Príklad.

Zostrojte množinu všetkých možných výsledkov náhodného pokusu – hod 3 rovnakými mincami.

Existuje viac možností ako takúto množinu zostaviť:

a) 1. prístup: mince sú rovnaké a nerozlišujeme ich

$$\Omega = \{3R, 2R + L, R + 2L, 3L\}$$

$$|\Omega| = C_3'(2) = \binom{2+3-1}{3}$$

b) 2. prístup: všímame si, na ktorej minci čo padlo (rozlišujeme mince medzi sebou)

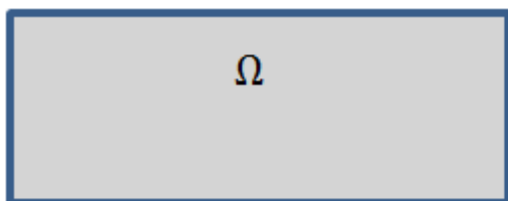
$$\Omega = \{RRR, RRL, RLR, LRR, RLL, LRL, LLR, LLL\}$$

$$|\Omega| = \gamma_3'(2) = 2^3 = 8$$

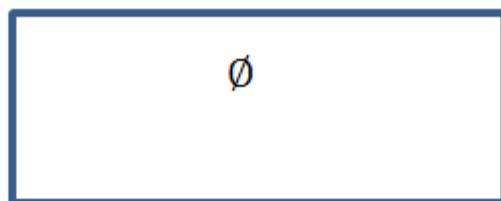
Zásada:

Ak je možné, množinu Ω zostavujeme tak, aby všetky výsledky boli v tejto množine rovnocenné. $\Rightarrow$ *preferujeme 2. prístup*

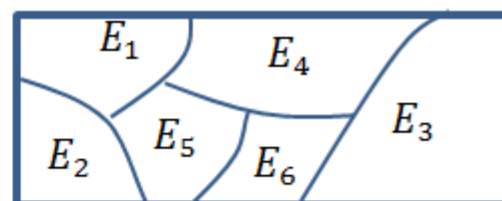
Kvalitatívne vzťahy medzi javmi určujeme pomocou teórie množín.
 Definujeme operácie medzi javmi, javy môžeme graficky znázorňovať...



Priestor elementárnych javov



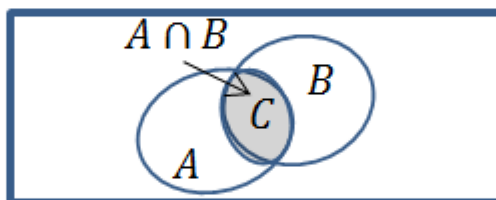
Nemožný jav



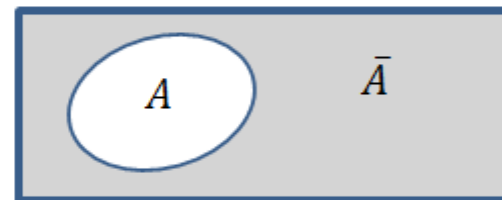
Úplný systém elementárnych javov



$C = A \cup B$



$C = A \cap B$



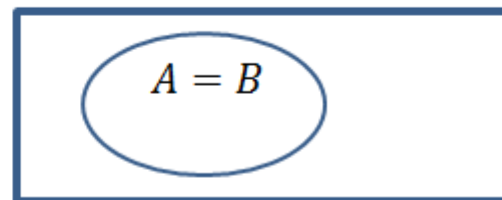
Opačný jav



$A \subset B$



$A \cap B = \emptyset$



$A = B$

Skupina javov $A_1, A_2 \dots A_n$ tvorí **úplný systém javov**, ak pre každé $i, j = 1, 2, \dots n$ platí:

1. $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$;
2. $A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n = \Omega$

Ω je priestor elementárnych javov. $\mathcal{S}$ je množina podmnožín Ω s vlastnosťami:

1. $\Omega \in \mathcal{S}$;
2. $A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{S}$
 $A \cap B \in \mathcal{S}$
 $\bar{A} \in \mathcal{S}, \bar{B} \in \mathcal{S}$

$\mathcal{S}$ nazývame **javové pole**.

Príklad 2.

Priemyselne vyrábaný filter je podrobený trom rôznym testovacím skúškam:

jav A – náhodne vybraný filter obstoí pri 1. skúške;

jav B – náhodne vybraný filter obstoí pri 2. skúške;

jav C – náhodne vybraný filter obstoí pri 3. skúške.

