

Testovanie hypotéz

Testujeme pomocou

- kritickej oblasti W – oblasti zamietnutia H_0
- $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ intervalu spoľahlivosti IS pre parameter Q ZS – ak konštanta $Q_0 \notin (1 - \alpha) \cdot 100\%$ IS, potom $H_0: Q = Q_0$ zamietame
- p hodnoty – ak $p < \alpha$, H_0 zamietame, ak $p \geq \alpha$, H_0 nezamietame (prijímame);
 $p = 2 \cdot \min\{F(T_0); 1 - F(T_0)\}$, resp. $p = F(T_0)$; $p = 1 - F(T_0)$ podľa druhu H_1 , kde T_0 je realizácia testovacej štatistiky

1. Jednovýberové testy o parametroch ZS s rozdelením $N(\mu, \sigma^2)$

Test hypotézy o zhode strednej hodnoty μ s konštantou μ_0

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad >< \quad H_1: \mu \neq \mu_0$$

$$(H_1: \mu < \mu_0 ; H_1: \mu > \mu_0)$$

Testovacia štatistika

- ak poznáme rozptyl σ^2 ZS: $u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

$$\text{Kritická oblasť } W = \left\{ u; |u| \geq u^{kv} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right\}$$

$$(W = \{u; u < -u^{kv}(\alpha)\}; W = \{u; u > u^{kv}(1 - \alpha)\})$$

- nepoznáme rozptyl σ^2 ZS: $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$

$$\text{Kritická oblasť } W = \left\{ t; |t| \geq t_{n-1}^{kv} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right\}$$

$$(W = \{t; t < -t_{n-1}^{kv}(\alpha)\}; W = \{t; t > t_{n-1}^{kv}(1 - \alpha)\})$$

Test hypotézy o zhode rozptylu σ^2 s konštantou σ_0^2

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad >< \quad H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

$$(H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2 ; H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2)$$

$$\text{Testovacia štatistika} \quad \chi^2 = \frac{(n-1)s_{n-1}^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$\text{Kritická oblasť } W = \left\{ \chi^2; \chi_{n-1}^{2,kv} \left(\frac{\alpha}{2} \right) < \chi^2 < \chi_{n-1}^{2,kv} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right\}$$

$$(W = \{\chi^2; \chi^2 < \chi_{n-1}^{2,kv}(\alpha)\}; W = \{\chi^2; \chi^2 > \chi_{n-1}^{2,kv}(1 - \alpha)\})$$

2. Dvojvýberové testy

Test rovnosti rozptylov dvoch normálnych rozdelení

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 >< H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

Testovacia štatistika $F = \frac{s_{n_1-1}^2}{s_{n_2-1}^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$

$$\text{Kritická oblasť } W = \left\{ F; F_{n_1-1, n_2-1}^{\alpha/2} < F < F_{n_1-1, n_2-1}^{1-\alpha/2} \right\}$$

Poznámka:

homoskedasticita (homogenita rozptylov)– rozptyly v ZS sú zhodné

heteroskedaticita (nehomogenita rozptylov)– rozptyly v ZS nie sú zhodné

Test zhody dvoch stredných hodnôt za predpokladu homoskedasticity

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 >< H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

Testovacia štatistika $t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$, kde $s^2 = \frac{(n_1-1)s_{n_1-1}^2 + (n_2-1)s_{n_2-1}^2}{n_1 + n_2 - 2}$

$$\text{Kritická oblasť } W = \left\{ t; |t| \geq t_{n_1+n_2-2}^{1-\alpha/2} \right\}$$

Test zhody dvoch stredných hodnôt za predpokladu heteroskedasticity

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 >< H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

Testovacia štatistika $t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{s_{n_1-1}^2}{n_1} + \frac{s_{n_2-1}^2}{n_2}}} \sim t(\nu)$, kde $\nu \approx \frac{\left(\frac{s_{n_1-1}^2}{n_1} + \frac{s_{n_2-1}^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1-1} \left(\frac{s_{n_1-1}^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2-1} \left(\frac{s_{n_2-1}^2}{n_2}\right)^2}$ zaokrúhlené dolu

na najbližšie celé číslo

$$\text{Kritická oblasť } W = \left\{ t; |t| \geq t_{\nu}^{1-\alpha/2} \right\}$$

Test zhody dvoch stredných hodnôt pre závislé výbery (párový test)

$$H_0: \mu = 0 >< H_1: \mu \neq 0$$

Testovacia štatistika $t = \frac{\bar{D} - 0}{s_{n_D-1}} \sqrt{n} \sim t(n-1)$

$$\text{Kritická oblasť } W = \left\{ t; |t| \geq t_{n-1}^{1-\alpha/2} \right\}$$

Poznámka: Párový test je jednovýberovým testom aplikovaným na diferencie $D = X - Y$.