Matematickým zápisom vyjadrite, že filter obstoí:

a) iba v 1. skúške; $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

b) v 1. a v 2. skúške a neobstoí v 3. skúške; $A \cap B \cap \bar{C}$

c) vo všetkých skúškach; $A \cap B \cap C$

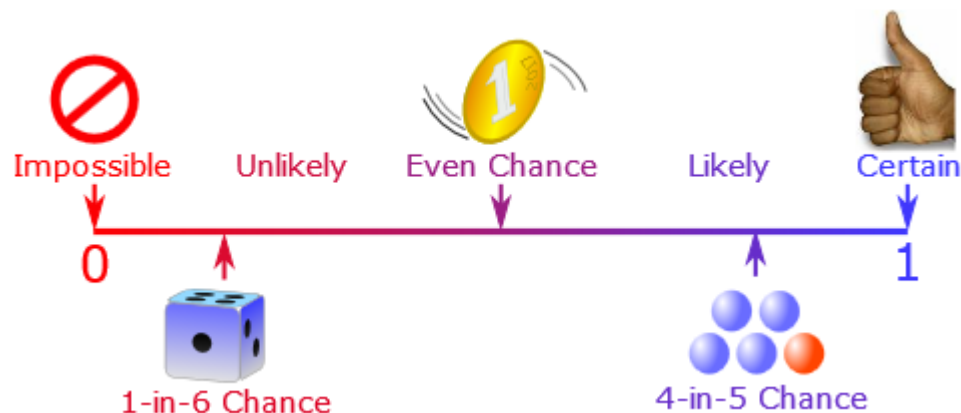
d) aspoň v jednej skúške; $A \cup B \cup C = \Omega \setminus (\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$

e) aspoň v dvoch skúškach; $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

f) práve v dvoch skúškach; $(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$

g) maximálne v dvoch skúškach. $\overline{A \cap B \cap C}$

Z kvantitatívneho hľadiska môžeme náhodnému javu priradiť číslo $P(A)$, ktoré bude reprezentovať pravdepodobnosť (šancu, náhodu), s akou nastane náhodný jav A pri realizácii náhodného pokusu.



<http://www.mathsisfun.com>

Pravdepodobnosť – číselne vyjadrenie šance, že pri náhodnom pokuse daný náhodný jav nastane.

Býva vyjadrená:

- v tvare desatinného čísla (0,5),
- ako zlomok ($1/2$),
- pomocou percent (50%),
- ako pomer, resp. časť z celku (1 z 2).

Pravdepodobnosť je možné definovať pomocou:

1. klasickej definície pravdepodobnosti
2. geometrickej definície pravdepodobnosti
3. štatistickej definície pravdepodobnosti

Klasická definícia pravdepodobnosti (Pierre Simon de Laplace, 1812)

je založená na predpoklade, že náhodný pokus môže mať **konečný** počet rôznych **rovnocenných** výsledkov, t.j. predpokladáme, že $\Omega = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ je konečná množina a všetky elementárne javy sú rovnako možné a jav A sa dá rozložiť na k elementárnych javov.

Potom pravdepodobnosť javu A je

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{počet elementárnych javov priaznivých javu } A}{\text{počet všetkých možných elementárnych javov}}$$

Aká je pravdepodobnosť, že nám na „férovej“ hracej kocke padne šestka ?

Geometrická definícia pravdepodobnosti

Zovšeobecnenie klasickej definície pravdepodobnosti pre prípad, keď je počet všetkých možných výsledkov náhodného pokusu nekonečný.

Pravdepodobnosť javu spočíva v tom, že náhodne zvolený bod v oblasti Ω (priamka, rovina, priestor) leží i v oblasti A

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Aká je pravdepodobnosť, že meteorit dopadne na pevninu?

Štatistická definícia pravdepodobnosti (Richard von Mises, začiatok 20. storočia) je založená na mnohonásobnom opakovaní pokusov.

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(A)}{n}$$

$n(A)$ je počet realizácii pokusu priaznivých javu A

n je počet všetkých realizácii pokusu

Aká je pravdepodobnosť, že nám na hracej kocke padne šestka, ak nevieme, či je táto kocka „férová“?

Kolmogorov axiomatický systém (Andrej Nikolajevič Kolmogorov, 1933)

definuje pojem pravdepodobnosti a jej vlastnosti, ale neudáva žiadny návod ako ju určiť.

Axióma 1: $P(A) \geq 0$.

Axióma 2: $P(I) = 1$.

Axióma 3: Ak $A_i \cap A_j = \emptyset$ pre $\forall i \neq j$, potom

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots$$

Vybrané vlastnosti pravdepodobnosti:

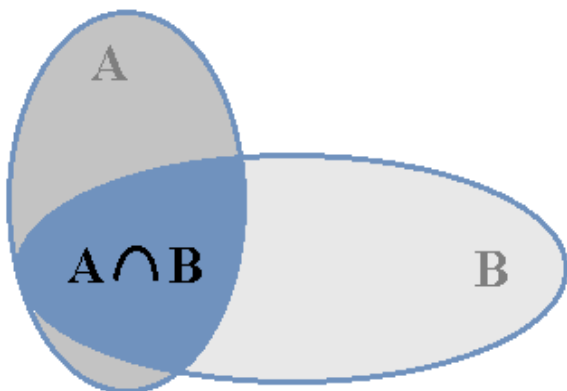
1. $P(\emptyset) = 0$
2. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
3. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
4. $0 \leq P(A) \leq 1$

Podmienená pravdepodobnosť – pravdepodobnosť nastatia javu za predpokladu, že nastal určitý iný jav.

Po uskutočnení pokusu máme doplňujúcu informáciu o jeho výsledku, ktorú využívame a pomocou nej skúmame pravdepodobnosť náhodného javu za obmedzenej podmienky.

Podmienená pravdepodobnosť javu A/B , t.j. javu A pri podmienke, že nastal jav B , sa rovná

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) > 0.$$



Príklad:

70% vašich priateľov má rado čokoládu (B)

35% vašich priateľov má rado čokoládu i jahody ($A \cap B$)

$$P(A/B) = 0,35/0,7 = 0,5$$

$$P(A/B) \neq P(B/A)$$

Nezávislé javy – ak výskyt javu A nezávisí na výskyte javu B a zároveň výskyt javu B nezávisí na výskyte javu A , potom hovoríme, že javy A a B sú nezávislé. Platí :

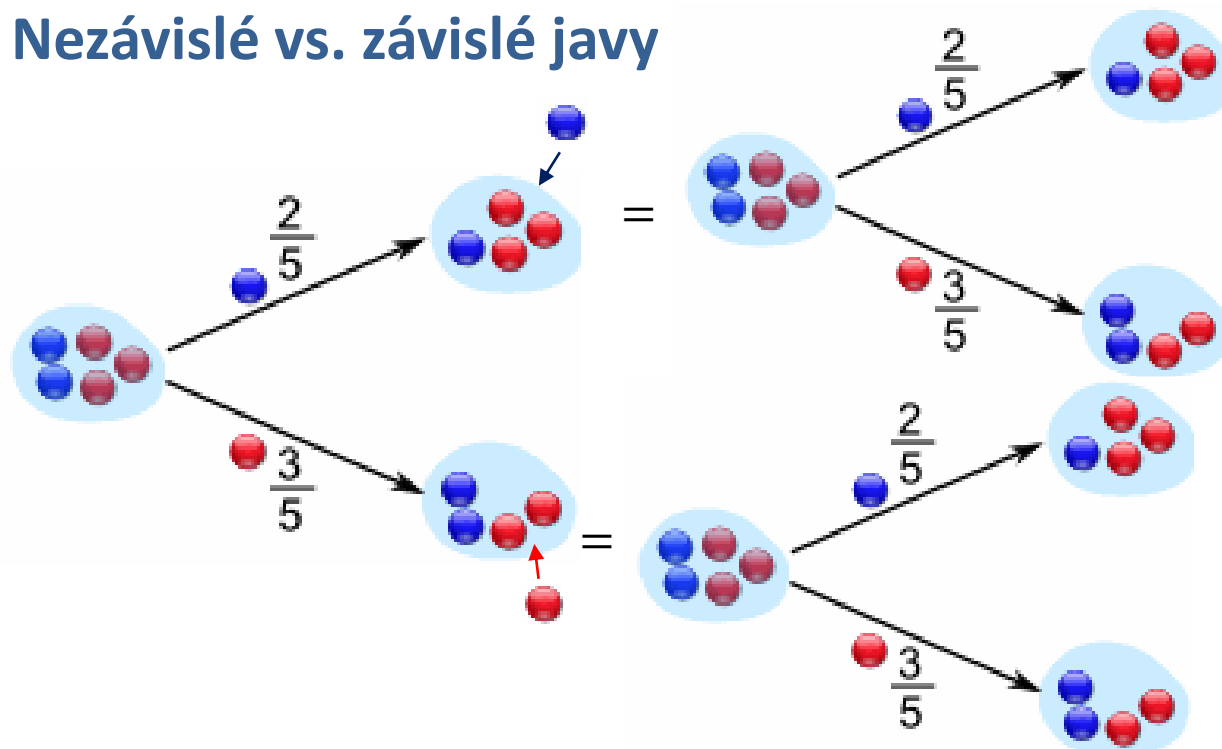
$$P(A/B) = P(A) \text{ a } P(B/A) = P(B), P(A) > 0, P(B) > 0$$

V opačnom prípade sú javy závislé.