3. Testy normality

Test nulovej šikmosti a nulovej špicatosti rozdelenia NP

Hypotézu, že VS pochádza z normálneho rozdelenia nezamietame, ak nezamietame súčasne hypotézu o nulovej šikmosti i nulovej špicatosti. Ak zamietame aspoň jednu z oboch H_0 , potom s rovnakou spoľahlivosťou zamietame tvrdenie, že výber pochádza z normálneho rozdelenia.

$$1. \quad H_0: \alpha(X) = 0 >< H_1: \alpha(X) \neq 0$$

Testovacia štatistika $u_3 = \frac{\alpha(X)}{\sqrt{D(\alpha(X))}} \sim N(0,1)$, kde $D(\alpha(X)) = \frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}$ a $\alpha(X)$ je koeficient

šikmosti

$$\text{Kritická oblasť } W = \left\{ u_3; |u_3| \geq u^{kv} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right\} \quad \text{Použitie: } n > 200$$

$$2. \quad H_0: \beta(X) = 0 >< H_1: \beta(X) \neq 0$$

Testovacia štatistika $u_4 = \frac{\beta(X) + \frac{6}{n+1}}{\sqrt{D(\beta(X))}} \sim N(0,1)$, kde $D(\beta(X)) = \frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}$ a $\beta(X)$ je koeficient

špicatosti

$$\text{Kritická oblasť } W = \left\{ u_4; |u_4| \geq u^{kv} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right\} \quad \text{Použitie: } n > 500$$

Kombinovaný C-test nulovej šikmosti a nulovej špicatosti NP

$$H_0: \text{NP má normálne rozdelenie.} >< H_1: \text{NP nemá normálne rozdelenie.}$$

Testovacia štatistika $C = u_3^2 + u_4^2 \sim \chi^2(2)$

$$\text{Kritická oblasť } W = \{C; C \geq \chi_{2, kv}^2(1 - \alpha)\} \quad \text{Použitie: } n > 200$$

χ^2 test dobrej zhody

Univerzálny test k overeniu toho, či náhodný výber pochádza z nejakého diskrétného alebo spojitého rozdelenia.

Východisková myšlienka:

porovnávame relatívne početnosti $f_i = \frac{n_i}{n}$ s hypotetickými pravdepodobnosťami $\hat{\pi}_i$

$$H_0: \text{NP má rozdelenie daného typu.} >< H_1: \text{NP nemá rozdelenie daného typu.}$$

Hodnoty VS triedime do k tried alebo disjunktných intervalov, pričom $n_i = 1, \dots, k$ sú k nim prislúchajúce absolútne početnosti. Odhad hypotetickej pravdepodobnosti $\hat{\pi}_i$, že NP nadobudne hodnoty z i -tej triedy počítame z podmienky, že NP má predpokladané rozdelenie.

Testovacia štatistika $\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n\hat{\pi}_i)^2}{n\hat{\pi}_i} \sim \chi^2(k - c - 1)$, kde c je počet odhadovaných parametrov overovaného rozdelenia

Kritická oblasť $W = \{\chi^2; \chi^2 \geq \chi_v^{2, kv}(1 - \alpha)\}$

Použitie: veľké n

V praxi sa vyžaduje, aby vo všetkých triedach boli teoretické početnosti väčšie ako 5. Pri nesplnení sa triedy resp. intervaly zlučujú.

Kolmogorov – Smirnov test zhody

Tento test je možné použiť aj pre výbery malého rozsahu, t.j. ak χ^2 nie je vhodný.

Potrebná je znalosť všetkých parametrov uvažovaného spojitého rozdelenia.

H_0 : Náhodný výber pochádza z určitého rozdelenia so spojitou distribučnou

funkciou $F(x)$. $> < H_1$: Náhodný výber nepochádza z daného rozdelenia.

Testovacia štatistika $d_n = \sup |F_n(x) - F(x)|$

Kritická oblasť $W = \{d_n; d_n \geq d_n(1 - \alpha)\}$, kde $d_n(1 - \alpha) \cong \sqrt{\frac{1}{2n} \ln \frac{2}{\alpha}}$, resp. tabuľková hodnota

Použitie: malé n