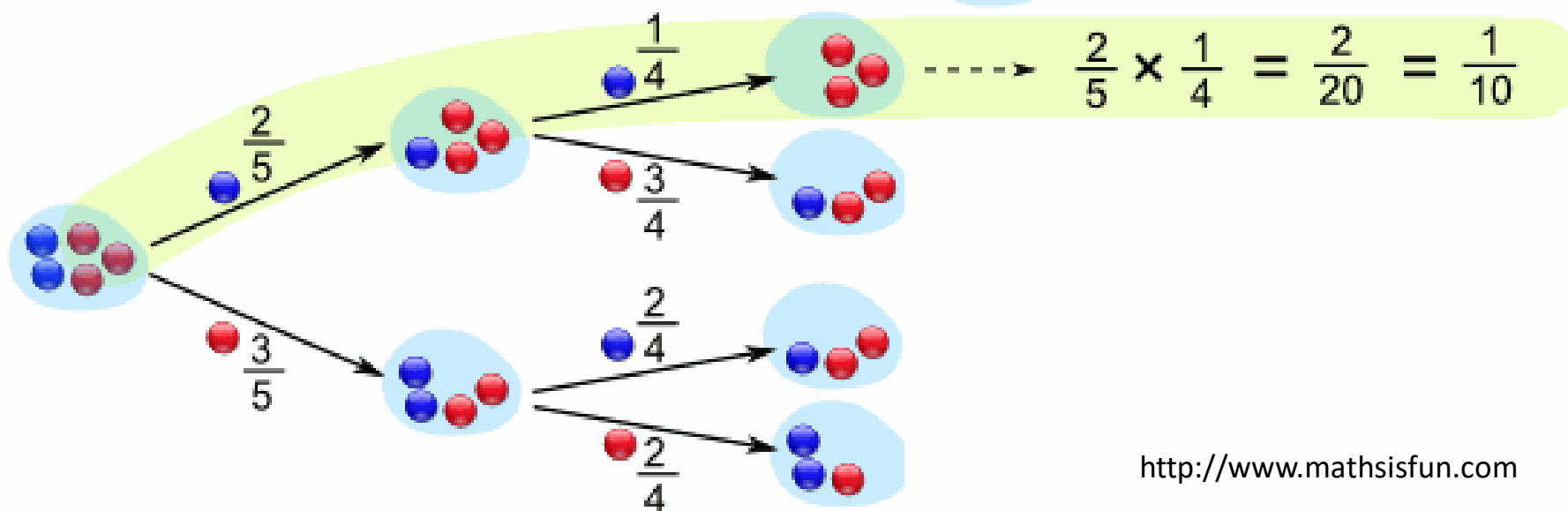
Vybrané vlastnosti pravdepodobnosti (pokračovanie):

5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (*veta o sčítaní pravdepodobností*),
ak sú javy A, B **disjunktné** $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
6. $P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = P(B/A) \cdot P(A)$ (*veta o násobení pravd.*),
javy A, B sú **vzájomne nezávislé** $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Nezávislé vs. závislé javy



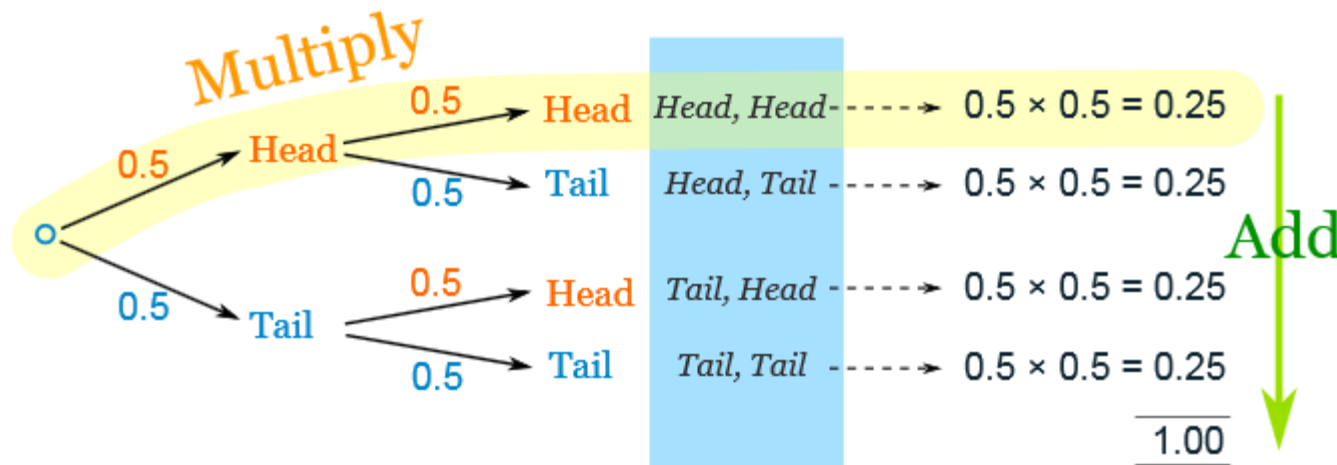
$$\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$



Pravdepodobnostný strom (Probability tree diagram) – umožňuje zapísať všetky možné náhodné javy (nezávislé i závislé) a vypočítať ich pravdepodobnosti. Každá vetva v stromovom diagrame predstavuje možný výsledok náhodného pokusu.

Pravidlá počítania pravdepodobnosti v pravdepodobnostnom strome:

1. Pravdepodobnosti pozdĺž vetiev násobíme.
2. Pravdepodobnosti v jednotlivých vetvách sčítavame.



Príklad_pravdepodobnosť

1. Hádžeme dvakrát mincou. Aká je pravdepodobnosť, že padne aspoň raz hlava?

Riešenie: $\rightarrow$ hod 2 mincami

mat. pokus - hodíme 2x mincou.

$$\Omega = \{ (PP); (PH); (HP); (HH) \} \quad n = |\Omega| = 4 = 2^2$$

jav A - aspoň raz padne hlava

$$A = \{ (PH); (HP); (HH) \} \quad k = 3$$

$$p(A) = \frac{k}{n} = \frac{3}{4} = 0,75$$

princíp pravdepodobnosti vo vzťahu



$$0,5 \cdot 0,5 = 0,25$$

$$0,5 \cdot 0,5 = 0,25$$

$$0,5 \cdot 0,5 = 0,25$$

$$P(A) = 3 \cdot 0,25 = 0,75$$

Príklad_pravdepodobnosť

2. Aká je pravdepodobnosť toho, že nám pri hode dvoma hracími kockami padne súčet aspoň 10?

Riešenie: $\rightarrow$ pokus - hod 2 $\rightarrow$ množ. výter dvojice čísel z intervalu 1-6

$$\Omega = \{ \text{možné výstupy dvojice čísel 1-6} \} \quad n = |\Omega| = 6^2 = 36$$

množ. A - padne súčet aspoň 10

$$A = \{ (5,5), (6,4), (6,5), (6,6), (4,6), (5,6) \} \quad k = 6$$

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Ω						
	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$$|\Omega| = 6^2 = 36$$

$$k = 6$$

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Príklad_pravdepodobnosť

3. Budeme hádzať dvoma hracími kockami. Nech náhodný jav A označuje, že na prvej kocke padne 3, náhodný jav B znamená, že súčet bodov padnutých na oboch kockách je menší ako 7. Vypočítajte podmienené pravdepodobnosti $P(A/B)$, $P(B/A)$. Sú náhodné javy A , B navzájom nezávislé alebo závislé?

Riešenie:

→ hrkas - hrd 2 

A - na prvej  padne 3

B - súčet bodov padnutých na oboch  je menší ako 7

druh' 

Ω						
	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$$n = |\Omega| = 36$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{15}{36}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

↓

na prvý $\square$ padne 3 so predpokladom, že ničel bodov ji menší ako 7

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{2}$$

↓

ničel bodov ji menší ako 7 so predpok. že na prvý $\square$ padne 3

$$P(A|B) = P(A) \wedge P(B|A) = P(B); P(A) > 0; P(B) > 0 \Rightarrow A, B \text{ n' sú závislé}$$

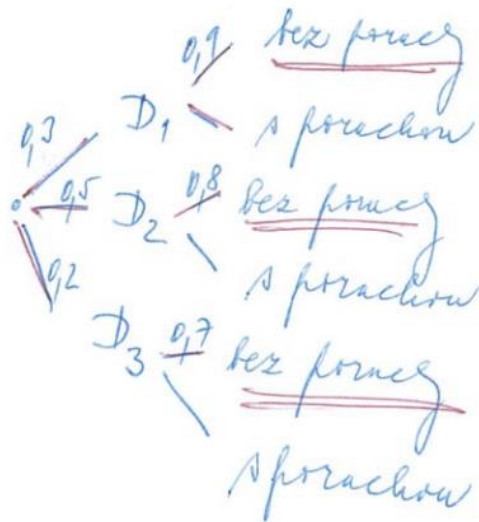
$$P(A|B) = \frac{1}{5} \neq P(A) = \frac{1}{6} \Rightarrow A, B \text{ n' sú závislé.}$$

↑
repet!

Príklad_pravdepodobnosť

4. Náhradnú autosúčiastku mohol dodať jeden z troch dodávateľov s pravdepodobnosťou 0,3; 0,5 a 0,2. Pravdepodobnosť, že táto súčiastka bude funkčná bez poruchy normou predpísaný počet hodín je u jednotlivých dodávateľov rovná 0,9; 0,8 a 0,7. Vypočítajte pravdepodobnosť, že dodaná autosúčiastka bude funkčná bez poruchy normou predpísaný počet hodín.

Riešenie: $\rightarrow A$ - autosúčiastka bude funkčná predpísaný počet hodín



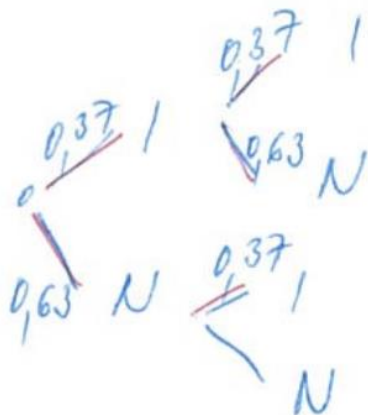
$$P(A) = 0,3 \cdot 0,9 + 0,5 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,7 = 0,81$$

Príklad_pravdepodobnosť

5. Podľa vyjadrenia epidemiológa, ak sa vyberiete na podujatie, kde je 500 ľudí, máte 37% šancu, že sa stretnete s infikovaným. Aká bude šanca, že stretnete aspoň jedného infikovaného, ak navštívite 2 takéto podujatia?

Riešenie:

→ A - stretnete aspoň 1 infikovaného



$$P(A) = 0,37^2 + 2 \cdot 0,37 \cdot 0,63 = 0,6031$$

Opakované náhodné pokusy

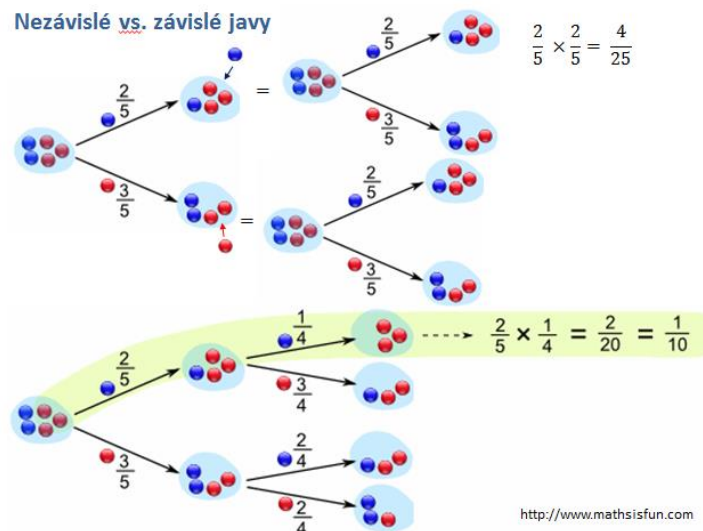
Rozlišujeme:

1. opakované nezávislé pokusy - výsledek každého jednotlivého pokusu nezávisí od výsledku predchádzajúcich pokusov

výber s opakovaním

2. opakované závislé pokusy - výsledek každého jednotlivého pokusu závisí od výsledku predchádzajúcich pokusov

výber bez opakovania



Príklad_pravdepodobnosť

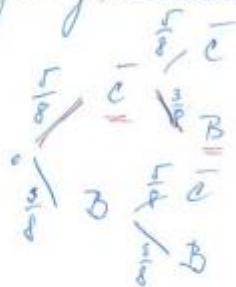
6. V nádobe je 5 čiernych a 3 biele výrobky. V jednom ťahu vytiahneme jeden výrobok, v druhom druhý. Aká je pravdepodobnosť, že v prvom ťahu bude čierny a v druhom biely, ak

- a) výrobok v prvom ťahu vraciame,
- b) výrobok v prvom ťahu nevraciam?

Riešenie:

→ 5 čiernych + 3 biele výrobky
A - v 1. ťahu čierny a v 2. ťahu biely

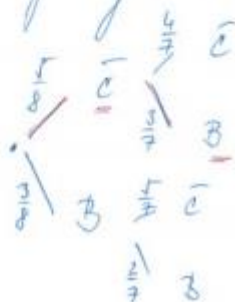
a) výrobky vraciame - opakované nezávislé náhodné pokusy



$$P(A) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{64}$$

výber s opakovaním

b) výrobky nevraciam - opakované závislé náhodné pokusy



$$P(A) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$$

výber bez opakovania

Opakované nezávislé náhodné pokusy

Bernoulliho schéma

Nech pravdepodobnosť nastania javu A je v každom pokuse rovnaká a rovná $P(A) = p$.

Pravdepodobnosť $P_{k,n}$, že pri n pokusoch jav A nastane **práve k -krát** ($0 \leq k \leq n$) sa rovná $P_{k,n} = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

v Exceli = BINOM.DIST($k; n; p$; FALSE)

Poznámka

Pravdepodobnosť, že pri n pokusoch jav A nastane **najviac k -krát**,

$$P(A) = P_{0,n} + P_{1,n} + \dots + P_{k,n} = \sum_{i=0}^k P_{i,n}.$$

V Exceli = BINOM.DIST($k; n; p$; TRUE)

Pravdepodobnosť toho, že pri n pokusoch jav A nastane **aspoň k -krát**,

$$\begin{aligned} P(A) &= P_{k,n} + P_{k+1,n} + \dots + P_{n,n} = 1 - (P_{0,n} + P_{1,n} + \dots + P_{k-1,n}) = \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{k-1} P_{i,n}. \end{aligned}$$

V Exceli = 1 - BINOM.DIST($k - 1; n; p$; TRUE)

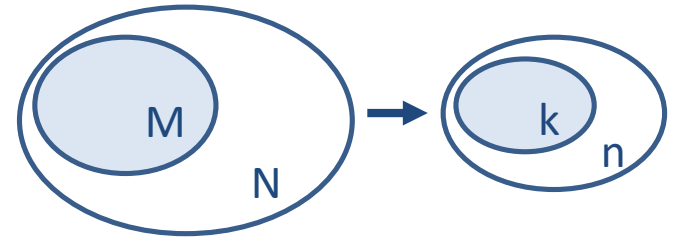
Opakované závislé náhodné pokusy

Hypergeometrická formula

Daných je N predmetov, z ktorých M ($0 < M < N$) predmetov má určitý znak (vlastnosť). Z celého množstva N predmetov sa náhodne vyberie n ($0 < n < N$) predmetov. Nech jav A znamená, že v tomto výbere n predmetov má práve k predmetov uvažovaný znak. Pravdepodobnosť javu A je určená hypergeometrickou formulou

$$P(A) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} .$$

v Exceli = HYPGEOM.DIST (vzorka_s; veľkosť_vzorky; populácia_s; počet_pop; kumulatívne), kde parametrom funkcie priradíme:
vzorka_s priradíme hodnotu k ,
veľkosť_vzorky je rozsah výberu n ,
populácia_s je M , počet_pop je celkové množstvo N ,
argumentu kumulatívne priradíme logickú hodnotu FALSE.



Príklady pravdepodobnosť

5. Test sa skladá z 15 otázok, za každou je ponúknutých 6 možných odpovedí, z ktorých len jedna je správna. Aby študent urobil skúšku, je potrebné zaškrtnúť aspoň 10 správnych odpovedí. Aká je pravdepodobnosť, že študent skúšku urobí, ak odpovede na všetky otázky zaškrtnáva náhodne?

Riešenie:

→ test má 15 otázok - 6 odpovedí (z nich 1 je správna)

potrebujeme 10 správnych odpovedí minimálne

opakované nezávislé pokusy

$$n = 15$$

$$p = \frac{1}{6} \dots \text{pravd., že náhodom je správna}$$

$$k = 10$$

$$P_{10,15} + P_{11,15} + P_{12,15} + P_{13,15} + P_{14,15} + P_{15,15} =$$

$$\binom{15}{10} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 + \binom{15}{11} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{11} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \binom{15}{12} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{12} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \dots$$

$$+ \binom{15}{15} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{15} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 =$$

$$= \frac{15!}{5! \cdot 10!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 + \dots + \frac{1}{6^{15}} =$$

$$= \text{BINOM.DIST}(10; 15; 1/6; 0) + \text{BINOM.DIST}(11; 15; 1/6; 0) + \dots =$$

$$= 1 - \text{BINOM.DIST}(9; 15; 1/6; 1) = 219 \cdot 10^{-5}$$

Príklady pravdepodobnosť

6. Čo je pravdepodobnejšie, vyhrať v hre s rovnocenným partnerom 3 partie zo 4 alebo 5 z 8 (remíza sa nepripúšťa)?

Riešenie:

→ 3 partie zo 4 alebo 5 z 8?

A - vyhrám partie

opakované nezávislé pokusy

$$n = 4$$

$$p = 0,5$$

$$k = 3$$

$$P_{3,4} = \binom{4}{3} 0,5^3 \cdot 0,5^1 = 0,25$$

$$= \text{BINOM.DIST}(3; 4; 0,5; 0)$$

$$n = 8$$

$$p = 0,5$$

$$k = 5$$

$$P_{5,8} = \binom{8}{5} \cdot 0,5^5 \cdot 0,5^3 = 0,21875$$

$$= \text{BINOM.DIST}(5; 8; 0,5; 0)$$

Príklady_pravdepodobnosť

7. V nádobe sa nachádza 10 ložísk, z nich 6 je guľôčkových, ostatné sú valčekové. Náhodne vyberieme z nádoby naraz 3 ložiská. Aká je pravdepodobnosť, že z dvoch nich budú valčekové?

Riešenie:

→ 10 ložísk = 6 guľôčkových + 4 valčekové

náh. výber : $k=3$

A - 2 valčekové + 1 guľôčkové

$$P(A) = \frac{C_2(4) \cdot C_1(6)}{C_3(10)} = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} = 0,3 = \text{HYPERGEOM.DIST}(2; 3; 4; 10; 0)$$
$$= \text{HYPERGEOM.DIST}(1; 3; 6; 10; 0)$$

Príklady_pravdepodobnosť

8. V jednom úrade pracuje 7 žien a 3 muži. Je nutné znížiť stav zamestnancov o 3. Určte pravdepodobnosť, že pri náhodnom výbere budú prepustení 2 muži.

Riešenie:

→ 7 ž + 3 m

max. výber : $k=3$

$A = 2m + 1z$

$$P(A) = \frac{C_2(3) \cdot C_1(7)}{C_3(10)} = \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{7}{1}}{\binom{10}{3}} = 0,175 = \text{HYPGEOM.DIST}(2; 3; 3; 10; 0) \\ = \text{HYPGEOM.DIST}(1; 3; 7; 10; 0)$$

Príklady_pravdepodobnosť

10. Medzi 20 výrobkami sú 4 chybné. Náhodne vyberieme 3 výrobky. Aká je pravdepodobnosť, že medzi vybranými výrobkami sú chybné:

a)0,

b)1,

c)2,

d)3?

Riešenie:

→ do výrobkov = 4 chybné + 16 dobrých

počet vyber : $k=3$

A - vyber 0 chybných : $P(A) = \frac{C_3(16)}{C_3(20)} = 0,49 = \text{HYPGEOM.DIST}(0, 3, 4, 20, 0)$

B - vyberáme 1 chybný : $P(B) = \frac{C_1(4) \cdot C_2(16)}{C_3(20)} = 0,42 = \text{HYPGEOM.DIST}(1, 3, 4, 20, 0)$

C - vyberáme 2 chybné : $P(C) = \frac{C_2(4) \cdot C_1(16)}{C_3(20)} = 0,084 = \text{HYPGEOM.DIST}(2, 3, 4, 20, 0)$

D - vyberáme 3 chybné : $P(D) = \frac{C_3(4)}{C_3(20)} = 0,0035 = \text{HYPGEOM.DIST}(3, 3, 4, 20, 0)$

Príklad_DU

Pán Hypoch tak dlho obťažoval lekára, kým mu nepredpísal požadované lieky. V príbalovom letáku sa pán Hypoch dočítal, že majú dva možné nežiadúce účinky:

- a) vypadanie zubov (15%)
- b) odpadnutie palcov na rukách (20%)

Zároveň je v letáku uvedené, že nebola preukázaná závislosť medzi výskytom jednotlivých typov nežiaducich účinkov.

S akou pravdepodobnosťou si bude môcť pán Hypoch po ukončení liečby obhrýzať palce na rukách?

